Український математичний вісник
Том 11 **(2014)**, № 1, 69 – 78

Про операторний аналог теореми додавання для косинуса

Юрій С. Лінчук

(*Представлена С. Я. Махно*)

Анотація. Описано всі пари лінійних неперервних операторів, що діють у просторах аналітичних в областях функцій і задовольняють співвідношення, яке є операторним аналогом теореми додавання для косинуса.

2010 MSC. 47B38, 47A62.

Ключові слова та фрази. Простір аналітичних функцій, операторне рівняння, інтегральне зображення Кете лінійних неперервних операторів.

1. Вступ

Нехай G — довільна область комплексної площини. Через $\mathcal{H}(G)$ позначатимемо простір усіх аналітичних в області G функцій, що наділений топологією компактної збіжності, а через $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ — множину всіх лінійних неперервних операторів на просторі $\mathcal{H}(G)$. У роботі [1] описано всі лінійні функціонали L та M на просторі $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють співвідношення

$$L(fg) = L(f)L(g) - M(f)M(g) \tag{1.1}$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$. Це рівняння є аналогом теореми додавання для косинусів.

Природним чином виникає питання про опис усіх пар лінійних неперервних операторів A та B на просторі $\mathcal{H}(G)$ таких, що

$$(A(fg))(z) = (Af)(z)(Ag)(z) - (Bf)(z)(Bg)(z) \tag{1.2}$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$ при $z \in G$. Розв'язанню цієї задачі в класі лінійних неперервних операторів, що діють у просторі аналітичних функцій в однозв'язній області G, присвячено дану статтю.

Стаття надійшла в редакцію 19.03.2012

 © Інститут математики НАН України

2. Допоміжні твердження

Для розв'язання сформульованої задачі будемо використовувати інтегральне зображення Кете операторів з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ [2]. Наведемо це зображення. Нехай G — довільна однозв'язна область комплексної площини, а $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність однозв'язних областей, кожна з яких обмежена замкненою спрямною жордановою кривою, яка апроксимує зсередини область G, тобто $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ і $\overline{G_n} \subset G_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Через $\mathcal{B}_n$ позначимо банахів простір, що складається з функцій $f(z)$, які неперервні на $\overline{G_n}$ і є аналітичними в G_n, з нормою $\|f\| = \max_{z \in \overline{G_n}} |f(z)|$, $n = 1, 2, \ldots$. Якщо оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, то для довільного натурального числа n існує натуральне число $N(n)$ таке, що оператор T однозначно продовжується до лінійного неперервного оператора, який діє з простору $\mathcal{B}_{N(n)}$ у $\mathcal{B}_n$. Тому функція

$$t(\lambda, z) = T\Big[\frac{1}{\lambda - z}\Big], \tag{2.1}$$

є локально аналітичною на множині $\complement G \times G$ у наступному сенсі: існує монотонно зростаюча функція $N(n) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ така, що для кожного натурального n функція $t(\lambda, z)$ є аналітичною на множині $\complement\overline{G_{N(n)}} \times G_n$, при цьому $t(\infty, z) = 0$; крім того, якщо $m > n$, то функція $t(\lambda, z)$, яка визначена на множинах $\complement\overline{G_{N(n)}} \times G_n$ і $\complement\overline{G_{N(m)}} \times G_m$, збігається на їхньому перетині $\complement\overline{G_{N(m)}} \times G_n$. При цьому для $g \in \mathcal{H}(G)$ при $z \in G_n$

$$(Tg)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} t(\lambda, z) g(\lambda)\, d\lambda, \tag{2.2}$$

де γ_n — межа області $G_{N(n)+1}$.

Навпаки, якщо функція $t(\lambda, z)$ є локально аналітичною на множині $\complement G \times G$, то вона є аналітичною на множині $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \complement\overline{G_{N(n)}} \times G_n$, і рівністю (2.2) визначається оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Таким чином, формулами (2.1) та (2.2) встановлюється взаємно однозначна відповідність між локально аналітичними на множині $\complement G \times G$ функціями $t(\lambda, z)$ і операторами $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$. Функцію $t(\lambda, z)$, яка для оператора $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ визначається формулою (2.1), називають характеристичною за Кете функцією оператора T.

Зазначимо, що в роботі [3] описано всі пари лінійних неперервних операторів A та B на просторі $\mathcal{H}(G)$, для яких виконується рівність

$$(A(fg))(z) = (Af)(z)(Bg)(z) + (Ag)(z)(Bf)(z)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$ при $z \in G$. Надалі нам буде потрібне наступне узагальнення основного результату роботи [3].

Теорема 2.1. *Нехай функція $q(z)$ є аналітичною в однозв'язній області G і відмінною від тотожного нуля. Для того, щоб для ненульових операторів A та B з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ виконувалася рівність*

$$q(z)(A(fg))(z) = (Af)(z)(Bg)(z) + (Ag)(z)(Bf)(z)$$

для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$, необхідно і достатньо, щоб оператори A та B подавалися у вигляді

$$(Af)(z) = \frac{h(z)}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \frac{f(\lambda)}{\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)}\, d\lambda$$

та

$$(Bf)(z) = \frac{q(z)}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \frac{(\lambda\varphi_0(z) + \frac{1}{2}\varphi_1(z))f(\lambda)}{\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)}\, d\lambda,$$

де функції $h(z)$ та $\varphi_k(z)$, $k = 0, 1, 2$, належать до простору $\mathcal{H}(G)$, причому на множині $\mathcal{F}$ виконується співвідношення

$$\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z) \neq 0,$$

хоча б одна з функцій $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ відмінна від тотожного нуля в G та $h(z) \not\equiv 0$ в G.

У формулах для визначення $(Af)(z)$ та $(Bf)(z)$ точка $z \in G_n$, а контур інтегрування γ_n вибрано за властивістю локальної аналітичності на множині $\complement G \times G$ характеристичних функцій операторів A та B. Теорема 2.1 доводиться за тією ж схемою, що й теорема з [3]. Принагідно зазначимо, що у формулювання, але не у доведення теореми з [3] вкралася неточність: замість умови "$\varphi_0(z)\varphi_1(z) \not\equiv 0$ в G" повинна бути умова "хоча б одна з функцій $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ відмінна від тотожного нуля в G".

3. Основний результат

Припустимо, що оператори A та B з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ задовольняють співвідношення (1.2). Якщо $B = 0$, то рівність (1.2) набуває вигляду $(A(fg))(z) = (Af)(z)(Ag)(z)$. За теоремою 1 з [4] ненульовий оператор A з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ задовольняє це співвідношення тоді і тільки тоді, коли $(Af)(z) = f(\psi(z))$, де $\psi(z)$ — деяка функція з простору $\mathcal{H}(G)$, для якої $\psi(G) \subset G$.

Надалі вважатимемо, що $B \neq 0$. Тоді з (1.2) випливає, що $A \neq 0$. Для довільних функцій f, g, h з простору $\mathcal{H}(G)$ виконується рівність

$A(fgh) = A(fg)A(h) - B(fg)B(h)) = A(f)A(g)A(h) - B(f)B(g)A(h) - B(fg)B(h)$. Подібним чином $A(fhg) = A(fh)A(g) - B(fh)B(g) = = A(f)A(h)A(g) - B(f)B(h)A(g) - B(fh)B(g)$. Тоді

$$(B(fg) - B(f)A(g))B(h) = (B(fh) - B(f)A(h))B(g) \tag{3.1}$$

для довільних функцій f, g, h з простору $\mathcal{H}(G)$. Оскільки $B \neq 0$, то існує функція $h_0 \in \mathcal{H}(G)$, для якої $Bh_0 = H_0$ і $H_0(z) \not\equiv 0$ в G. Покладаючи в (3.1) $h = h_0$, одержимо, що при $z \in G$ виконується рівність

$$H_0(z)(B(fg))(z) = H_0(z)(Bf)(z)(Ag)(z) + (Cf)(z)(Bg)(z), \tag{3.2}$$

де $C \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, причому $(Cf)(z) = (B(h_0f))(z) - (Ah_0)(z)(Bf)(z)$. Помінявши в (3.2) f та g місцями, одержимо, що

$$H_0(z)(B(gf))(z) = H_0(z)(Bg)(z)(Af)(z) + (Cg)(z)(Bf)(z).$$

З цієї рівності, використовуючи (3.2), отримуємо, що

$$(Bf)(z)(H_0(z)(Ag)(z) - (Cg)(z)) = (Bg)(z)(H_0(z)(Af)(z) - (Cf)(z)).$$

Покладаючи в цій рівності $g = h_0$, одержимо, що при $z \in G$

$$H_0(z)(Cf)(z) = \Theta(z)(Bf)(z) + (H_0(z))^2(Af)(z), \tag{3.3}$$

де $\Theta(z) = (Ch_0)(z) - H_0(z)(Ah_0)(z)$, причому $\Theta \in \mathcal{H}(G)$. Виключаючи з рівностей (3.2) та (3.3) $(Cf)(z)$, одержимо, що

$$\begin{aligned}(H_0(z))^2(B(fg))(z) = (Bf)(z)\Big((H_0(z))^2(Ag)(z) + \frac{1}{2}\Theta(z)(Bg)(z)\Big)\\ + (Bg)(z)\Big((H_0(z))^2(Af)(z) + \frac{1}{2}\Theta(z)(Bf)(z)\Big)\end{aligned} \tag{3.4}$$

для $f, g \in \mathcal{H}(G)$.

Розглянемо оператор $D \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, який визначається формулою

$$(Df)(z) = (H_0(z))^2(Af)(z) + \frac{1}{2}\Theta(z)(Bf)(z). \tag{3.5}$$

Тоді співвідношення (3.4) можна записати у вигляді

$$(H_0(z))^2(B(fg))(z) = (Bf)(z)(Dg)(z) + (Bg)(z)(Df)(z), \tag{3.6}$$

$f, g \in \mathcal{H}(G)$. Множина операторів B та D з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які задовольняють співвідношення (3.6), описана в теоремі 2.1. За цією теоремою існують функції $h(z)$ та $\varphi_k(z)$, $k = 0, 1, 2$, з простору $\mathcal{H}(G)$, для яких на множині $\mathcal{F}$ виконується умова

$$\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z) \neq 0. \tag{3.7}$$

При цьому для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$ при $z \in G_n$ виконуються рівності

$$(Bf)(z) = \frac{h(z)}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \frac{f(\lambda)}{\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)}\, d\lambda \tag{3.8}$$

та

$$(Df)(z) = \frac{(H_0(z))^2}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \frac{(\lambda\varphi_0(z) + \frac{1}{2}\varphi_1(z))f(\lambda)}{\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)}\, d\lambda, \tag{3.9}$$

де контур інтегрування γ_n вибрано за властивістю локальної аналітичності на множині $\complement G \times G$ характеристичних функцій операторів B та D. Оскільки оператор $B \neq 0$, то принаймні одна з функцій $\varphi_0(z)$ або $\varphi_1(z)$ відмінна від тотожного нуля в G.

З рівностей (3.5), (3.8) і (3.9) випливає, що для довільної функції $f(z)$ з простору $\mathcal{H}(G)$ при $z \in G_n$ є правильною рівність

$$\begin{aligned}(H_0(z))^2(Af)(z) + \frac{1}{2}\Theta(z)\frac{h(z)}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \frac{f(\lambda)}{\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)}\, d\lambda \\ = \frac{(H_0(z))^2}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \frac{(\lambda\varphi_0(z) + \frac{1}{2}\varphi_1(z))f(\lambda)}{\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)}\, d\lambda.\end{aligned} \tag{3.10}$$

З умови (3.7) випливає, що для довільної точки $z_0 \in G$ числа $\varphi_0(z_0)$ та $\varphi_1(z_0)$ одночасно не дорівнюють нулеві. Дійсно, припустимо, що $\varphi_0(z_0) = \varphi_1(z_0) = 0$ для деякої точки $z_0 \in G$. Тоді з (3.7) випливає, що $\varphi_2(z_0) \neq 0$. Виберемо натуральне число n таким, щоб $z_0 \in G_n$. Тоді при $z \in G_n$ і $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$ має місце (3.7). Внаслідок неперервної залежності коренів рівняння $\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z) = 0$ відносно λ від параметра z, одержимо, що при $z \to z_0$ корені цього рівняння прямують до безмежності, і ми отримуємо суперечність з умовою (3.7). Розглянемо довільну точку $z_0 \in G$. Нехай $\varphi_0(z_0) \neq 0$ і z_1 та z_2 — корені рівняння $\varphi_0(z_0)\lambda^2 + \varphi_1(z_0)\lambda + \varphi_2(z_0) = 0$. З (3.7) випливає, що $z_1, z_2 \in G_{N(n)}$. Тому для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \frac{f(\lambda)}{\varphi_0(z_0)\lambda^2 + \varphi_1(z_0))\lambda + \varphi_2(z_0)}\, d\lambda = \begin{cases} \frac{f(z_1) - f(z_2)}{\varphi_0(z_0)(z_1 - z_2)}, & \text{при } z_1 \neq z_2 \\ \frac{f'(z_1)}{\varphi_0(z_0)}, & \text{при } z_1 = z_2. \end{cases}$$

У випадку $\varphi_0(z_0) = 0$ аналогічно до попереднього одержуємо, що

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \frac{f(\lambda)}{\varphi_0(z_0)\lambda^2 + \varphi_1(z_0))\lambda + \varphi_2(z_0)}\, d\lambda = \frac{f(z_1)}{\varphi_1(z_0)}$$

для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$, де z_1 — деяка точка з області G. З цих формул випливає, що для довільної точки $z_0 \in G_n$ існує функція $f \in \mathcal{H}(G)$, для якої $\int_{\gamma_n} \frac{f(\lambda)}{\varphi_0(z_0)\lambda^2+\varphi_1(z_0))\lambda+\varphi_2(z_0)} d\lambda \neq 0$. Оскільки рівність (3.10) виконується для довільної функції $f \in \mathcal{H}(G)$, то кожен m-кратний нуль функції $(H_0(z))^2$, який належить області G_n, є також k-кратним нулем функції $\Theta(z)h(z)$, причому $k \geq m$. Тому функція $h_1(z) = -\frac{\Theta(z)h(z)}{2(H_0(z))^2}$ є аналітичною в області G і з рівності (3.10) випливає, що

$$(Af)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \frac{(\lambda\varphi_0(z) + \frac{1}{2}\varphi_1(z) + h_1(z))f(\lambda)}{\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)} \, d\lambda \tag{3.11}$$

при $z \in G_n$. Таким чином, ми встановили, що для ненульових операторів A та B, що задовольняють співвідношення (1.2), існують функції $h(z)$, $h_1(z)$, $\varphi_k(z)$, $k = 0, 1, 2$, з простору $\mathcal{H}(G)$, для яких виконується умова (3.7), і дія цих операторів на довільну функцію $f \in \mathcal{H}(G)$ при $z \in G_n$ визначається формулами (3.11) та (3.8), відповідно.

Покажемо, що між функціями, через які визначаються оператори A та B, існує певне співвідношення. Нехай $a(\lambda, z)$ та $b(\lambda, z)$ — характеристичні за Кете функції операторів A та B, які визначаються формулами (3.11) та (3.8). Візьмемо довільне натуральне n, і нехай число $N(n)$ знайдене за означенням локально аналітичних функцій $a(\lambda, z)$ та $b(\lambda, z)$. Тоді ці функції є аналітичними при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$ та $z \in G_n$. Як відзначалося раніше, оператори A та B однозначно продовжуються до лінійних неперервних операторів, які діють з $\mathcal{B}_{N(n)}$ в $\mathcal{B}_n$. Для продовжених операторів зберігатимемо попередні позначення. Покладаючи в (1.2) $f(z) = \frac{1}{\lambda - z}$ та $g(z) = \frac{1}{\mu - z}$, одержимо, що при $\lambda, \mu \in \complement\overline{G_{N(n)}}$, причому $\lambda \neq \mu$, та при $z \in G_n$ виконується рівність:

$$\frac{1}{\mu - \lambda} \left(a(\lambda, z) - a(\mu, z)\right) = a(\lambda, z)a(\mu, z) - b(\lambda, z)b(\mu, z). \tag{3.12}$$

З (3.5) та (3.11) випливає, що при $\lambda \in \complement\overline{G_{N(n)}}$ та $z \in G_n$

$$a(\lambda, z) = \frac{\lambda\varphi_0(z) + \frac{1}{2}\varphi_1(z) + h_1(z)}{\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)}, \tag{3.13}$$

$$b(\lambda, z) = \frac{h(z)}{\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)}. \tag{3.14}$$

Тому при $\lambda, \mu \in \complement\overline{G_{N(n)}}$, причому $\lambda \neq \mu$, та при $z \in G_n$ виконується рівність:

$$\frac{1}{\mu-\lambda}\left(a(\lambda,z)-a(\mu,z)\right)-\left(a(\lambda,z)a(\mu,z)-b(\lambda,z)b(\mu,z)\right)$$
$$=\frac{h^2(z)-h_1^2(z)+\frac{1}{4}\varphi_1^2(z)-\varphi_0(z)\varphi_2(z)}{(\varphi_0(z)\lambda^2+\varphi_1(z)\lambda+\varphi_2(z))(\varphi_0(z)\mu^2+\varphi_1(z)\mu+\varphi_2(z))}.$$

Тому із співвідношення (3.12) випливає, що

$$h^2(z)-h_1^2(z)+\frac{1}{4}\varphi_1^2(z)-\varphi_0(z)\varphi_2(z)=0 \tag{3.15}$$

при $z\in G_n$. Оскільки n — довільне натуральне число, то рівність (3.15) виконується для довільної точки $z\in G$. Таким чином, доведено необхідність умов наступного твердження.

Теорема 3.1. *Нехай G — однозв'язна область в $\mathbb{C}$. Для того, щоб для ненульових операторів A та B з класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ виконувалася рівність* (1.2) *для довільних функцій f та g з простору $\mathcal{H}(G)$, необхідно і достатньо, щоб оператори A та B подавалися у вигляді* (3.11) *та* (3.8)*, де функції $h(z)$, $h_1(z)$ та $\varphi_k(z)$, $k=0,1,2$, належать до простору $\mathcal{H}(G)$, причому для них на множині $\mathcal{F}$ виконується співвідношення* (3.7)*, на множині G виконується рівність* (3.15)*, хоча б одна з функцій $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ відмінна від тотожного нуля в G та $h(z)\not\equiv 0$ в G.*

Доведення. Достатність. Нехай $h(z)$, $h_1(z)$, $\varphi_k(z)$, $k=0,1,2,$ — аналітичні в області G функції, для яких на множині $\mathcal{F}$ виконується співвідношення (3.7), на множині G виконується рівність (3.15), хоча б одна з функцій $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$ відмінна від тотожного нуля в G та $h(z)\not\equiv 0$ в G. Тоді формулами (3.13) та (3.14) визначаються локально аналітичні на множині $\complement G\times G$ функції $a(\lambda,z)$ та $b(\lambda,z)$. Покажемо, що ненульові оператори A та B, характеристичні функції яких збігаються, відповідно, з $a(\lambda,z)$ та $b(\lambda,z)$, задовольняють рівність (1.2).

Візьмемо довільне натуральне n і виберемо за ним натуральне число $N(n)$ таким, щоб функції $a(\lambda,z)$ та $b(\lambda,z)$ були аналітичними на множині $\complement\overline{G_{N(n)}}\times G_n$. Нехай $\gamma_n=\partial G_{N(n)+1}$ і $\tilde{\gamma}_n=\partial G_{N(n)+2}$. Тоді для довільних функцій f та g з $\mathcal{H}(G)$ при $z\in G_n$ значення $(Af)(z)$ та $(Bf)(z)$ визначаються формулами (3.11) та (3.8), а значення $(Ag)(z)$ та $(Bg)(z)$ визначаються наступними формулами:

$$(Ag)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{(\mu\varphi_0(z)+\frac{1}{2}\varphi_1(z)+h_1(z))g(\mu)}{\varphi_0(z)\mu^2+\varphi_1(z)\mu+\varphi_2(z)}\,d\mu,$$

$$(Bg)(z)=\frac{h(z)}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{g(\mu)}{\varphi_0(z)\mu^2+\varphi_1(z)\mu+\varphi_2(z)}\,d\mu.$$

Тому при $z \in G_n$

$$(Af)(z)(Ag)(z) - (Bf)(z)(Bg)(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_n} d\lambda \int\limits_{\tilde{\gamma}_n} \frac{\chi(\lambda,\mu,z) f(\lambda) g(\mu)}{\eta(\lambda,z)\eta(\mu,z)}\, d\mu,$$

де $\eta(\lambda,z) = \varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)$, а $\chi(\lambda,\mu,z) = \lambda\mu\varphi_0^2(z) + \frac{1}{4}\varphi_1^2(z) + (\lambda+\mu)\left(\frac{1}{2}\varphi_0(z)\varphi_1(z) + \varphi_0(z)h_1(z)\right) + \varphi_1(z)h_1(z) + h_1^2(z) - h^2(z)$.

Враховуючи (3.15), одержимо

$$\frac{\chi(\lambda,\mu,z)}{\eta(\lambda,z)\eta(\mu,z)} = \frac{1}{\mu-\lambda}\left(\frac{\lambda\varphi_0(z) + \frac{1}{2}\varphi_1(z) + h_1(z)}{\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)} - \frac{\mu\varphi_0(z) + \frac{1}{2}\varphi_1(z) + h_1(z)}{\varphi_0(z)\mu^2 + \varphi_1(z)\mu + \varphi_2(z)}\right)$$

при $\lambda \in \gamma_n$, $\mu \in \tilde{\gamma}_n$, $z \in G_n$. Тоді

$$\begin{aligned}(Af)(z)(Ag)(z) &- (Bf)(z)(Bg)(z) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_n} \frac{\left(\lambda\varphi_0(z) + \frac{1}{2}\varphi_1(z) + h_1(z)\right) f(\lambda)}{\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)}\, d\lambda \int\limits_{\tilde{\gamma}_n} \frac{g(\mu)}{\mu-\lambda}\, d\mu \\ &- \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\tilde{\gamma}_n} \frac{\left(\mu\varphi_0(z) + \frac{1}{2}\varphi_1(z) + h_1(z)\right) g(\mu)}{\varphi_0(z)\mu^2 + \varphi_1(z)\mu + \varphi_2(z)}\, d\mu \int\limits_{\gamma_n} \frac{f(\lambda)}{\mu-\lambda}\, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_n} \frac{\left(\lambda\varphi_0(z) + \frac{1}{2}\varphi_1(z) + h_1(z)\right) f(\lambda)g(\lambda)}{\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z)}\, d\lambda = (A(fg))(z).\end{aligned}$$

Теорема доведена. □

Наведемо деякі класи операторів, які одержуються з теореми 3.1 і задовольняють співвідношення, яке є операторним аналогом теореми додавання для косинуса.

I. Нехай

$$\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z) = (\lambda - \psi_1(z))(\lambda - \psi_2(z)),$$

де $\psi_1(z)$ та $\psi_2(z)$ — деякі аналітичні в області G функції, які відображають G в себе, причому $\psi_1(z) \not\equiv \psi_2(z)$. Тоді умова (3.7) виконується і для довільних функцій $h(z)$ і $h_1(z)$ з простору $H(G)$, які при $z \in G$ задовольняють співвідношення $h^2(z) - h_1^2(z) + \frac{1}{4}(\psi_1(z) - \psi_2(z))^2 = 0$, оператори A та B, які діють за правилами

$$(Af)(z) = \frac{1}{2}\left(f(\psi_1(z)) + f(\psi_2(z))\right) + h_1(z)\frac{f(\psi_1(z)) - f(\psi_2(z))}{\psi_1(z) - \psi_2(z)}$$

при $z \in G : \psi_1(z) \neq \psi_2(z)$,

$$(Af)(z) = f(\psi_1(z)) + h_1(z)f'(\psi_1(z)) \text{ при } z \in G : \psi_1(z) = \psi_2(z);$$

$$(Bf)(z) = h(z)\frac{f(\psi_1(z)) - f(\psi_2(z))}{\psi_1(z) - \psi_2(z)} \text{ при } z \in G : \psi_1(z) \neq \psi_2(z),$$

$$(Bf)(z) = h(z)f'(\psi_1(z)) \text{ при } z \in G : \psi_1(z) = \psi_2(z)$$

належать до класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і задовольняють співвідношення (1.2).

II. Нехай

$$\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z) = (\lambda - \psi(z))^2,$$

де $\psi(z)$ деяка аналітична в області G функція, причому $\psi(G) \subset G$. Тоді використовуючи теорему 3.1, одержуємо, що для довільної функції $h(z)$ з простору $\mathcal{H}(G)$ оператори A та B, які діють за правилами:

$$a)\ (Af)(z) = f(\psi(z)) + h(z)f'(\psi(z)), \quad (Bf)(z) = h(z)f'(\psi(z));$$
$$b)\ (Af)(z) = f(\psi(z)) - h(z)f'(\psi(z)), \quad (Bf)(z) = h(z)f'(\psi(z)),$$

належать до класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і задовольняють співвідношення (1.2).

III. Нехай

$$\varphi_0(z)\lambda^2 + \varphi_1(z)\lambda + \varphi_2(z) = \lambda - \psi(z),$$

де $\psi(z)$ деяка аналітична в області G функція, причому $\psi(G) \subset G$. Тоді з теореми 3.1 випливає, що для довільних функцій $h(z)$ та $h_1(z)$ з простору $\mathcal{H}(G)$, які задовольняють співвідношення $h^2(z) - h_1^2(z) + \frac{1}{4} = 0$, оператори A та B, які діють за правилами:

$$(Af)(z) = \Big(\frac{1}{2} + h_1(z)\Big)f(\psi(z)), \quad (Bf)(z) = h(z)f(\psi(z)),$$

належать до класу $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ і задовольняють співвідношення (1.2).

Література

[1] P. L. Kannappan, N. R. Nandakumar, *On a cosine functional equation for operators on the algebra of analytic functions in a domain* // Aequationes Mathematicae, **61** (2001), 233–238.

[2] G. Köthe, *Dualität in der Funktionentheorie* // J. reine und angew. Math., **191** (1953), 30–49.

[3] Ю. С. Лінчук, *Операторне узагальнення одного результата Рубела* // Укр. матем. журнал, **63** (2011), No. 12, 1710–1716.

[4] Ю. С. Лінчук, *Про одну характеристичну властивість операторів композиції* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Математика, **1** (2011), No. 3, 58–60.

Відомості про авторів

Юрій Степанович Лінчук

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
вул. Коцюбинського 2,
Чернівці, 58012,
Україна
E-Mail: yustlin@gmail.com