Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 4, 537 – 556

Розв'язність задачі з вільною межею для неоднорідного пружнього тіла

Микола В. Краснощок

(*Представлена С. Д. Івасишеним*)

Анотація. Розглянуто задачу з вільною межею для стаціонарної системи теорії пружності. Доведено існування класичного розв'язку за умови, що початкові дані є близькими до стаціонарного розв'язку.

2010 MSC. 35R35.

Ключові слова та фрази. Вільна межа, класичний розв'язок, теорія пружності.

Вступ

У даній роботі доведено існування на довільному відрізку часу $[0, T]$ класичного розв'язку однієї задачі з вільною (рухомою) межею для стаціонарної системи теорії пружності за умови, що початкове положення вільної межі є достатньо близьким до плоского фронту $x_2 = h_{st}$, який відповідає стаціонарному розв'язку. Дану модель, пов'язану з геофізичними процесами в неоднорідному ґрунті, було запропоновано в роботі [1], де також досліджувалася більш загальна постановка задачі даного типу на фізичному рівні строгості.

Особливість даної задачі полягає в поєднанні еліптичної системи з додатковою, нестаціонарною граничною умовою. Такі задачі досліджувалися раніше переважно для різних модифікацій задачі Стефана (див. [2–6]). Слід відзначити також роботи [7, 8] та наведену в них бібліографію, де вивчалися задачі з вільними межами для стаціонарної задачі Нав'є–Стокса. Теоретичному дослідженню нестаціонарних задач теорії пружності з вільними межами присвячено відносно небагато робіт (див., наприклад, [9, 10]). Значно більше уваги приділялося обчислювальним аспектам різних прикладних задач ([11–13]).

Стаття надійшла в редакцію 22.11.2010

ISSN 1810 – 3200.

Стаття складається з семи частин. У першій частині наведено постановку задачі, у другій — визначено стаціонарний розв'язок $u_{st}^{(1)}$, $u_{st}^{(2)}$, h_{st} та переформульовано вихідну задачу в термінах нових невідомих функцій, що дорівнюють $u^{(1)}-u_{st}^{(1)}$, $u^{(2)}-u_{st}^{(2)}$, $h-h_{st}$. У третій частині задачу з вільною межею зведено до задачі в зафіксованих областях за допомогою заміни $x=\theta(y,t)$. У четвертій частині введено основні функціональні простори, сформульовано основний результат роботи — теорему 4.1 та теорему 4.2 про існування розв'язку відповідної лінійної задачі. У п'ятій частині доведено теорему 4.2, у шостій — побудовано розв'язок основної модельної задачі спряження в площині $\mathbb{R}^2$. Сьома частина містить доведення теореми 4.1.

1. Постановка задачі

Нехай $\Pi=\{(x_1,x_2):\,-H_2<x_2<H_1\}$, де H_1, H_2 — додатні сталі; $\Sigma_1:x_2=H_1$; $\Sigma_2:x_2=-H_2$; крива $\Gamma(t):x_2=h(x_1,t)$ ділить смугу Π на дві підобласті $\Pi_1(t)=\{(x_1,x_2):\,h(x_1,t)<x_2<H_1\}$ і $\Pi_2(t)=\{(x_1,x_2):\,-H_2<x_2<h(x_1,t)\}$; $n(x,t)=(n_1(x,t),n_2(x,t))$ — нормаль до $\Gamma(t)$ спрямована до $\Pi_1(t)$; $\varkappa(x,t)$ — кривина $\Gamma(t)$ в точці $(x_1,h(x_1,t))$. Область $\Pi_i(t)$, $(i=1,2)$ заповнено пружнім середовищем з модулем Юнга E_i, коефіцієнтом Пуассона $\nu_i\in(0,1/2)$ (індекс параметра відповідає індексу області) та щільністю $\rho_1=\rho_2=\rho$. Позначимо через $u^{(i)}(x,t)=(u_1^{(i)}(x,t),u_2^{(i)}(x,t))$, $\epsilon_{kl}^{(i)}(u)$, $\sigma_{kl}^{(i)}(u)$ відповідно переміщення, компоненти тензора деформацій та тензора напружень в області $\Pi_i(t)$ $(i,k,l=1,2)$. Співвідношення між ними мають вигляд:

$$\epsilon_{kl}^{(i)}(u)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k^{(i)}}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l^{(i)}}{\partial x_k}\right),\quad \epsilon^{(i)}(u)=\epsilon_{11}^{(i)}(u)+\epsilon_{22}^{(i)}(u),$$
$$\sigma_{kl}^{(i)}(u)=\frac{E_i}{1+\nu_i}\left(\epsilon_{kl}^{(i)}(u)+\frac{\nu_i}{1-2\nu_i}\epsilon^{(i)}(u)\delta_{kl}\right). \tag{1.1}$$

Підсумовуючи всюди далі за повторюваними індексами (за винятком індексу i) від 1 до 2, позначимо також через $\sigma_n^{(i)}(u)=(\sigma_{1l}^{(i)}(u))n_l,$ $\sigma_{2l}^{(i)}(u))n_l)$, $(i=1,2)$ вектор напружень на кривій $\Gamma(t)$ з нормаллю n. Через $\mathcal{E}^{(i)}(u)=\frac{1}{2}\sigma_{kl}^{(i)}(u)\epsilon_{kl}^{(i)}(u)$ позначимо щільність енергії деформацій.

Треба визначити функції $u^{(i)}(x,t)=(u_1^{(i)}(x,t),u_2^{(i)}(x,t))$, $h(x_1,t)$, $(i=1,2)$ за умовами

$$\begin{gathered}
\frac{1}{1-2\nu_i}\nabla \operatorname{div} u^{(i)} + \Delta u^{(i)} = 0, \quad x \in \Pi_i(t),\ t \geq 0,\ i = 1,2, \\
\sigma_{12}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{22}^{(1)} = -\sigma_0, \quad x \in \Sigma_1,\ t \geq 0, \\
u^{(2)} = 0, \quad x \in \Sigma_2,\ t \geq 0, \\
[u] = 0, \quad [\sigma_n(u)] = -\gamma\varkappa n, \quad x \in \Gamma(t),\ t \geq 0,
\end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered}
LV_n = u_l^{(1)} n_l + \frac{K}{\rho}\left([\mathcal{E}] + \gamma\rho\varkappa\right), \quad x \in \Gamma(t),\ t \geq 0, \\
h(x_1, 0) = h_0(x_1), \quad x \in \mathbb{R}^1,
\end{gathered} \tag{1.3}$$

де σ_0, γ, K, L — додатні сталі, V_n — швидкість руху вільної межі $\Gamma(t)$ у напрямку нормалі n, крім того, $[u] = u^{(1)} - u^{(2)}$, $[\sigma_n(u)] = \sigma_n^{(1)}(u) - \sigma_n^{(2)}(u)$, $[\mathcal{E}(u)] = \mathcal{E}^{(1)}(u) - \mathcal{E}^{(2)}(u)$.

Вважаємо, що функція h_0 є періодичною за змінною x_1 з періодом, що дорівнює одиниці, і, відповідно, невідомі функції $u^{(1)}(x,t)$, $u^{(2)}(x,t)$, $h(x_1,t)$, є також періодичними за змінною x_1 з періодом 1.

Підкреслимо, що початкові дані для переміщень знаходяться з крайової задачі (1.2) із заданою функцією h_0 у відповідних областях $\Pi_1(0)$ та $\Pi_2(0)$. Існування класичного розв'язку цієї задачі випливає з результатів робіт [17, 18].

2. Стаціонарний розв'язок. Заміна невідомих функцій

Безпосередньою підстановкою можна переконатися, що функції

$$u_{st}^{(i)} = (0, A_i(x_2 - h_{st}) + \mathrm{u}), \quad h_{st} = -H_2 + \frac{K}{\rho}\sigma_0(A_1/A_2 - 1),$$

є стаціонарним розв'язком задачі (1.2)–(1.3), де $A_i = -\sigma_0\frac{(1+\nu_i)(1-2\nu_i)}{(1-\nu_i)E_i}$, $i = 1,2$; $\mathrm{u} = \frac{K}{\rho}\sigma_0(A_1 - A_2)$. Цей розв'язок існує ($-H_2 < h_{st} < H_1$) за умов

$$A_1/A_2 > 1, \quad H_1 + H_2 > \frac{K}{\rho}\sigma_0(A_1/A_2 - 1).$$

Першу вимогу буде виконано, якщо, наприклад $E_2 > E_1$, $\nu_1 = \nu_2$, що узгоджується з одним із варіантів, розглянутих у [1]. Друга вимога означає, що загальна товщина $H_1 + H_2$ пружного шару має бути достатньо великою. Для зручності наведемо також відповідні значення компонент тензорів деформації та напружень

$$\begin{gathered}
\|\epsilon_{kl}^{(i)}(u_{st})\|_{k,\ l=1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_i \end{pmatrix}; \\
\|\sigma_{kl}^{(i)}(u_{st})\|_{k,\ l=1,2} = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma_0\nu_i}{1-\nu_i} & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad i = 1,2.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Далі шукаємо розв'язок (1.2), (1.3) у вигляді $u^{(i)}(x,t) = u^{(i)}_{st}(x,t) + v^{(i)}(x,t)$ при $x \in \Pi_i(t)$, $t \geq 0$, $(i = 1,2)$, $h(x_1,t) = h_{st} + r(x_1,t)$. Зазначимо, що функції $u^{(1)}_{st}$, $u^{(2)}_{st}$ є визначеними для всіх $x \in \Pi$. Для точок $\Gamma(t)$ маємо (див. (2.1))

$$\left[\mathcal{E}^{(i)}(u)\right] = [\mathcal{E}(u_{st})] - \sigma_0 \left[\frac{\nu}{1-\nu}\ \epsilon_{11}(v) + \epsilon_{22}(v)\right] + [\mathcal{E}(v)]\,,$$

де

$$\left[\frac{\nu}{1-\nu}\ \epsilon_{11}(v) + \epsilon_{22}(v)\right] \\ = \frac{\nu_1}{1-\nu_1}\epsilon^{(1)}_{11}(v) + \epsilon^{(1)}_{22}(v) - \left(\frac{\nu_2}{1-\nu_2}\epsilon^{(2)}_{11}(v) + \epsilon^{(2)}_{22}(v)\right).$$

Маємо також

$$[u_1] = [v_1]\,,\ [u_2] = [A]\,r + [v_2]\,,\ \text{де}\quad [A] = A_1 - A_2.$$

Враховуючи, що $n_{st} = (0,1)$, $n = \left(-\frac{h_{x_1}}{D_r}, \frac{1}{D_r}\right)$, $V_n = \frac{h_t}{D_r}$, де $D_r = \sqrt{1 + h^2_{x_1}}$, маємо

$$n_r = n - n_{st} = \Big(-\frac{h_{x_1}}{D_r}, -\frac{h^2_{x_1}}{D_r(1+D_r)}\Big).$$

Для нових невідомих функцій $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, r отримуємо наступні співвідношення:

$$\begin{gathered} \frac{1}{1-2\nu_i}\nabla \operatorname{div} v^{(i)} + \Delta v^{(i)} = 0, \quad x \in \Pi_i(t),\ t \geq 0,\ i = 1,2, \\ \sigma^{(1)}_{12}(v) = 0, \quad \sigma^{(1)}_{22}(v) = 0, \quad x \in \Sigma_1,\ t \geq 0, \\ v^{(2)} = 0, \quad x \in \Sigma_2,\ t \geq 0, \\ [v_1] = 0, \quad [v_2] + [A]\,r = 0, \quad x \in \Gamma(t),\ t \geq 0, \\ [\sigma_{i2}(v)] + [\sigma_{ij}(u_{st})n_{r.j}] + [\sigma_{ij}(v)n_{r.j}] = -\gamma\varkappa(n_{st.i} + n_{r.i}), \\ i = 1,2,\ x \in \Gamma(t),\ t \geq 0, \\ Lr_t = D_r\Big(v^{(1)}_2 + v^{(1)}_l n_{r.l} + A_1 r + (A_1 r + \mathrm{u})n_{r.2} \\ + \frac{K}{\rho}\Big(-\sigma_0\Big[\frac{\nu}{1-\nu}\ \epsilon_{11}(v) + \epsilon_{22}(v)\Big] + [\mathcal{E}(v)] + \gamma\rho\varkappa\Big)\Big), \\ x \in \Gamma(t),\ t \geq 0, \\ r(x_1,0) = r_0(x_1) \equiv h_0(x_1) - h_{st}, \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{gathered} \tag{2.2}$$

3. Перехід до зафіксованих областей

Нехай $\hat{\delta}$ додатна стала така, що $-H_2 < h_{st} - \hat{\delta} < h_{st} + \hat{\delta} < H_1$. Нехай $\chi(\lambda) \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ дорівнює одиниці при $|\lambda - h_{st}| < \hat{\delta}/2$ і нулю при $|\lambda - h_{st}| > 3\hat{\delta}/4$. Позначимо $c_\chi = |\chi|^{(3+\alpha)}_{([-H_2,H_1])}$.

Задача (1.2), (1.3) зводиться до задачі в зафіксованих межах за допомогою заміни $x = \theta(y,t)$, де $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2 + r(y_1,t)\chi(y_2)$. Якщо

$$\sup_{0\le t\le T} |r(x,\cdot)|^{(1)}_{\Gamma_0} \le \delta_H \equiv \min\left\{\frac{\hat{\delta}}{2}, \frac{1}{4c_\chi}\right\}, \tag{3.1}$$

то для кожного $t \ge 0$ функція $\theta(y,t)$ взаємно однозначно відображає $\Pi_1(t)$ і $\Pi_2(t)$, відповідно, на $\Omega^{(1)} = \{(y_1,y_2) : -h_{st} < y_2 < H_1\}$ і $\Omega^{(2)} = \{(y_1,y_2) : -H_2 < y_2 < h_{st}\}$, $\Gamma(t)$ — на $\Gamma_0 : y_2 = h_{st}$, а точки прямих Σ_1, Σ_2 залишаються нерухомими.

Позначимо $\hat{v}^{(i)} = v^{(i)} \circ \theta$, $\hat{\epsilon}^{(i)}_{kl}(\hat{v}) = \epsilon^{(i)}_{kl}(v) \circ \theta$, $\hat{\sigma}^{(i)}_{kl}(\hat{v}) = \sigma^{(i)}_{kl}(v) \circ \theta$, причому, згідно з (1.1), наприклад, $\epsilon^{(i)}_{kl}(\hat{v}) = \frac{1}{2}(\frac{\partial \hat{v}^{(i)}_k}{\partial y_l} + \frac{\partial \hat{v}^{(i)}_l}{\partial y_k})$. Матриця Якобі $J = \frac{\partial(y_1,y_2)}{\partial(x_1,x_2)}$ має вигляд:

$$J = I + J_r, \quad J_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{r_{y_1}\chi}{1+r\chi_{y_2}} & -\frac{r\chi_{y_2}}{1+r\chi_{y_2}} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

де I — одинична матриця. Зазначимо, що завдяки умові (3.1), матриця J є невиродженою. Для довільної функції $\hat{w}(y,t) = w(x,t)$ похідні за просторовими змінними обчислюються за правилом

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = J_{lk}\frac{\partial \hat{w}}{\partial y_l} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial y_k} + J_{r.lk}\frac{\partial \hat{w}}{\partial y_l}, \quad k = 1,2,$$

за аналогією

$$\hat{\epsilon}^{(i)}_{kl}(\hat{v}) = \epsilon^{(i)}_{kl}(\hat{v}) + \epsilon^{(i)}_{r.kl}(\hat{v}), \quad \hat{\sigma}^{(i)}_{kl}(\hat{v}) = \sigma^{(i)}_{kl}(\hat{v}) + \sigma^{(i)}_{r.kl}(\hat{v}). \tag{3.3}$$

Зауваження 3.1. Для подальшого розгляду є суттєвим той факт, що функції $\epsilon^{(i)}_{r.kl}(\hat{v})$, $\sigma^{(i)}_{r.kl}(\hat{v})$ є сумою виразів, що обов'язково містять добутки похідних $\hat{v}$ на похідну r_{y_1}, або ж на саму функцію r.

Щоби надати компактного вигляду системі (2.2) у нових змінних (y_1,y_2), позначимо

$$\begin{gathered} \mathcal{L}^{(i)}_{[r].k}\hat{v} = \frac{1}{1-2\nu_i} J_{lk}\frac{\partial}{\partial y_l}\left(J_{mn}\frac{\partial \hat{v}^{(i)}_n}{\partial y_m}\right) + J_{lm}\frac{\partial}{\partial y_l}\left(J_{nm}\frac{\partial \hat{v}^{(i)}_k}{\partial y_n}\right), \\ \mathcal{L}^{(i)}_{[r]}\hat{v} = \big(\mathcal{L}^{(i)}_{[r].1}\hat{v}, \mathcal{L}^{(i)}_{[r].2}\hat{v}\big). \end{gathered} \tag{3.4}$$

Зазначимо, що

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(i)}_{[0].k}\hat{v} &= \frac{1}{1-2\nu_i}\frac{\partial}{\partial y_k}\operatorname{div}\hat{v}^{(i)} + \Delta\hat{v}^{(i)}_k,\\ \mathcal{L}^{(i)}_{[0]}\hat{v} &= \frac{1}{1-2\nu_i}\nabla\operatorname{div}\hat{v}^{(i)} + \Delta\hat{v}^{(i)}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Оскільки $\varkappa = \frac{r_{y_1y_1}}{D_r^3}$, кривизну $\varkappa$ можна подати у вигляді

$$\varkappa = r_{y_1y_1} + \varkappa_r, \qquad \text{де } \varkappa_r = -\frac{r_{y_1y_1}r_{y_1}^2}{(1+D_r+D_r^2)D_r^3(1+D_r)}. \tag{3.6}$$

Якщо, після вказаної заміни аргументів і функцій, виділити лінійні відносно $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, r та їх похідних члени, то, враховуючи (3.2)–(3.6), задачу (2.2) можна переписати у вигляді

$$\begin{gathered}\mathcal{L}^{(i)}_{[0]}\hat{v} = \hat{f}^{(i)}(r,\hat{v}), \quad y\in\Omega^{(i)},\ t\ge 0,\ i=1,2,\\ \sigma^{(1)}_{12}(\hat{v}) = 0, \quad \sigma^{(1)}_{22}(\hat{v}) = 0, \quad y\in\Sigma_1,\ t\ge 0,\\ \hat{v}^{(2)} = 0, \quad y\in\Sigma_2,\ t\ge 0,\\ [\hat{v}_1] = 0\ \ [\hat{v}_2] + [A]\,r = 0, \quad y\in\Gamma_0,\ t\ge 0,\\ [\sigma_{12}(\hat{v})] + \sigma_0\Big[\frac{\nu}{1-\nu}\Big]r_{y_1} = \hat{\varphi}_1(r,\hat{v}), \quad y\in\Gamma_0,\ t\ge 0,\\ [\sigma_{22}(\hat{v})] + \gamma r_{y_1y_1} = \hat{\varphi}_2(r,\hat{v}), \quad y\in\Gamma_0,\ t\ge 0,\\ Lr_t - K\gamma r_{y_1y_1} + \frac{K}{\rho}\sigma_0\Big[\frac{\nu}{1-\nu}\epsilon_{11}(\hat{v}) + \epsilon_{22}(\hat{v})\Big]\\ \qquad -\hat{v}^{(1)}_2 - A_1 r = \hat{\varphi}_3(r,\hat{v}), \quad y\in\Gamma_0,\ t\ge 0,\\ r(y_1,0) = r_0(y_1),\ y_1\in R^1,\end{gathered} \tag{3.7}$$

де

$$\hat{f}^{(i)}(r,\hat{v}) = \mathcal{L}^{(i)}_{[0]}\hat{v} - \mathcal{L}^{(i)}_{[r]}\hat{v}, \quad i=1,2$$

$$\hat{\varphi}_1(r,\hat{v}) = -\left[\hat{\sigma}_{r.12}(\hat{v})\right] - \left[\sigma_{11}(u_{st})(n_{r.1}-r_{y_1})\right] - \left[\hat{\sigma}_{1j}(\hat{v})n_{r.j}\right] - \gamma\varkappa n_{r.1},$$

$$\hat{\varphi}_2(r,\hat{v}) = -\left[\hat{\sigma}_{r.22}(\hat{v})\right] - \left[\hat{\sigma}_{2j}(\hat{v})n_{r.j}\right] - \gamma r_{y_1y_1}n_{r.2} - \gamma\varkappa_r(1+n_{r.2}),$$

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_3(r,\hat{v}) = -\frac{r_{y_1}^2}{1+D_r}\Big(&\hat{v}^{(1)}_2 + A_2 r + \frac{K}{\rho}\Big(-\sigma_0\Big[\frac{\nu}{1-\nu}\ \epsilon_{11}(\hat{v}) + \epsilon_{22}(\hat{v})\Big]\\ &+ \gamma\rho r_{y_1y_1}\Big)\Big) + D_r\Big(\hat{v}^{(1)}_l n_{r.l} + (A_2 r + \mathrm{u})n_{r.2}\\ &+ \frac{K}{\rho}\Big(-\sigma_0\Big[\frac{\nu}{1-\nu}\ \hat{\epsilon}_{r.11}(\hat{v}) + \hat{\epsilon}_{r.22}(\hat{v})\Big] + \big[\hat{\mathcal{E}}(\hat{v})\big] + \gamma\rho\varkappa_r\Big)\Big),\end{aligned}$$

$$\hat{\mathcal{E}}(\hat{v}) = \frac{1}{2}\,\hat{\sigma}^{(i)}_{kl}(\hat{v})\,\hat{\epsilon}^{(i)}_{kl}(\hat{v}).$$

4. Основний результат. Лінійна задача

Зауваження 4.1. Надалі під Q розуміємо одну з наступних множин $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$, Γ_0, Σ_1, Σ_2.

Визначимо $C^{k+\alpha}(\overline{Q})$, $(k = 0, 1, \ldots;\ 0 \leq \alpha \leq 1)$, як простір функцій u, для яких є скінченною норма

$$|u|_{C^{k+\alpha}(Q)} \equiv |v|_Q^{(k+\alpha)} = |v|_Q^{(k)} + [v]_Q^{(k+\alpha)},$$

де

$$|v|_Q^{(k)} = |v|_Q^{(k)} = \sum_{|j| \leq k} \sup_{x,y \in Q} \left| D^j v \right|,$$

$$[v]_Q^{(k+\alpha)} = \sum_{|j|=k} \sup_{x,y \in Q} \frac{\left| D_x^j v(x) - D_y^j v(y) \right|}{|x-y|^\alpha}.$$

Простір функцій $v \in C^{k+\alpha}(\overline{Q})$, що є періодичними за змінною x_1 з періодом 1 позначимо через $C_1^{k+\alpha}(\overline{Q})$.

Для вектор-функції $v(x,t) = (v_1(x,t), v_2(x,t))$ позначимо

$$|v|_Q^{(k+\alpha)} = |v_1|_Q^{(k+\alpha)} + |v_2|_Q^{(k+\alpha)},$$

і, для скорочення запису, будемо говорити, що $v \in C^{k+\alpha}(\overline{Q})$, якщо $v_i \in C^{k+\alpha}(\overline{Q})$, $i = 1, 2$.

Будемо розглядати також звуження періодичних функцій на множині $Q(1) = Q \bigcap \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1\}$ та відповідно простори функцій $L_2(Q(1))$, $W_p^l(Q(1))$, означення яких можна знайти, наприклад, у розділі II роботи [14].

Якщо в області $\Omega^{(i)}$ задано функцію $v^{(i)}$, $i = 1, 2$, визначимо функцію $v(x,t)$ наступним чином $(t \in [0,T])$

$$v(x,t) = \begin{cases} v^{(1)}(x,t), & x \in \Omega^{(1)}, \\ v^{(2)}(x,t), & x \in \Omega^{(2)}. \end{cases}$$

В означеному сенсі будемо, наприклад, в (3.7) розуміти позначення $\hat{v}$, $\mathcal{L}_{[0]}\hat{v}$, $\hat{f}(r, \hat{v})$.

Якщо $v^{(i)} \in C([0,T]; C_1^{k+\alpha}(\overline{\Omega}^{(i)}))$, то будемо говорити, що $v \in C([0,T]; C_1^{k+\alpha}(\Pi))$ і

$$|v|^{(0,k+\alpha)}_{\Pi\times[0,T]} = \sup_{0\le\tau\le T} |v^{(1)}(\cdot,\tau)|^{(k+\alpha)}_{\Omega^{(1)}} + \sup_{0\le\tau\le T} |v^{(2)}(\cdot,\tau)|^{(k+\alpha)}_{\Omega^{(2)}}.$$

Якщо для набору функцій $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ кожна з функцій належить до $C([0,T]; C_1^{1+\alpha}(\Gamma_0))$, то для нас це означатиме, що $\Phi \in C([0,T]; C_1^{1+\alpha}(\Gamma_0))$ і

$$|\Phi|^{(0,1+\alpha)}_{\Gamma_0\times[0,T]} = \sum_{i=1}^{3} \sup_{0\le\tau\le t} |\Phi_i(\cdot,\tau)|^{(1+\alpha)}_{\Gamma_0}.$$

Для функцій $r \in C^1([0,T]; C_1^{(1+\alpha)}(\Gamma_0)) \bigcap C([0,T]; C_1^{(3+\alpha)}(\Gamma_0))$ позначимо

$$|r|^{(1,3+\alpha)}_{\Gamma_0\times[0,T]} = \sup_{0\le\tau\le T} |r_\tau(\cdot,\tau)|^{(1+\alpha)}_{\Gamma_0} + \sup_{0\le\tau\le T} |r(\cdot,\tau)|^{(3+\alpha)}_{\Gamma_0},$$

і для пар функцій (r, v) визначимо простір

$$\mathcal{W}_T = \big\{(r,v) : r \in C^1([0,T]; C_1^{(1+\alpha)}(\Gamma_0)) \bigcap C([0,T]; C_1^{(3+\alpha)}(\Gamma_0)),\\ v \in C([0,T]; C_1^{(2+\alpha)}(\Pi))\big\}$$

з нормою

$$\mathcal{N}_T\left[(r,v)\right] = |r|^{(1,3+\alpha)}_{\Gamma_0\times[0,T]} + |v|^{(0,2+\alpha)}_{\Pi\times[0,T]}.$$

Для функцій $F \in C([0,T]; C_1^{\alpha}(\Pi))$, $\Phi \in C([0,T]; C_1^{1+\alpha}(\Gamma_0))$ та $r_0 \in C_1^{3+\alpha}(\Gamma_0)$ введемо також позначення ($\tau \in [0,T]$):

$$\mathcal{F}_T\left[F, \Phi, r_0\right] = |F|^{(0,\alpha)}_{\Pi\times[0,T]} + |\Phi|^{(0,1+\alpha)}_{\Gamma_0\times[0,T]} + |r_0|^{3+\alpha}_{\Gamma_0}.$$

Зазначимо, що мають сенс також величини $\mathcal{N}_t\left[(r,v)\right]$ та $\mathcal{F}_t\left[F, \Phi, r_0\right]$ з очевидною заміною $[0,T]$ на $[0,t]$ у правих частинах відповідних означень.

Теорема 4.1 (основний результат). *Для довільного $T > 0$ можна вибрати таке $\delta_0 \in (0, \delta_H)$, що для довільної функції $r_0 : |r_0|^{3+\alpha}_{\Gamma_0} \le \delta_0$ існує єдиний розв'язок $(r, \hat{v}) \in \mathcal{W}_T$ задачі* (3.7).

Зауваження 4.2. Твердження даної теореми можна природно переформулювати в термінах задачі (1.2), (1.3) і вихідних функцій u, h.

Доведення теореми 4.1 засновано на використанні принципу стискувальних відображень та дослідженні відповідної лінійної задачі: знайти функції $U^{(1)}(x,t)$, $U^{(2)}(x,t)$, $s(x_1,t)$ за умовами

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{1-2\nu_i}\nabla \operatorname{div} U^{(i)} + \Delta U^{(i)} = F^{(i)}(x,t), \quad x\in\Omega_i,\ t\geq 0,\ i=1,2,\\
\sigma_{12}^{(1)}(U)=0, \quad \sigma_{22}^{(1)}(U)=0, \quad x\in\Sigma_1,\ t\geq 0,\\
U^{(2)}=0, \quad x\in\Sigma_2,\ t\geq 0,\\
[U_1]=0, \quad [U_2]+[A]\,s=0, \quad x\in\Gamma_0,\ t\geq 0,\\
[\sigma_{12}(U)]+\sigma_0\Big[\frac{\nu}{1-\nu}\Big]s_{y_1}=\Phi_1(x,t), \quad x\in\Gamma_0,\ t\geq 0,\\
[\sigma_{22}(U)]+\gamma s_{x_1x_1}=\Phi_2(x,t), \quad x\in\Gamma_0,\ t\geq 0,
\end{gathered} \tag{4.1}
$$

$$
\begin{gathered}
s_t - a_0 s_{x_1x_1} + a_1\Big[\frac{\nu}{1-\nu}\epsilon_{11}(U)+\epsilon_{22}(U)\Big] - U_2^{(1)} - a_2 s\\
= \Phi_3(x,t), \quad x\in\Gamma_0,\ t\geq 0,\\
s(x_1,0)=s_0(x_1), \quad x\in\Gamma_0.
\end{gathered} \tag{4.2}
$$

Теорема 4.2. *Нехай* $F\in C([0,T];C_1^{\alpha}(\Pi))$, $\Phi\in C([0,T];C_1^{1+\alpha}(\Gamma_0))$ *і* $r_0\in C_1^{3+\alpha}(\Gamma_0))$, *тоді існує єдиний розв'язок* $(s,U)\in\mathcal{W}_T$ *задачі* (4.1), (4.2) *такий, що*

$$
\mathcal{N}_T\left[(s,U)\right]\leq C(T)\mathcal{F}_T\left[F,\Phi,r_0\right]. \tag{4.3}
$$

5. Існування розв'язку лінійної задачі

Замість (4.2) розглянемо співвідношення

$$
\begin{gathered}
s_t - a_0 s_{x_1x_1} + \lambda\Big(a_1\Big[\frac{\nu}{1-\nu}\epsilon_{11}(U)+\epsilon_{22}(U)\Big] - U_2^{(1)} - a_2 s\Big)\\
= \Phi_3(x,t), \quad x\in\Gamma_0,\ t>0,\\
s(x_1,0)=s_0(x_1), \quad x\in\Gamma_0.
\end{gathered} \tag{5.1}
$$

і за допомогою теореми про продовження за параметром (див. теорему 1 роботи [15, с. 154]), доведемо існування розв'язку задачі (4.1), (5.1) при $\lambda=1$.

При $\lambda=0$ задача (4.1), (5.1), "розпадається" на дві задачі: задачу Коші

$$
\begin{gathered}
s_t - a_0 s_{x_1x_1} = \Phi_3(x,t), \quad x\in\Gamma_0,\ t>0,\\
s(x_1,0)=s_0(x_1), \quad x\in\Gamma_0.
\end{gathered} \tag{5.2}
$$

та змішану задачу (4.1) із вже відомою функцією s.

Існування єдиного розв'язку

$$
s\in C^1([0,T];C^{1+\alpha}(\Gamma_0))\cap C([0,T];C^{3+\alpha}(\Gamma_0))
$$

задачі (5.2) та оцінка

$$|s|^{(1,3+\alpha)}_{\Gamma_0\times[0,T]} \leq c_1|\Phi_3(\cdot,t)|^{(0,1+\alpha)}_{\Gamma_0\times[0,T]}. \tag{5.3}$$

випливають з теореми 5.1.4 роботи [16]. Зазначимо, що той самий результат можна одержати за допомогою методів теорії потенціалів. Існування класичного розв'язку задачі (4.1) з відомою функцією s для кожного значення $t \in [0,T]$ є наслідком результатів роботи [17] (див. також [18]). Єдиність цього розв'язку обумовлено крайовою умовою $U^{(2)} = 0$, на Σ_2 (див., наприклад, теорему 3.8 роботи [19, розділ I]).

Оскільки питання розв'язності задачі при $\lambda = 0$ вже з'ясовано, залишається отримати апріорну оцінку рівномірно відносно параметра λ.

Спочатку одержимо попередні оцінки максимумів $|U^{(i)}(\cdot,t)|^{(0)}_{\Omega_i}$, $(i = 1,2)$.

З теореми 2 роботи [17] випливає оцінка:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}|U^{(i)}(\cdot,t)|_{W_2^2(\Omega_i(1))} &\leq c_2\sum_{i=1}^{2}|F^{(i)}(\cdot,t)|_{L_2(\Omega_i(1))}\\ &+ c_3([A],\sigma_0)|s(\cdot,t)|_{W_2^{3/2}(\Gamma_0(1))}c_4(\gamma)|s(\cdot,t)|_{W_2^{5/2}(\Gamma_0(1))}\\ &+ c_5\sum_{i=1}^{2}|\Phi_i(\cdot,t)|_{W_2^{1/2}(\Gamma_0(1))}, \quad t\in[0,T]. \end{aligned}\tag{5.4}$$

Продовжуючи дану нерівність вліво за допомогою теореми вкладення (див. теорему 2.1 [14]) та "огрубляючи" її вправо (нагадаємо, що всі функції, що розглядаються, є періодичними за змінною x_1), маємо

$$\sum_{i=1}^{2}|U^{(i)}(\cdot,t)|^{(0)}_{\Omega_i} \leq c_6\left(\sum_{i=1}^{2}|F^{(i)}(\cdot,t)|^{(0)}_{\Omega_i} + \sum_{i=1}^{2}|\Phi_i(\cdot,t)|^{(1)}_{\Gamma_0}|s(\cdot,t)|^{(3)}_{\Gamma_0}\right), \quad t\in[0,T]. \tag{5.5}$$

Безпосередньо з рівняння (5.1) одержуємо

$$|s_t(\cdot,t)|^{(1)}_{\Gamma_0} \leq c_7\left(|s(\cdot,t)|^{(3)}_{\Gamma_0} + \sum_{i=1}^{2}|U^{(i)}(\cdot,t)|^{(2)}_{\Omega_i} + |\Phi_3(\cdot,t)|^{(1)}_{\Gamma_0}\right), \quad t\in[0,T]. \tag{5.6}$$

Далі перейдемо до оцінок констант Гельдера невідомих функцій, застосовуючи метод поточкових оцінок Шаудера, а також підхід, запропонований у роботі [20].

Нехай ξ — довільна точка області П. Позначимо через $B_\varrho(\xi)$ ($\varrho < \hat{\delta}_0$) коло радіуса ϱ з центром в точці ξ. Нехай $\zeta_\varrho(x)$ — нескінченно диференційовна функція така, що $\zeta_\varrho(x) = 1$ при $|x| < \varrho/4$, $\zeta_\varrho(x) = 0$ при $|x| > \varrho$. Всюди далі у даній частині замість $\zeta_\varrho(x)$ будемо писати $\zeta(x)$. Безпосередніми обчисленнями перевіримо, що функції $W(x,t)^{(i)} = \zeta(x)U^{(i)}(x,t)$, $i = 1, 2$, $S(x_1,t) = \zeta(x_1,0)s(x,t)$ задовольняють співвідношенням:

$$\frac{1}{1-2\nu_i}\nabla \operatorname{div} W^{(i)} + \Delta W^{(i)} = G^{(i)}(x,t), \quad x \in \Omega_T^{(i)},\ i = 1, 2, \tag{5.7}$$

$$\sigma_{i2}^{(1)}(W) = 0, \quad x \in \Sigma_T^{(1)},\ t > 0,\ i = 1, 2, \tag{5.8}$$

$$W^{(2)} = 0, \quad x \in \Sigma_T^{(2)}, \tag{5.9}$$

$$\begin{gathered} [W_1] = 0, \quad [W_2] = \Upsilon, \\ [\sigma_{12}(W)] = \Psi_1, \quad [\sigma_{22}(W)] + \gamma S_{x_1x_1} = \Psi_2, \quad x \in \Gamma_T, \end{gathered} \tag{5.10}$$

$$\begin{gathered} S_t = a_0 S_{x_1x_1} - \lambda a_1\Big[\frac{\nu}{1-\nu}\,\epsilon_{11}(W) + \epsilon_{22}(W)\Big] + \Psi_3(x_1,t), \\ \hfill x \in \Gamma_T, \\ S(x_1,0) = S_0(x_1), \quad x \in \Gamma, \end{gathered} \tag{5.11}$$

де

$$G^{(i)} = \zeta F^{(i)} + \frac{1}{1-2\nu_i}\big(\nabla(\nabla\zeta)\cdot U^{(i)} + \nabla\zeta \operatorname{div} U^{(i)}\big) + 2\nabla\zeta\nabla U^{(i)} + \Delta\zeta U^{(i)},$$

$$\Upsilon = -[A]\zeta s,$$

$$\Psi_1 = \zeta\Phi_1 + \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}\big(U_2^{(1)}\zeta_{x_1} + U_1^{(1)}\zeta_{x_2}\big) - \frac{E_2}{2(1+\nu_2)}\big(U_2^{(2)}\zeta_{x_1} + U_1^{(2)}\zeta_{x_2}\big) + \sigma_0\Big[\frac{\nu}{1-\nu}\Big]s_{x_1}\zeta,$$

$$\Psi_2 = \zeta\Phi_2 + \frac{E_1}{1+\nu_1}\Big(U_2^{(1)}\zeta_{x_2} + \frac{\nu_1}{1-2\nu_1}(U^{(1)}\cdot\nabla\zeta)\Big) - \frac{E_2}{1+\nu_2}\Big(U_2^{(2)}\zeta_{x_2} + \frac{\nu_2}{1-2\nu_2}(U^{(2)}\cdot\nabla\zeta)\Big) + \gamma(2s_{x_1}\zeta_{x_1} + s\zeta_{x_1x_1}),$$

$$\Psi_3 = \zeta\Phi_3 + a_0(2\zeta_{x_1}s_{x_1} + \zeta_{x_1x_1}s) - \lambda\Big(a_1\Big[\frac{\nu}{1-\nu}U_2\zeta_{x_2} + v_1\zeta_{x_1}\Big] + U_2^{(1)}\zeta + a_2 s\zeta\Big),$$

$$S_0 = \zeta s_0. \tag{5.12}$$

Згідно з методом Шаудера, необхідно розглянути сукупність модельних задач, основна з яких, що відображає сутність розглядуваної задачі, полягає ось в чому.

Нехай $D^{(1)} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$, $D^{(2)} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0\}$, $\mathbb{R}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$, треба відшукати функції $w^{(1)}$, $w^{(2)}$, p за умовами

$$\begin{gathered}
\frac{1}{1-2\nu_i}\nabla \operatorname{div} w^{(i)} + \Delta w^{(i)} = f^{(i)}(x,t), \\
x \in D^{(i)},\ t \in [0,T],\ i = 1,2, \\
[w_1] = \phi_1, \quad [w_2] = \phi_2, \quad x \in \mathbb{R}_1,\ t \in [0,T], \\
[\sigma_{12}(w)] = \psi_1, \quad [\sigma_{22}(w)] = -\gamma p_{x_1x_1} + \psi_2, \quad x \in \mathbb{R}_1,\ t \in [0,T], \\
w \to 0, \quad \text{при } |x| \to \infty, \\
p_t = a_0 p_{x_1x_1} - \lambda a_1\Big[\frac{\nu}{1-\nu}\epsilon_{11}(w) + \epsilon_{22}(w)\Big] + \psi_3(x_1,t), \\
x \in \mathbb{R}_1,\ t \in [0,T], \\
p(x_1,0) = p_0(x_1), \qquad x_1 \in \mathbb{R}_1.
\end{gathered} \tag{5.13}$$

Зазначимо, що для переходу від (5.7), (5.10), (5.11) до (5.13) потрібне додаткове перенесення площини $x \to (x-\xi)$.

Лема 5.1. *Нехай $f^i \in C([0,T]; C^\alpha(D^{(i)}))$, $\varphi_i \in C([0,T]; C^{2+\alpha}(\mathbb{R}_1))$, $(i = 1,2)$, $\psi_j \in C([0,T]; C^{1+\alpha}(\mathbb{R}_1))$, $(j = 1,2,3)$, $p_0 \in C^{3+\alpha}(\mathbb{R}_1)$, тоді існує єдиний розв'язок (p,w) задачі (5.13) такий, що*

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2} \sup_{0\le t\le T} [w^{(i)}(\cdot,t)]^{(2+\alpha)}_{D^{(i)}} + \sup_{0\le t\le T} [p_t(\cdot,t)]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^1} + \sup_{0\le t\le T} [p(\cdot,t)]^{(3+\alpha)}_{\mathbb{R}^1} \\
&\quad \le C(T)\Bigg(\sum_{i=1}^{2} \sup_{0\le t\le T} [f^{(i)}(\cdot,t)]^{(\alpha)}_{D^{(i)}} + \sum_{i=1}^{2} \sup_{0\le t\le T} [\phi_i(\cdot,t)]^{(2+\alpha)}_{\mathbb{R}_1} \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{3} \sup_{0\le t\le T} [\psi_i(\cdot,t)]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}_1} + [p_0]^{(3+\alpha)}_{\mathbb{R}_1}\Bigg).
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Дану лему доведено в наступному параграфі.

Позначимо через $\mathcal{M}_t\,[W,S]$ суму старших півнорм

$$\sum_{i=1}^{2} \sup_{0\le\tau\le t} \left[W^{(i)}(\cdot,\tau)\right]^{(2+\alpha)}_{D^{(i)}} + \sup_{0\le\tau\le t} [S(\cdot,\tau)]^{(3+\alpha)}_{\mathbb{R}^1} + \sup_{0\le\tau\le t} [S_\tau(\cdot,\tau)]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^1}.$$

Враховуючи оцінку (5.14), маємо

$$\mathcal{M}_t\,[W,S] \le C(T)\Bigg(\sum_{i=1}^{2}\sup_{0\le\tau\le t}\big[G^{(i)}(\cdot,\tau)\big]^{(2+\alpha)}_{D^{(i)}} + \sup_{0\le\tau\le t}\left[\Upsilon(\cdot,\tau)\right]^{(2+\alpha)}_{\Gamma_0}$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\sup_{0\le\tau\le t}\left[\Psi_i(\cdot,\tau)\right]^{(1+\alpha)}_{\Gamma_0} + \left[S_0\right]^{(3+\alpha)}_{\Gamma_0}\Bigg).$$

У свою чергу, використовуючи представлення (5.12) функцій $G^{(i)}$, $(i=1,2)$, Υ, Ψ_j $(j=1,3)$, продовжимо останню нерівність наступним чином

$$\mathcal{M}_t\,[W,S] \le c_8(T)\Bigg(\sum_{i=1}^{2}\sup_{0\le\tau\le t}\big[F^{(i)}(\cdot,\tau)\big]^{(2+\alpha)}_{D^{(i)}}$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\sup_{0\le\tau\le t}\left[\Phi_i(\cdot,\tau)\right]^{(1+\alpha)}_{\Gamma_0}+\sum_{i=1}^{2}\sup_{0\le\tau\le t}\big|U^{(i)}(\cdot,\tau)\big|^{(2)}_{\Omega^{(i)}}+\sup_{0\le\tau\le t}\left|s(\cdot,\tau)\right|^{(3)}_{\mathbb{R}^1}\Bigg).$$

Завдяки результатам роботи [21] можна одержати оцінки, аналогічні (5.14), у випадку, коли $\xi\notin\Gamma_0$, тобто для розв'язків модельних задач для системи теорії пружності у півплощині з граничною умовою (5.8) або (5.9). Поєднуючи ці оцінки, маємо

$$\mathcal{M}_t\,[U,s] \le c_9(T)(\mathcal{F}_t\,[F,\Phi,s_0]$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\sup_{0\le\tau\le t}\big|U^{(i)}(\cdot,\tau)\big|^{(2)}_{\Omega^{(i)}}+\sup_{0\le\tau\le t}\left|s(\cdot,\tau)\right|^{(3)}_{\mathbb{R}^1}).$$

Звідси отримуємо

$$\mathcal{N}_t\,[U,s] \le c_{10}(T)(\mathcal{F}_t\,[F,\Phi,s_0]+\sum_{i=1}^{2}\sup_{0\le\tau\le t}\big|U^{(i)}(\cdot,\tau)\big|^{(2)}_{\Omega^{(i)}}$$
$$+\sup_{0\le\tau\le t}\left|s(\cdot,\tau)\right|^{(3)}_{\mathbb{R}^1}+\sup_{0\le\tau\le t}\left|s_\tau(\cdot,\tau)\right|^{(1)}_{\mathbb{R}^1}).$$

Далі, завдяки (5.6),

$$\mathcal{N}_t\,[U,s] \le c_{11}(T)(\mathcal{F}_t\,[F,\Phi,s_0]$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\sup_{0\le\tau\le t}\big|U^{(i)}(\cdot,\tau)\big|^{(2)}_{\Omega^{(i)}}+\sup_{0\le\tau\le t}\left|s(\cdot,\tau)\right|^{(3)}_{\mathbb{R}^1}).$$

Інтерполяційна нерівність (див. лему 3.2 монографії [14])

$$\big|U^{(i)}\big|^{(2)}_{\Omega^{(i)}(1)} \le \varepsilon\big|U^{(i)}\big|^{(2+\alpha)}_{\Omega^{(i)}(1)} + c_\varepsilon\big|U^{(i)}\big|^{(0)}_{\Omega^{(i)}(1)}, \quad i=1,2.$$

і оцінка (5.5) дозволяють перейти до нерівності

$$\mathcal{N}_t\,[U,s] \le c_{12}(T)(\mathcal{F}_t\,[F,\Phi,s_0] + \sup_{0\le\tau\le t}|s(\cdot,\tau)|^{(3)}_{\mathbb{R}^1}). \tag{5.15}$$

На підставі вже згадуваної інтерполяційної нерівності

$$|s|^{(3)}_{\mathcal{R}^1(1)} \le \varepsilon|s|^{(3+\alpha)}_{\mathcal{R}^1(1)} + c_\varepsilon|s|^{(0)}_{\mathcal{R}^1(1)}, \quad i=1,2,$$

з (5.15) випливає нерівність

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_t\,[U,s] &\le c_{13}(T)(\mathcal{F}_t\,[F,\Phi,s_0] + \sup_{0\le\tau\le t}|s(\cdot,\tau)|^{(0)}_{\mathbb{R}^1}\\ &\le c_{14}(T)(\mathcal{F}_t\,[F,\Phi,s_0] + |s_0|^{(0)}_{\mathcal{R}^1} + \int_0^t \mathcal{N}_\tau\,[U,s]\,d\tau)),\end{aligned}$$

до якої застосовуємо лему Гронуолла і отримуємо оцінку (4.3).

6. Основна модельна задача

При розгляді основної модельної задачі (5.13), використовуючи результати робіт [17, 18], можна обмежитися випадком $f^{(i)} = 0$, $\psi_i = 0$, $\phi_i = 0$, $i = 1,2$. За допомогою перетворення Фур'є відносно змінної x_1, одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{i\xi}{1-2\nu_k}\Big(i\xi\widetilde{w}_1^{(k)} + \frac{d\widetilde{w}_2^{(k)}}{dx_2}\Big) + \frac{d^2\widetilde{w}_1^{(k)}}{dx_2^2} - \xi^2\widetilde{w}_k^{(k)} = 0,\\ \frac{1}{1-2\nu_k}\frac{d}{dx_2}\Big(i\xi\widetilde{w}_1^{(k)} + \frac{d\widetilde{w}_2^{(k)}}{dx_2}\Big) + \frac{d^2\widetilde{w}_2^{(k)}}{dx_2^2} - \xi^2\widetilde{w}_2^{(k)} = 0,\end{aligned} \tag{6.1}$$

де $k=1$ при $x_2>0$ і $k=2$ при $x_2<0$, з граничними умовами

$$\widetilde{w} \to 0, \text{ при } |x| \to \infty, \tag{6.2}$$

$$\begin{aligned}&[\widetilde{w}_1] = 0, \quad [\widetilde{w}_2] = 0,\\ &\frac{1}{2}\Big[\frac{E_k}{1+\nu_k}\Big(i\xi\widetilde{w}_2^{(k)} + \frac{d\widetilde{w}_1^{(k)}}{dx_2}\Big)\Big]_{k=2}^{k=1} = 0, \quad x_2 = 0,\\ &\Big[\frac{E_k}{1+\nu_k}\Big(\frac{d\widetilde{w}_2^{(k)}}{dx_2} + \frac{\nu}{1-2\nu_k}\Big(i\xi\widetilde{w}_1^{(k)} + \frac{d\widetilde{w}_2^{(k)}}{dx_2}\Big)\Big)\Big]_{k=2}^{k=1} = \gamma\xi^2\widetilde{p},\end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\widetilde{p}_t = -a_0\xi^2\widetilde{p} - \lambda a_1\left[\frac{\nu_k}{1+\nu_k} i\xi \widetilde{w}_1^{(k)} + \frac{d\widetilde{w}_2^{(k)}}{dx_2}\right]_{k=2}^{k=1} + \widetilde{\psi}_3, \quad x_2 = 0, \tag{6.4}$$
$$\widetilde{p}(\xi,0) = \widetilde{p}(\xi,0) = \widetilde{p}_0(\xi).$$

де знаком $\sim$ зверху помічено образ відповідної функції при перетворенні Фур'є. Спочатку розглянемо задачу (6.1)–(6.3) за припущенням, що невідому функцію $\widetilde{p}$ вже знайдено, а потім підставимо функцію $\widetilde{w}$ в (6.4) і, таким чином, знайдемо $\widetilde{p}$.

Загальний розв'язок системи (6.1), що задовольняє умову (6.2), має вигляд

$$\begin{aligned} \widetilde{w}_1^{(1)} &= i\xi\Big(-\frac{z_1}{|\xi|} - z_2x_2 + (3-4\nu_1)\frac{z_2}{|\xi|}\Big)e^{-|\xi|x_2}, \\ \widetilde{w}_2^{(1)} &= (z_1 + z_2|\xi|x_2)\,e^{-|\xi|x_2}, \quad x_2 > 0, \\ \widetilde{w}_1^{(2)} &= i\xi\Big(\frac{z_3}{|\xi|} - z_4x_2 - (3-4\nu_2)\frac{z_4}{|\xi|}\Big)e^{|\xi|x_2}, \\ \widetilde{w}_2^{(2)} &= (z_3 - z_4|\xi|x_2)\,e^{|\xi|x_2}, \quad x_2 < 0, \end{aligned} \tag{6.5}$$

де z_1, z_2, z_3, z_4 — невідомі сталі.

Якщо підставити (6.5) в умови (6.3), тоді отримуємо систему:

$$\mathcal{R}z = \mathcal{B},$$

де

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} -1 & 3-4\nu_1 & -1 & 3-4\nu_2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{E_1}{2(1+\nu_1)} & -\frac{E_1(1-\nu_1)}{1+\nu_1} & -\frac{E_2}{2(1+\nu_2)} & \frac{E_2(1-\nu_2)}{1+\nu_2} \\ -\frac{E_1}{1+\nu_1} & \frac{E_1(1-2\nu_1)}{1+\nu_1} & -\frac{E_2}{1+\nu_2} & \frac{E_2(1-2\nu_2)}{1+\nu_2} \end{pmatrix};$$
$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}; \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma|\xi|\widetilde{p} \end{pmatrix}.$$

Позначимо $\alpha_1 = \frac{E_1}{1+\nu_1}$, $\alpha_2 = \frac{E_2}{1+\nu_2}$. Маємо

$$\det\mathcal{R} = -\frac{1}{2}(\alpha_2(3-4\nu_1)+\alpha_1)(\alpha_1(3-4\nu_2)+\alpha_2) \neq 0.$$

Розв'язуючи систему ($z = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}$), знаходимо

$$\begin{aligned} z_1 = z_3 &= (\alpha_2(1-\nu_2)(3-4\nu_1) + \alpha_1(1-\nu_1)(3-4\nu_2))\frac{\gamma}{\det\mathcal{R}}|\xi|\widetilde{p}, \\ z_2 &= (\alpha_1(3-4\nu_2)+\alpha_2)\frac{\gamma}{2\det\mathcal{R}}|\xi|\widetilde{p}, \\ z_4 &= (\alpha_2(3-4\nu_1)+\alpha_1)\frac{\gamma}{2\det\mathcal{R}}|\xi|\widetilde{p}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Для зручності, спочатку обчислимо другий вираз у правій частині рівняння (6.4) з урахуванням (6.5) та (6.6):

$$a_1\left[\frac{\nu_k}{1+\nu_k} i\xi \widetilde{w}_1^{(k)} + \frac{d\widetilde{w}_2^{(k)}}{dx_2}\right]_{k=2}^{k=1}\Bigg|_{x_2=0} = a_1|\xi|\Big(\frac{1-2\nu_1}{1-\nu_1}((1-2\nu_1)z_2 - z_1) - \frac{1-2\nu_2}{1-\nu_2}(z_3-(1-2\nu_2)z_4)\Big) = a_*|\xi|^2\widetilde{p},$$

де

$$a_* = \frac{\gamma(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)a_1}{(\alpha_2(3-4\nu_1)+\alpha_1)(\alpha_1(3-4\nu_2)+\alpha_2)(1-\nu_1)(1-\nu_2)},$$

$$\beta_1 = (1-2\nu_1)(3-4\nu_2)(1-2\nu_2) + 4(1-2\nu_2)(1-\nu_2)(1-\nu_1)^2 + (1-2\nu_2)^2(1-2\nu_1)(1-\nu_1),$$

$$\beta_2 = (1-2\nu_2)(3-4\nu_1)(1-2\nu_1) + 4(1-2\nu_1)(1-\nu_1)(1-\nu_2)^2 + (1-2\nu_1)^2(1-2\nu_2)(1-\nu_2).$$

Важливо, що $a_* > 0$. Таким чином, задача (6.4) набуває вигляду:

$$\widetilde{p}_t = -(a_0+\lambda a_*)\xi^2\widetilde{p} + \widetilde{\psi}_3, \quad p(\xi,0) = \widetilde{p}_0(\xi).$$

Звідси

$$p(x_1,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x_1-y_1,t)p_0(y_1,\tau)\,dy_1 + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(x_1-y_1,t-\tau)\psi_3(y_1,\tau)\,dy_1,$$

де $\mathcal{G}(x_1,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t a_\lambda}}\exp\big(-\frac{x_1^2}{4a_\lambda t}\big)$, $a_\lambda = a_0 + \lambda a_*$, тобто можна вважати, що функція $p(x_1,t)$ є розв'язком задачі Коші

$$p_t - a_\lambda p_{x_1x_1} = \psi_3(x,t), \quad x\in\Gamma_0,\ t>0,$$
$$p(x_1,0) = p_0(x_1), \quad x\in\mathbb{R}^1.$$

Оскільки $a_0 \le a_0+\lambda a_* \le a_0+a_*$, знову використовуючи теорему 5.1.4 роботи [16], маємо

$$\sup_{0\le\tau\le T}[p_\tau(\cdot,\tau)]^{(1+\alpha)}_{\mathbb{R}^1} + \sup_{0\le\tau\le T}[p(\cdot,\tau)]^{(3+\alpha)}_{\mathbb{R}^1} \le C \sup_{0<\tau<T}[\psi_3(\cdot,\tau)]^{(1+\alpha)}_{\Gamma_0}. \quad (6.7)$$

Робота [17] гарантує оцінку

$$\sum_{i=1}^{2}[w^{(i)}(\cdot,\tau)]^{(2+\alpha)}_{D^{(i)}} \le C\,[p(\cdot,t)]^{(3+\alpha)}_{\mathbb{R}_1}, \qquad \text{для всіх } t\in[0,T]. \quad (6.8)$$

З оцінок (6.7), (6.8) випливає (5.14).

Для доведення єдиності розв'язку задачі можна використати метод, запропонований у роботі [20]. Нехай w^1_*, w^2_*, p_* — ненульовий розв'язок однорідної задачі (5.13) з нульовою початковою умовою ($p_0(x_1)=0$). Помножимо співвідношення (5.13) на функцію $\zeta_N(x)$. Далі усі члени, що містять похідні $\zeta_N(x)$ перенесемо у праві частини, які тепер мають компактні носії. Отже, для функцій $w^{(1)}_*\zeta_N(x)$, $w^{(2)}_*\zeta_N(x)$, $p_*\zeta_N(x)$ можна застосувати оцінку (5.14). Якщо N прямує до нескінченності, то $w^{(1)}_*\zeta_N$, $w^{(2)}_*\zeta_N$, $p_*\zeta_N$ наближаються до $w^{(1)}_*$, $w^{(2)}_*$, p_*, і, як легко переконатися, у свою чергу відповідні норми правих частин наближаються до нуля, тому $w^{(1)}_*=0$, $w^{(2)}_*=0$, $p_*=0$.

7. Доведення теореми 4.1

Позначимо

$$\mathcal{A}(r,\hat v) = \Big[\mathcal{L}_{[0]}\hat v,\ \sigma^{(1)}_{12}(\hat v)\big|_{\Sigma_1},\ \sigma^{(1)}_{12}(\hat v)_{\Sigma_1},\ \widetilde{v}^{(2)}_{\Sigma_2},\ [\hat v_1]\big|_{\Gamma_0},\ ([\hat v_2]+[A]r)\big|_{\Gamma_0},$$
$$\Big([\sigma_{12}](\hat v)-\sigma_0\Big[\frac{\nu}{1-\nu}\Big]r_{y_1}\Big)\Big|_{\Gamma_0},\ ([\sigma_{22}]+\gamma r_{y_1y_1})\big|_{\Gamma_0},$$
$$\Big(Lr_t - K\gamma r_{y_1y_1} + \frac{K}{\rho}\sigma_0\Big[\frac{\nu}{1-\nu}\epsilon_{11}(\hat v)+\epsilon_{22}(\hat v)\Big] - \hat v^{(1)}_2 - A_2 r\Big)|_{\Gamma_0},\ r|_{t=0}\Big],$$

$$\mathcal{G}(r,\hat v) = [\hat f(r,\hat v),0,0,0,0,0,\hat\phi_1(r,\hat v),\hat\phi_2(r,\hat v),\hat\phi_3(r,\hat v),0],$$

$$\mathcal{H} = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,r_0],$$

тобто через $\mathcal{A}(r,\hat v)$ і $\mathcal{G}(r,\hat v)$ позначено відповідно ліві і праві частини співвідношень (3.7). Таким чином, в операторній формі дана задача набуває вигляду

$$\mathcal{A}(r,\hat v) = \mathcal{G}(r,\hat v)+\mathcal{H}. \quad (7.1)$$

Із розв'язності задачі (4.1), (4.2) випливає, що у оператора $\mathcal{A}$ існує обмежений оператор $\mathcal{A}^{-1}$. Застосовуючи його до обох частин (7.1), приходимо до рівняння

$$(r,\hat{v}) = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{G}(r,\hat{v}) + \mathcal{H}) = \mathcal{Y}_{r_0}(r,\hat{v}).$$

Покажемо, що для достатньо малих $\delta_0 \in (0,\delta_H)$ і довільної початкової функції $r_0 \in C_1^{3+\alpha}(\Gamma_0)$ такої, що $|r_0|_{\Gamma_0}^{(3+\alpha)} \le \delta_0$ оператор $\mathcal{Y}_{r_0}$ є стиском і відображає кулю

$$B(0,\delta) = \{(r,\hat{v}) : |(r,\hat{v})|_{\mathcal{W}_T} \le \delta\}$$

достатньо малого радіуса δ в себе.

Нелінійні члени $\hat{f}(r,\hat{v})$, $\hat{\phi}(r,\hat{v})$ містять множники r, r_{y_1} або $r_{y_1y_1}$ і лінійні відносно функцій $\hat{v}$ і r та їх похідних. Застосовуючи формулу скінченних різниць та очевидну нерівність

$$|uv|_Q^{(\alpha)} \le |u|_Q^{(\alpha)}|v|_Q^{(0)} + |u|_Q^{(0)}|v|_Q^{(\alpha)}$$

для довільних функцій u і v та відповідної області Q (див. зауваження 3.1, 4.1), отримуємо наступну лему.

Лема 7.1. *Нехай $\delta \in (0,\delta_H)$, тоді існують сталі C_1, C_2, які залежать від T, δ_H такі, що для довільних елементів $(r,\hat{v})$, $(r',\hat{v}')$ простору $\mathcal{W}_T : |(r,\hat{v})|_{\mathcal{W}_T} \le \delta$, $|(r',\hat{v}')|_{\mathcal{W}_T} \le \delta$ виконуються нерівності:*

$$|\hat{f}(r,\hat{v})|_{\Pi\times[0,T]}^{(0,\alpha)} + \sum_{j=1}^{3} |\hat{\phi}(r,\hat{v})|_{\Gamma_0\times[0,T]}^{(0,1+\alpha)} \le C_1(|(r,\hat{v})|_{\mathcal{W}_T})^2, \tag{7.2}$$

$$|\hat{f}(r,\hat{v}) - \hat{f}(r',\hat{v}')|_{\Pi\times[0,T]}^{(0,\alpha)} + \sum_{j=1}^{3} |\hat{\phi}_j(r,\hat{v}) - \hat{\phi}_j(r',\hat{v}')|_{\Gamma_0\times[0,T]}^{(0,1+\alpha)} \le C_2\delta|(r-r',\hat{v}-\hat{v}')|_{\mathcal{W}_T}. \tag{7.3}$$

Лема 7.2. *Справедливі оцінки*

$$|\mathcal{Y}_{r_0}(r,\hat{v})|_{\mathcal{W}_T} \le C_3(T,\delta_H)\big((|(r,\hat{v})|_{\mathcal{W}_T})^2 + |r_0|_{\Gamma_0}^{(3+\alpha)}\big), \tag{7.4}$$

$$|\mathcal{Y}_{r_0}(r,\hat{v}) - \mathcal{F}_{r_0}(r',\hat{v}')|_{\mathcal{W}_T} \le C_4(T,\delta_H)\delta|(r-r',\hat{v}-\hat{v}')|_{\mathcal{W}_T}. \tag{7.5}$$

Дана лема є безпосереднім наслідком леми 7.1 та оцінки (4.3).

Отже, оператор $\mathcal{Y}_{r_0}(r, \hat{v})$ є стиском, якщо

$$\delta \leq \frac{1}{2C_4}, \tag{7.6}$$

і відображає кулю $B(0, \delta)$ в себе, насамперед, якщо

$$\delta_0 < \delta, \tag{7.7}$$

а також за умови

$$C_3(\delta^2 + \delta_0) \leq \delta.$$

Остання нерівність виконується, якщо, наприклад, маємо

$$\delta \leq \frac{1}{4C_3} \quad \text{та} \quad \delta_0 \leq \frac{\delta}{4C_3}. \tag{7.8}$$

Покажемо тепер, що сукупність умов (7.6)–(7.8) є сумісною. Спочатку виберемо $\delta \in (0, \delta_H)$ за умовою (7.6), та першою умовою (7.8):

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{4C_4}, \frac{1}{8C_3}, \frac{\delta_H}{2}\right\},$$

а потім δ_0, що задовольняє умовам (7.7) та другій умові (7.8):

$$\delta_0 = \frac{1}{2\max\{4C_3, 1\}} \min\left\{\frac{1}{4C_4}, \frac{1}{8C_3}, \frac{\delta_H}{2}\right\}.$$

Література

[1] L. Angheluta, E. Jettestuen, J. Mathiesen, *The thermodynamics and roughening of solid-solid interfaces* // Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics, **79** (2009), 7–25.

[2] В. Н. Гусаков, С. П. Дегтярев, *Существование гладкого решения в одной задаче фильтрации* // Укр. матем. журнал, 41 (1989), No. 9, 1192–1198.

[3] Б. В. Базалий, *Задача Стефана для уравнения Лапласа с учетом кривизны свободной границы* // Укр. матем. журнал, **49** (1997), No. 10, 1299–1315.

[4] Е. Фролова, *Квазистационарное приближение для задачи Стефана* // Проблемы мат. анализа, **31** (2005), 167–179.

[5] S. N. Antontsev, C. R. Gonçalves, and A. M. Meirmanov *Exact estimates for the classical solutions to the free boundary problem in the Hele-Shaw cell* // Adv. Diff. Eq., **8** (2003), No. 10, 1259-1280.

[6] B. V. Bazaliy, N. Vasylyeva, *The transmission problem in domains with a corner point for the Laplace operator in weighted Holder spaces* // J. Differ. Equations, **249** (2010), No. 10, 2476–2499.

[7] A. Friedman, F. Reitich, *Quasi-static motion of a capillary drop, I: the two-dimensional case* // Journal of Differential Equations, **178** (2002), 212–263.

[8] M. Gunther, G. Prokert, *On Stokes flow with variable and degenerate surface tension coefficient.* // Nonlinear Differ. Equ. Appl., **12** (2005), No. 1, 21–60.

[9] A. Friedman, Bei Hu, J.J.L. Velazquez, *The evolution of stress intensity factors and the propagation of cracks in elastic media* // Arch. Ration. Mech. Anal., **152** (2000), No. 2, 103–139.

[10] B. Ja Jin *Estimates of the solutions of the elastic system in a moving domain with free upper interface* // Nonlinear Analysis, **51** (2002), 1009—1029.

[11] K. Thornton, J. Agren, P. W. Voorhees, *Modelling the evolution of phase boundaries in solids at the meso- and nano-scales* // Acta Materialia, **51** (2002), 5675–5710.

[12] J. W. Barrett, H. Garcke, R. Nürnberg, *Finite element approximation of a phase field model for surface diffusion of void in a stressed solid* // Mathematics of Computation, **75** (2005), 7–41.

[13] M. Siegel, M. J. Miksis, P. W. Voorhees, *Evolution of material voids for highly anisotropic surface energy* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **52** (2004), 1319–1353.

[14] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Москва: Наука, 1967.

[15] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Москва: Наука, 1980.

[16] A. Lunardi, *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*, Birkhäuser, 1995.

[17] З. Г. Шефтель, *Общая теория граничных задач для эллиптических систем с разрывными коэффициентами* // Укр. матем. журнал, **18** (1966), No. 3, 132–136.

[18] З. Г. Шефтель, *Эллиптические неравенства и общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами* // Сиб. матем. журнал, **VI** (1965), No. 3, 636–668.

[19] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев, *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*, Москва: Издательство МГУ, 1990.

[20] В. А. Солонников, *Оценки решения второй начально-краевой задачи для системы Стокса в пространствах функций с непрерывными по Гельдеру производными по пространственных переменных* // Записки ПОМИ, **259** (1999), 254–279.

[21] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary condition, II* // Comm. Pure Apll. Math., **17** (1964), 35–92.

Відомості про авторів

Микола Валерійович Краснощок

Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
вул. Р. Люксембург, 74
83114, Донецьк
Україна
E-Mail: `krasnoschok@iamm.ac.donetsk.ua`