Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 4, 513 – 536

К теории вариационного метода для уравнений Бельтрами

Владимир Я. Гутлянский, Татьяна В. Ломако, Владимир И. Рязанов

Аннотация. Построены вариационные формулы в классах регулярных решений вырожденного уравнения Бельтрами с ограничениями интегрального и теоретико-множественного типа на комплексный коэффициент. На этой основе, для широкого круга дифференцируемых по Гато функционалов доказаны вариационные принципы максимума и другие необходимые условия экстремума. Вариационным методом решена задача о представлении слабых решений обобщенной системы Коши–Римана с логарифмическими особенностями и вырождением условия строгой эллиптичности через регулярные решения уравнения Бельтрами.

2010 MSC. 30C65, 30C75.

Ключевые слова и фразы. Уравнения Бельтрами, вариация, регулярные решения, классы Соболева, необходимые условия экстремума.

1. Введение

Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. В области D рассмотрим уравнение Бельтрами

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \tag{1.1}$$

с комплексным измеримым коэффициентом $\mu(z) : D \to \mathbb{C}$, удовлетворяющим условию эллиптичности $|\mu(z)| < 1$ почти всюду в D. Здесь, как обычно, $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x+iy$, f_x и f_y — частные производные отображения f по x и y, соответственно. Всюду ниже

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}. \tag{1.2}$$

Статья поступила в редакцию 06.08.2011

ISSN 1810 – 3200.

Заметим, что любой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ класса $W^{1,1}_{loc}$ удовлетворяет уравнению Бельтрами с $\mu = \mu_f$, где п.в. $\mu_f = f_{\overline{z}}/f_z$ при $f_z \neq 0$ и $\mu_f = 0$ при $f_z = 0$. В этом случае функцию μ_f принято называть *комплексной характеристикой*, а K_{μ_f} — *дилатацией* отображения f.

Отображение $f : D \to \mathbb{C}$ называется *регулярным в точке* $z_0 \in D$, если f в этой точке имеет полный дифференциал и его якобиан $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0$ (см., напр., I.1.6 в [20]). В дальнейшем гомеоморфизм f класса $W^{1,1}_{loc}$ называется *регулярным*, если $J_f(z) > 0$ п.в. Наконец, *регулярным решением* уравнения Бельтрами (1.1) в D называется регулярный гомеоморфизм, который удовлетворяет (1.1) п.в. в D. Понятие регулярного решения впервые введено в работе [4].

Вариационный метод исследования экстремальных задач для квазиконформных отображений был впервые применен Белинским П. П. (см. [3]). Этот метод получил свое дальнейшее развитие в работах Крушкаля С. Л., Кюнау Р., Ренельта Г., Шиффера М., Шобера Г. и др. При построении вариаций в классах регулярных решений вырожденного уравнения Бельтрами с ограничениями интегрального и теоретико-множественного типа на комплексный коэффициент мы будем придерживаться подхода, предложенного в работах [10–13, 15, 16,30]). Упомянутый подход к построению вариаций использует выпуклость множества комплексных коэффициентов, что оказалось общим свойством компактных классов регулярных решений уравнения Бельтрами. Критерии существования и компактности классов регулярных решений и дальнейшие ссылки можно найти в работах [4, 5, 16–18, 21, 22, 24, 28–31].

Всюду далее $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, $D(r) = D(0, r)$, $\mathbb{D} = D(0, 1)$, $\operatorname{dist}(E, F) = \sup_{x\in E,\, y\in F} |x - y|$ — евклидово расстояние между множествами E и F в $\mathbb{C}$, $\operatorname{mes} E$ — мера Лебега множества $E \subset \mathbb{C}$, $dm(z)$ отвечает мере Лебега в $\mathbb{C}$, а через $dS(z) = \left(1 + |z|^2\right)^{-2} dm(z)$ обозначается *элемент сферической площади* в $\overline{\mathbb{C}}$.

2. К теории композиционных операторов

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что пространство Соболева $L^1_p(D)$, $p \geq 1$, состоит из локально интегрируемых функций $\varphi : D \to \mathbb{R}$ с обобщенными производными и полунормой

$$\|\varphi\|_{L^1_p(D)} = \| \nabla \varphi\|_{L_p(D)} = \left(\int\limits_D | \nabla \varphi|^p \, dm \right)^{1/p} < \infty, \qquad (2.1)$$

где m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, $\bigtriangledown\varphi$ — *обобщенный градиент* функции φ, $\bigtriangledown\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, определяемый условиями

$$\int\limits_D \varphi \cdot \frac{\partial\eta}{\partial x_i}\, dm = -\int\limits_D \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \cdot \eta\, dm \quad \forall\, \eta \in C_0^\infty(D),\ i = 1, 2, \dots, n. \tag{2.2}$$

Здесь через $C_0^\infty(D)$ обозначается пространство всех бесконечно гладких функций с компактным носителем в D. Аналогично говорят, что вектор-функция принадлежит классу Соболева $L_p^1(D)$, если каждая ее координатная функция принадлежит $L_p^1(D)$. Классы $W^{1,p}(D) = L_p^1(D) \cap L_p(D)$ отличаются только нормой $\|\varphi\|_{W^{1,p}(D)} = \|\varphi\|_{L_p(D)} + \| \bigtriangledown \varphi\|_{L_p(D)}$. Известен следующий факт (см. [7] и [33]).

Лемма 2.1. *Пусть f — гомеоморфизм между областями D и D' в $\mathbb{R}^n$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *композиция $f^*\varphi = \varphi \circ f$ порождает ограниченный оператор*

$$f^* : L_p^1(D') \to L_q^1(D), \quad 1 \le q \le p < \infty, \tag{2.3}$$

2) *отображение f принадлежит классу $W_{loc}^{1,1}(D)$ и функция*

$$K_p(x,\, f) := \inf\left\{k(x) : |Df|(x) \le k(x)|J_f(x)|^{\frac{1}{p}}\right\} \tag{2.4}$$

принадлежит $L_r(D)$, где r определяется из равенства $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

Отсюда, в частности, при $n = 2$, $p = 2$ и $q = 1$ имеем:

Предложение 2.1. *Пусть f — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм между областями D и D' в $\mathbb{C}$ класса $W_{loc}^{1,1}$ с $K_{\mu_f} \in L_{loc}^1$. Тогда $g \circ f \in W_{loc}^{1,1}$ для любого отображения $g : D' \to \mathbb{C}$ класса $W_{loc}^{1,2}$.*

Как хорошо известно, любое квазиконформное отображение g в $\mathbb{C}$ принадлежит классу $W_{loc}^{1,2}$ (см., напр., теорему IV.1.2 в [20]).

Следствие 2.1. *Для любого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $f : D \to D'$ класса $W_{loc}^{1,1}$ с $K_{\mu_f} \in L_{loc}^1$ и квазиконформного отображения $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, композиция $g \circ f$ принадлежит $W_{loc}^{1,1}$.*

Совершенно аналогично теореме 5.4.6 в [9, с. 244], доказывается:

Лемма 2.2. *Пусть f — гомеоморфизм между областями D и D' в $\mathbb{R}^n$, композиционный оператор $f^* : L_p^1(D') \to L_q^1(D)$, $1 \le q \le p < \infty$, ограничен и f обладает N^{-1}-свойством. Тогда, для $g \in L_p^1(D')$, п.в.*

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}\,(f(x)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.5}$$

Комбинируя леммы 2.1 и 2.2, аналогично IC(1) в [1], получаем.

Предложение 2.2. *Пусть f — сохраняющий ориентацию регулярный гомеоморфизм между областями D и D' в $\mathbb{C}$ с $K_{\mu_f} \in L^1_{loc}$. Тогда, для $g \in W^{1,2}_{loc}$, п.в.*

$$(g\circ f)_z = (g_w\circ f)f_z+(g_{\overline{w}}\circ f)\overline{f_{\overline{z}}}, \quad (g\circ f)_{\overline{z}} = (g_w\circ f)f_{\overline{z}}+(g_{\overline{w}}\circ f)\overline{f_z}. \tag{2.6}$$

Следствие 2.2. *В частности, формулы (2.6) имеют место для квазиконформных отображений g.*

3. Построение вариаций

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ выпуклый класс измеримых функций $\mu(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ и пусть H — класс всех регулярных решений $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ уравнения Бельтрами (1.1) с комплексными коэффициентами из $\mathfrak{M}$ и нормировками $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(\infty) = \infty$. Далее, пусть $\mu_0 \in \mathfrak{M}$ — характеристика $f \in H$ с $K_{\mu_0} \in L^1_{loc}$, а $\nu \in \mathfrak{M}$ такова, что*

$$\varkappa = (\nu - \mu_0)/(1 - |\mu_0|^2) \tag{3.1}$$

принадлежит открытому единичному шару в $L^\infty(\mathbb{C})$. Тогда существует вариация f_ε, $\varepsilon \in [0,\, 1/2]$, отображения f в классе H с комплексными коэффициентами

$$\mu_\varepsilon = \mu_0 + \varepsilon(\nu - \mu_0) = (1-\varepsilon)\mu_0 + \varepsilon\nu, \quad \varepsilon \in [0,\, 1/2], \tag{3.2}$$

такая, что

$$f_\varepsilon(\zeta) = f(\zeta) - \frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_{\mathbb{C}} (\nu(z)-\mu_0(z))\,\varphi(f(z),\, f(\zeta))\, f_z^2\, dm(z) + o(\varepsilon,\, \zeta), \tag{3.3}$$

где $o(\varepsilon,\zeta)/\varepsilon \to 0$ локально равномерно относительно $\zeta \in \mathbb{C}$ и

$$\varphi(w,\, w') = \frac{1}{w - w'}\cdot\frac{w'}{w}\cdot\frac{w'-1}{w-1}\,. \tag{3.4}$$

Доказательство. Обозначим через B (борелево) множество всех $z \in \mathbb{C}$, где отображение f имеет полный дифференциал и $J_f(z) \neq 0$. Тогда по определению класса H и по теореме Меньшова $\mathrm{mes}\{\mathbb{C}\setminus B\} = 0$ (см. [25]). Кроме того, по лемме 3.2.2 в [34] множество B можно разбить на счетное число (борелевских) множеств B_l, на каждом из которых отображение f является билипшицевым. По теореме Кирсбрауна (см., напр., теорему 2.10.43 в [34]) сужения $f|_{B_l}$ допускают продолжение до липшицевых отображений $\mathbb{C}$. Таким образом, f обладает (N)-свойством на множестве B и мы можем делать замену переменных под интегралом (см., напр., теорему 3.2.5 в [34]). Пусть

$$\varkappa_\varepsilon = \frac{\varepsilon\varkappa}{1-\varepsilon\varkappa\overline{\mu_0}} = \varepsilon\varkappa\sum_{n=0}^{\infty}\left(\varepsilon\,\varkappa\,\overline{\mu_0}\right)^n,\ \varepsilon\in[0,\,1]. \tag{3.5}$$

Поскольку по условию $\|\varkappa\|_\infty = k < 1$, то при $\varepsilon\in[0,\,1/2]$ $\|\varkappa_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon k/(1-\varepsilon k) \le k/(2-k) = q < 1$. Далее, пусть

$$\gamma_\varepsilon(w) := \begin{cases}\left(\varkappa_\varepsilon\cdot\frac{f_z}{\overline{f_z}}\right)\circ f^{-1}(w), & w\in f(B),\\ 0, & w\in f(\mathbb{C}\setminus B).\end{cases} \tag{3.6}$$

Без ограничения общности можем считать, что $|\varkappa(z)|\le k$ и $|\varkappa_\varepsilon(z)|\le q$ для всех $z\in\mathbb{C}$ и, таким образом, $\gamma_\varepsilon(z)\le q$ также для всех $z\in\mathbb{C}$. Кроме того, поскольку $\mathrm{mes}\{\mathbb{C}\setminus B\}=0$,

$$\text{п.в. } \gamma_\varepsilon\circ f = \varkappa_\varepsilon\cdot f_z/\overline{f_z} \tag{3.7}$$

Рассмотрим семейство Q-квазиконформных ($Q=(1+q)/(1-q)$) отображений $g_\varepsilon:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$, $\varepsilon\in[0,\,1/2]$, с комплексными характеристиками γ_ε, $\varepsilon\in[0,\,1/2]$, и нормировками $g_\varepsilon(0)=0$, $g_\varepsilon(1)=1$ и $g_\varepsilon(\infty)=\infty$ (см., напр., теорему V.3 в [1]). По теореме V.5 в [1]:

$$g_\varepsilon(w') = w' - \frac{\varepsilon}{\pi}\int\limits_{f(B)}\gamma(w)\varphi(w,\,w')\,dm(w) + o(\varepsilon,\,w'), \tag{3.8}$$

где $o(\varepsilon,\,w')/\varepsilon\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ локально равномерно по $w'\in\mathbb{C}$ и

$$\gamma(w) = \begin{cases}\left(\varkappa\cdot\frac{f_z}{\overline{f_z}}\right)\circ f^{-1}(w), & w\in f(B),\\ 0, & w\in f(\mathbb{C}\setminus B).\end{cases} \tag{3.9}$$

Теперь рассмотрим семейство отображений $f_\varepsilon = g_\varepsilon\circ f$, $\varepsilon\in[0,\,1/2]$. Покажем, что $f_\varepsilon\in H$. Во-первых, по следствию 2.1, $f_\varepsilon\in W^{1,1}_{loc}$. Далее, заметим, что регулярный гомеоморфизм f обладает N^{-1}-свойством по теореме Пономарева (см. [26]). Поэтому, аналогично IC(6) в [1], поскольку $J_f(z)\ne 0$ п.в. и $f_z\ne 0$ п.в., получаем, что п.в.

$$\mu_{g_\varepsilon}\circ f = \frac{f_z}{\overline{f_z}}\cdot\frac{\mu_{f_\varepsilon}-\mu_f}{1-\overline{\mu_f}\cdot\mu_{f_\varepsilon}}\,. \tag{3.10}$$

Здесь мы воспользовались (2.6) (см. следствие 2.2). Разрешая (3.10) относительно μ_{f_ε}, заключаем, что п.в.

$$\mu_{f_\varepsilon} = \frac{\mu_{g_\varepsilon}\circ f + \frac{f_z}{\overline{f_z}}\cdot\mu_f}{\frac{f_z}{\overline{f_z}} + \overline{\mu_f}\cdot\mu_{g_\varepsilon}\circ f} = \frac{\mu_0 + \frac{\overline{f_z}}{f_z}\cdot\gamma_\varepsilon\circ f}{1+\overline{\mu_0}\cdot\frac{\overline{f_z}}{f_z}\cdot\gamma_\varepsilon\circ f}\,. \tag{3.11}$$

Подставляя в (3.11) выражения из (3.5) и (3.7), имеем п.в.

$$\mu_{f_\varepsilon} = \frac{\mu_0 + \varkappa_\varepsilon}{1 + \overline{\mu_0}\varkappa_\varepsilon} = \frac{\mu_0 + \frac{\varepsilon\varkappa}{1-\varepsilon\varkappa\overline{\mu_0}}}{1 + \overline{\mu_0} \cdot \frac{\varepsilon\varkappa}{1-\varepsilon\varkappa\overline{\mu_0}}} = \mu_0 + \varepsilon\varkappa\left(1 - |\mu_0|^2\right) . \qquad (3.12)$$

Из (3.12) и (3.1) получаем, что $\mu_{f_\varepsilon} = \mu_\varepsilon$, где μ_ε задано в (3.2). Таким образом, $\mu_{f_\varepsilon} \in \mathfrak{M}$, $\varepsilon \in [0,\, 1/2]$, ввиду выпуклости $\mathfrak{M}$.

Заметим, что гомеоморфизм f_ε является регулярным при любом $\varepsilon \in [0,\, 1/2]$. Действительно, допустим, что f_ε не регулярен при некотором $\varepsilon \in [0,\, 1/2]$. Поскольку $|\mu_{f_\varepsilon}| < 1$ п.в., это бы означало, что $(f_\varepsilon)_z = 0 = (f_\varepsilon)_{\overline{z}}$ на некотором множестве $E \subseteq \mathbb{C}$ положительной меры, где отображение f_ε дифференцируемо, а f регулярно. Тогда аналогично IC(2) в [1], получаем, что всюду на E: $(g_\varepsilon)_w \circ f = \left[(f_\varepsilon)_z \overline{f_z} - (f_\varepsilon)_{\overline{z}}\, \overline{f_{\overline{z}}}\right] / J_f = 0$ (см. предложение 2.2). Однако, множество $\mathcal{E} := f(E)$ имеет нулевую меру, поскольку g_ε — квазиконформное отображение. Таким образом, мы приходим к противоречию с N^{-1}-свойством отображения f (см. [26]). Следовательно, $f_\varepsilon \in H$, $\varepsilon \in [0,\, 1/2]$.

Наконец, после замен переменных в (3.8), приходим к (3.3), поскольку $\operatorname{mes}\{\mathbb{C} \setminus B\} = 0$. □

Ядро (3.4) из вариационной формулы (3.3) принято называть *вариационной производной* в классе гомеоморфизмов $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$ (см. [37]).

Замечание 3.1. Вариационные производные для других нормировок можно найти, напр., в [3, с. 60–74] и [19, с. 40–45, 96, 101]. Наиболее простую вариационную производную имеет нормировка вида $f(z) = z + o(1)$, где $o(1) \to 0$ при $z \to \infty$ для отображений, характеристика которых равна нулю в окрестности ∞ (см., напр., [2]):

$$\varphi(w,\, w') = \frac{1}{(w - w')}. \qquad (3.13)$$

4. О классах отображений с ограничениями теоретико-множественного типа

Функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется *абсолютно непрерывной на линиях*, пишут $f \in \mathrm{ACL}$, если для любого замкнутого прямоугольника R в D, стороны которого параллельны координатным осям, $f|_R$ является абсолютно непрерывной на почти всех линейных сегментах в R, параллельных сторонам R (см., напр., [1, с. 27]). Пусть $Q(z) : D \to [1, \infty]$ — измеримая функция. Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ класса ACL называется $Q(z)$-*квазиконформным* ($Q(z)$-к.к.) отображением, если $K_{\mu_f}(z) \le Q(z)$ п.в.

В работах Андриян-Казаку К., Волковыского Л .И., Гутлянского В. Я., Иоффе М. С., Крушкаля С. Л., Кюнау Р., Летинена М., Ренельта Г., Тейхмюллера О., Шиффера М., Шобера Г. и других авторов исследовались классы $Q(z)$-к.к. отображений, для которых $\mu(z) \in \Delta_{q(z)}$ п.в., где $\Delta_{q(z)} = \{\nu \in \mathbb{C} : |\nu| \le q(z)\}$, $q(z) = (Q(z) - 1) \,/\, (Q(z) + 1)$, а также классы с дополнительными ограничениями вида $\mathcal{F}(\mu(z), z) \le 0$ п.в., где $\mathcal{F}(\mu, z) : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Наконец, одна из постановок Шиффера М. – Шобера Г. [37] привела к рассмотрению классов с ограничениями общего теоретико-множественного вида:

$$\mu(z) \in M(z) \subseteq \Delta_{q(z)} \quad \text{п.в.} \tag{4.1}$$

Однако, это развитие долгое время происходило в рамках Q-к.к. отображений, поскольку предполагалось, что $Q \in L^\infty$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_M$ класс всех измеримых функций, удовлетворяющих условию (4.1), где, вообще говоря, $Q \notin L^\infty$. Через H^*_M обозначим совокупность всех регулярных гомеоморфизмов $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с комплексными характеристиками из $\mathfrak{M}_M$ и нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1,\ f(\infty) = \infty$.

Говорят, что семейство компактных множеств в $M(z) \subseteq \mathbb{D}$, $z \in \mathbb{C}$, *измеримо по параметру* z, если для любого замкнутого множества $M_0 \subseteq \mathbb{C}$ множество $E_0 = \{z \in \mathbb{C} : M(z) \subseteq M_0\}$ измеримо по Лебегу.

4.1. Вариационный принцип максимума

Функционал $\Omega : H \to \mathbb{R}$ именуется *дифференцируемым по Гато*, если

$$\Omega(f_\varepsilon) = \Omega(f) + \varepsilon \mathrm{Re} \int\limits_{\mathbb{C}} g \, d\varkappa + o(\varepsilon) \tag{4.2}$$

для любой вариации $f_\varepsilon = f + \varepsilon g + o(\varepsilon)$ в классе H, где $\varkappa = \varkappa_f$ — некоторая конечная комплексная борелевская мера (Радона) с компактным носителем и $o(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ локально равномерно в $\mathbb{C}$ (см. [38, с. 138–139]). Другими словами, существует непрерывный и линейный по первой переменной функционал $L(g; f)$ такой, что

$$\Omega(f_\varepsilon) = \Omega(f) + \varepsilon \, \mathrm{Re}\, L(g; f) + o(\varepsilon)\,. \tag{4.3}$$

Говорим, что Ω дифференцируем по Гато *без вырождения* на классе H, если функция $\varphi(w, f(\zeta))$ локально интегрируема для любого

$f \in H$ относительно произведения мер $dm(w) \otimes d\varkappa(\zeta)$, где φ — вариационная производная в классе H и

$$\mathcal{A}(w) := \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{C}} \varphi(w, f(\zeta))\, d\varkappa(\zeta) \neq 0 \quad \text{для п.в. } w \in \mathbb{C}. \tag{4.4}$$

Теорема 4.1. *Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, — семейство компактных выпуклых множеств в $\mathbb{D}$, измеримое по параметру z, такое что $Q_M \in L^1_{loc}$ и пусть функционал $\Omega : H^*_M \to \mathbb{R}$ дифференцируем по Гато без вырождения. Если на отображении $f \in H^*_M$ достигается* $\max \Omega$ *по классу H^*_M, то его комплексная характеристика удовлетворяет включению $\mu(z) \in \partial M(z)$ для п.в. $z \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Поскольку $\mu \in \mathfrak{M}_M$, без ограничения общности считаем, что $\mu(z) \in M(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Допустим, что множество $E = \{z \in \mathbb{C} : \mu(z) \notin \partial M(z)\}$ имеет положительную меру Лебега. Пусть $E_m = \{z \in \mathbb{C} : Q_M(z) \leq m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, χ, χ_m, $\chi_{z_0,r}$ — характеристические функции множеств E, E_m, $\overline{D(z_0, r)}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, соответственно. Далее, пусть α_n, $n = 1, 2, \ldots$, — перенумерация всех рациональных чисел из $[0, 2\pi)$ и $\rho_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, — расстояния от $\mu(z)$ до точек пересечения лучей $\mu(z) + te^{i\alpha_n}$, $t > 0$, с $\partial M(z)$.

Покажем, что функции $\rho_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, являются измеримыми по z. Действительно, пусть $\Lambda_n(z) = \{\nu \in \mathbb{C} : \nu = \mu(z) + te^{i\alpha_n},\ 0 \leq t \leq 2\}$ — отрезок луча, исходящего из точки $\mu(z)$ в направлении $e^{i\alpha_n}$ длины 2. Измеримость семейств множеств $\Lambda_n(z)$ по z следует, напр., из предложения 3.1 в [29] и общих свойств элементарных операций над измеримыми функциями (см., напр., [32, с. 29–31]). Следовательно, измеримы также семейства множеств $M_n(z) = M(z) \cap \Lambda_n(z)$ и $\{\eta_n(z)\} = \partial\mathbb{D} \cap \Lambda_n(z)$, где $\partial\mathbb{D} = \{\eta \in \mathbb{C} : |\eta| = 1\}$ — единичная окружность (см. лемму 3.3 в [29]). Таким образом, функции $\eta_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, измеримы. По предложению 3.1 в [29] измеримы также функции расстояния $r_n(z) = \min_{\nu \in M_n(z)} |\nu - \eta_n(z)|$. После этого остается заметить, что $\rho_n(z) = |\mu(z) - \eta_n(z)| - r_n(z)$.

Рассмотрим функции $\mu_n(z) = \mu(z) + \rho_n(z)e^{i\alpha_n}$. По построению $\mu_n \in \mathfrak{M}_M$. Поскольку множества $M(z)$ выпуклы, то функции $\nu_n(z) := \mu(z) + \lambda(z)(\mu_n(z) - \mu(z)) = (1 - \lambda(z))\mu(z) + \lambda(z)\mu_n(z)$ также принадлежат классу $\mathfrak{M}_M$ для произвольной измеримой функции $\lambda(z) : \mathbb{C} \to [0, 1]$. В частности, классу $\mathfrak{M}_M$ принадлежат функции $\nu^{m,n}_{z_0,r}(z) := \mu(z) + \lambda_m(z)\chi_{z_0,r}(z)(\mu_n(z) - \mu(z))$, где $\lambda_m(z) = \chi(z)\chi_m(z)(1 - |\mu(z)|^2)/2$. Заметим, что $|\mu_n(z) - \mu(z)| = \rho_n(z) \leq 2q_M(z)$ и

$$\varkappa^{m,n}_{z_0,r}(z) := \frac{\nu^{m,n}_{z_0,r}(z) - \mu(z)}{1 - |\mu(z)|^2} = \frac{\mu_n(z) - \mu(z)}{2}\chi(z)\chi_m(z)\chi_{z_0,r}(z)$$

принадлежат шару радиуса $q_m := (m-1)/(m+1) < 1$ в $L^\infty(\mathbb{C})$.

Применяя вариацию теоремы 3.1 с $\nu = \nu_{z_0,r}^{m,n}$, получаем, что

$$\operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{C}}\Bigg[\int\limits_{|z-z_0|\le r}\varphi_{m,n}(z,\zeta)\,dm(z)\Bigg]d\varkappa(\zeta)\ge 0, \tag{4.5}$$

где $\varphi_{m,n}(z,\zeta) = \lambda_m(z)(\mu_n(z)-\mu(z))f_z^2\varphi(f(z),f(\zeta))$. Пусть

$$\psi_{z_0,r}^{m,n}(w,\zeta) = \begin{cases}\left(\varkappa_{z_0,r}^{m,n}\cdot\frac{f_z}{\overline{f_z}}\right)\circ f^{-1}(w)\ \varphi(w,f(\zeta)), & w\in f(B),\\ 0, & w\in f(\mathbb{C}\setminus B),\end{cases}$$

где B обозначает (борелево) множество всех точек плоскости $\mathbb{C}$, где f имеет полный дифференциал и $J_f(z)\ne 0$. $\psi_{z_0,r}^{m,n}(w,\zeta)$ интегрируемы относительно произведения мер $dm(w)\otimes d\varkappa(\zeta)$ (см. [6, с. 215]). Заметим, что $J_{f^{-1}}(w) = \left[J_f\left(f^{-1}(w)\right)\right]^{-1} = \left[(1-|\mu|^2)f_z^2\right]^{-1}\left(f^{-1}(w)\right)$ для $w\in f(B)$ (ср. IC(3) в [1]). Кроме того, регулярный гомеоморфизм f обладает N^{-1}-свойством и после замены переменной (см. леммы III.2.1 и III.3.2 в [20]) получаем, что функция $\varphi_{m,n}(z,\,\zeta)$ интегрируема относительно произведения мер $dm(z)\otimes d\varkappa(\zeta)$, и по теореме Лебега–Фубини (см. [6, с. 353]) из (4.5) заключаем, что

$$\int\limits_{|z-z_0|\le r}\Bigg[\operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{C}}\varphi_{mn}(z,\zeta)\,d\varkappa(\zeta)\Bigg]dm(z)\ge 0.$$

По теореме Лебега о дифференцировании неопределенного интеграла (см. [32, с. 180]) имеем неравенства $\lambda_m(z)\mathrm{Re}(\mu_n(z)-\mu(z))\mathcal{B}(z)\ge 0$ для п.в. $z\in\mathbb{C}$, $m,n=1,2,\dots$, где $\mathcal{B}(z)=\mathcal{A}(f(z))f_z^2$ и $\mathcal{A}(w)$ задано в (4.4). Поэтому, $\rho_n(z)\operatorname{Re}\mathcal{B}(z)e^{i\alpha_n}\ge 0$ для п.в. $z\in E\cap E_m$, $n=1,2,\dots$. Поскольку же E_m, $m=1,2,\dots$, образуют исчерпание плоскости $\mathbb{C}$ по мере, то последнее имеет место для п.в. $z\in\mathbb{C}$. С другой стороны, $\rho_n(z)>0$, $n=1,2,\dots$, на E и, таким образом, это равносильно неравенствам $\operatorname{Re}\mathcal{B}(z)e^{i\alpha_n}\ge 0$ для п.в. $z\in E$, $n=1,\,2,\dots$. В силу произвола α_n, $n=1,2,\dots$, отсюда имеем, что $\operatorname{Re}\mathcal{B}(z)e^{i\alpha}\ge 0\ \forall\,\alpha\in[0,2\pi)$ для п.в. $z\in E$. В частности, при $\alpha=0$ и $\alpha=\pi$ получаем: $\pm\operatorname{Re}\mathcal{B}(z)\ge 0$, т.е. $\operatorname{Re}\mathcal{B}(z)=0$, а при $\alpha=\pi/2$ и $\alpha=3\pi/2$: $\pm\operatorname{Im}\mathcal{B}(z)\ge 0$, т.е. $\operatorname{Im}\mathcal{B}(z)=0$. Таким образом, $\mathcal{B}(z)=0$ для п.в. $z\in E$. Однако это невозможно, т.к. $\mathcal{A}(w)\ne 0$ п.в., f обладает N^{-1}-свойством и $f_z\ne 0$ п.в. Полученное противоречие и показывает, что $\operatorname{mes}E=0$, т.е. $\mu(z)\in\partial M(z)$ п.в. □

4.2. Другие необходимые условия экстремума

Для формулировки необходимых условий экстремума нам потребуется еще одно понятие. Именно, пусть $\mu \in \mathfrak{M}_M$. Тогда через $\omega_\mu(z)$ обозначим *конус допустимых направлений* (см., напр., [23, с. 12]) для множества $M(z)$ в точке $\mu(z)$, т.е. множество всех $\omega \in \mathbb{C}$, $\omega \neq 0$, таких, что $\mu(z) + \varepsilon\omega \in M(z)$ при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$. Почти дословно повторяя доказательство теоремы 4.1, получаем:

Теорема 4.2. *При условиях теоремы* 4.1*, экстремаль f в задаче о* $\max\Omega$ *на классе H_M^* удовлетворяет неравенствам* $\operatorname{Re}\omega\mathcal{B}(z) \geq 0$ *для п.в. $z \in \mathbb{C}$ при всех ω из конуса допустимых направлений $\omega_\mu(z)$, где $\mathcal{B}(z) = \mathcal{A}(f(z))f_z^2$, $\mathcal{A}(w)$ задается соотношением* (4.4)*.*

Следствие 4.1. *Если дополнительно при п.в. $z \in \mathbb{C}$ в каждой точке $\partial M(z)$ имеется касательная, то $n(z)\mathcal{B}(z) \geq 0$ п.в., где $n(z)$ — единичный вектор внутренней нормали к $\partial M(z)$ в точке $\mu(z)$.*

В частности, если $M(z) = \{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa - c(z)| \leq k(z)\} \subseteq \mathbb{D}$, где функции $c(z)$ и $k(z)$ измеримы, то по вариационному принципу максимума $n(z) = (c(z) - \mu(z))/k(z)$, и соотношение из следствия 4.1 п.в. эквивалентно тому, что $(c(z) - \mu(z))/k(z) = \overline{\mathcal{B}(z)}/|\mathcal{B}(z)|$, т.е. $\mu(z) = c(z) - k(z)\,\overline{\mathcal{B}(z)}/|\mathcal{B}(z)|$. Таким образом, имеем:

Следствие 4.2. *Пусть $M(z)$, $z \in \mathbb{C}$, — указанное семейство кругов, а функционал $\Omega : H_M^* \to \mathbb{R}$ дифференцируем по Гато без вырождения. Тогда при $Q(z) := \frac{1+k(z)+|c(z)|}{1-k(z)-|c(z)|} \in L^1_{loc}$ экстремаль задачи о* $\max\Omega$ *на классе H_M^* удовлетворяет уравнению*

$$f_{\overline{z}} = c(z)f_z - k(z)\,\frac{\overline{\mathcal{A}(f(z))}}{|\mathcal{A}(f(z))|}\,\overline{f_z}\,. \tag{4.6}$$

5. О классах отображений с ограничениями интегрального типа

В данном разделе рассматриваются отображения класса Соболева $W^{1,1}_{loc}$ с ограничениями на дилатацию интегрального типа. Отметим, что различные классы отображений, квазиконформных в среднем, изучались в работах Альфорса Л., Билуты П. А., Боярского Б. В., Гольберга А., Гутлянского В. Я., Кругликова В. И., Крушкаля С. Л., Кудьявина В. С., Кюнау Р., Перовича М., Песина И. Н., Рязанова В. И. и других авторов (см., напр., ссылки к гл. 12 в монографии [24]).

Пусть $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — неубывающая выпуклая функция. Обозначим через $\mathfrak{F}^\Phi$ класс всех регулярных решений $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ уравнения Бельтрами с комплексными коэффициентами μ такими, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \Phi\left(K_\mu(z)\right) dS(z) \le 1 \tag{5.1}$$

и нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$. Через $\mathfrak{M}^\Phi$ обозначим соответствующий класс комплексных характеристик.

Отметим, что при указанных условиях функция

$$\mathcal{D}(\tau) := \Phi\left(\frac{1+\tau}{1-\tau}\right), \quad \tau \in [0,\, 1], \tag{5.2}$$

является выпуклой, а потому класс комплексных характеристик $\mathfrak{M}^\Phi$ также является выпуклым,

5.1. Вариационный принцип максимума

Теорема 5.1. *Пусть $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ — неубывающая выпуклая функция с $\Phi(Q) \neq 0$, где $Q = \sup_{\Phi(t)<\infty} t$, и функционал $\Omega : \mathfrak{F}^\Phi \to \mathbb{R}$ дифференцируем по Гато без вырождения. Тогда для любого отображения $f \in \mathfrak{F}^\Phi$, на котором достигается $\max\Omega$ по классу $\mathfrak{F}^\Phi$, дилатация $K_\mu(z)$, $\mu = \mu_f$, удовлетворяет равенству:*

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \Phi(K_\mu(z))\, dS(z) = 1. \tag{5.3}$$

Доказательство. Допустим, что интеграл I в (5.3) меньше 1. Заметим, что $K_\mu(z) \le Q$ п.в. Если $\Phi(Q) = \infty$, то найдется монотонно возрастающая последовательность $Q_m < Q$, $m = 1, 2, \ldots$, такая, что $Q_m \to Q$ при $m \to \infty$. Если же $\Phi(Q) < \infty$, то полагаем $Q_m = Q$, $m = 1, 2, \ldots$.

Характеристика μ отображения f имеет вид $\mu(z) = k(z)e^{i\vartheta(z)}$, где $k(z) = (K_\mu(z) - 1)/(K_\mu(z) + 1)$, $\vartheta(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — некоторая измеримая функция. Рассмотрим функции $\mu_m^\pm(z) = \mu(z) \pm \lambda_m(z)\chi_{z_0,r}(z)$, $\lambda_m(z) = \lambda_0(q_m - k(z))e^{i\vartheta(z)}\chi_m(z)$, где $\lambda_0 \in (0,1)$, $q_m = (Q_m - 1)/(Q_m + 1)$, $\chi_m(z)$ — характеристическая функция множества $E_m = \{z \in \mathbb{C} : K_\mu(z) \le Q_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, а $\chi_{z_0,r}(z)$ — характеристическая функция круга $\overline{D(z_0, r)}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$.

Пусть $K_{\mu_m}^\pm(z) = (1 + |\mu_m^\pm(z)|)/(1 - |\mu_m^\pm(z)|)$. Тогда по монотонности $\Phi(t) : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ и $t(\tau) = (1+\tau)/(1-\tau) : [0,1] \to [1, \infty]$, получаем неравенство $\Phi(K_{\mu_m}^\pm(z)) \le \Phi(Q_m)$ для $z \in E_m \cap \overline{D(z_0, r)}$ и равенство

$\Phi(K^{\pm}_{\mu_m}(z)) = \Phi(K_\mu(z))$ для $z \in \mathbb{C} \setminus E_m \cap \overline{D(z_0,r)}$. Поэтому при $r \le \sqrt{(1-I)/(\pi\Phi(Q_m))}$ функция $\mu^{\pm}_m(z)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}^{\Phi}$.

При $0 < \lambda_0 < 1 - q_m^2$ функции

$$\varkappa^{\pm}_m(z) = \frac{\mu^{\pm}_m(z) - \mu(z)}{1 - |\mu(z)|^2} = \pm \frac{\lambda_m(z)\chi_{z_0,r}(z)}{1 - |\mu(z)|^2}$$

принадлежат открытому единичному шару в $L^\infty(\mathbb{C})$.

Применяя вариацию теоремы 3.1 с $\nu(z) = \mu^{\pm}_m(z)$, получаем, что

$$\pm \operatorname{Re} \int\limits_{\mathbb{C}} \left[\int\limits_{|z-z_0|\le r} \varphi_m(z,\zeta)\, dm(z) \right] d\varkappa(\zeta) \ge 0,$$

где $\varphi_m(z,\zeta) = \lambda_m(z) f_z^2 \varphi(f(z), f(\zeta))$, т.е.

$$\operatorname{Re} \int\limits_{\mathbb{C}} \left[\int\limits_{|z-z_0|\le r} \varphi_m(z,\zeta)\, dm(z) \right] d\varkappa(\zeta) = 0. \tag{5.4}$$

Рассмотрим также функции

$$\psi_m(w,\zeta) = \begin{cases} \left(\varkappa^{+}_m(z)\, \frac{\overline{f_z}}{f_z} \right) \circ f^{-1}(w)\, \varphi(w, f(\zeta)), & w \in f(B), \\ 0, & w \in f(\mathbb{C} \setminus B), \end{cases}$$

где B обозначает (борелево) множество всех $z \in \mathbb{C}$, где f имеет полный дифференциал и $J_f(z) \ne 0$. Они интегрируемы относительно произведения мер $dm(w) \otimes d\varkappa(\zeta)$ (см. [6, с. 215]). Заметим, что $J_{f^{-1}}(w) = \left[J_f\left(f^{-1}(w)\right)\right]^{-1} = \left[(1-|\mu|^2) f_z^2\right]^{-1} \left(f^{-1}(w)\right)$ для $w \in f(B)$, ср. IC(3) в [1]. Кроме того, f обладает N^{-1}-свойством и по замене переменной (см. леммы III.2.1 и III.3.2 в [20]) получаем, что функция $\varphi_{m,n}(z,\zeta)$ интегрируема относительно произведения мер $dm(z) \otimes d\varkappa(\zeta)$, и по теореме Лебега–Фубини (см. [6, с. 353]) из (5.4) заключаем, что

$$\int\limits_{|z-z_0|\le r} \left[\operatorname{Re} \int\limits_{\mathbb{C}} \varphi_m(z,\zeta)\, d\varkappa(\zeta) \right] dm(z) = 0.$$

Отсюда по теореме о дифференцировании неопределенного интеграла (см. [32, с. 180]) $\lambda_m(z)\, f_z^2\, \mathcal{A}(f(z)) = 0$ п.в., где $\mathcal{A}$ задано соотношением (4.4). Т.к. $\mathcal{A}(w) \ne 0$ п.в., f обладает N^{-1}-свойством и $f_z \ne 0$ п.в. имеем $f_z^2 \mathcal{A}(f(z)) \ne 0$ п.в. Следовательно, $\lambda_m(z) = 0$ п.в. и потому $k(z) = q_m$ п.в. на E_m, $m = 1, 2, \ldots$.

Заметим теперь, что множества E_m исчерпывают всю плоскость по мере и $q_m \to q$ при $m \to \infty$. Поэтому $k(z) = q$ п.в. на $\mathbb{C}$. Однако, это противоречит принадлежности $\mu(z)$ классу $\mathfrak{M}^{\Phi}$, т.к. $\Phi(Q) \ne 0$ по условию. Полученное противоречие и доказывает (5.3). $\square$

5.2. Другие необходимые условия экстремума

Теорема 5.2. *В условиях теоремы* 5.1,

$$f_{\overline{z}} = -k(z)\,\frac{\overline{\mathcal{A}(f(z))}}{|\mathcal{A}(f(z))|}\,\overline{f_z}, \tag{5.5}$$

где

$$\int\limits_{\mathbb{C}} \mathcal{D}(k(z))\,dS(z) = 1. \tag{5.6}$$

Здесь $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{D}$ *заданы соотношениями* (4.4) *и* (5.2), *соответственно.*

Доказательство. (5.6) следует из теоремы 5.1. Таким образом, соотношение (5.5) эквивалентно неравенству $\nu(z)\mathcal{A}(f(z)) \leq 0$ п.в., где ν — коэффициент из (5.5), или

$$\mu(z)\mathcal{B}(z) \leq 0 \quad \text{п.в.}, \tag{5.7}$$

где μ — комплексная характеристика f, а

$$\mathcal{B}(z) = \mathcal{A}(f(z))\,f_z^2\,. \tag{5.8}$$

Используем обозначения Q_m, q_m, E_m, χ_m, $\chi_{z_0,r}$ и $\overline{D(z_0,\,r)}$ из доказательства теоремы 5.1. Пусть $\mu(z) = k(z)e^{i\vartheta(z)}$. Тогда $\mathfrak{M}^\Phi$ содержит также $\nu_0(z) := k(z)e^{i\vartheta_0(z)}$, где $\vartheta_0(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — любая измеримая функция. Поскольку круг является выпуклым множеством, то $\mu + \lambda(\nu_0 - \mu) \in \mathfrak{M}^\Phi$ для любой измеримой функции $\lambda(z) : \mathbb{C} \to [0,1]$. Класс $\mathfrak{M}^\Phi$ содержит $\nu_{z_0,r}^{(m)}(z) := \mu(z) + \lambda_m(z)\chi_{z_0,r}(z)(\nu_0(z) - \mu(z))$, где $\lambda_m(z) = \chi_m(z)(1 - |\mu(z)|^2)/2$. При этом, функция

$$\varkappa_{z_0,r}^{(m)} = \frac{\nu_{z_0,r}^{(m)}(z) - \mu(z)}{1 - |\mu(z)|^2} = \frac{\nu_0(z) - \mu(z)}{2}\chi_m(z)\chi_{z_0,r}(z)$$

принадлежит замкнутому шару радиуса $q_m < 1$ в пространстве $L^\infty(\mathbb{C})$.

Применяя вариацию теоремы 3.1 с $\nu = \nu_{z_0,r}^{(m)}(z)$, получаем, что

$$\operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{C}} \Bigg[\ \int\limits_{|z-z_0|\leq r} \varphi_m(z,\zeta)\,dm(z)\Bigg] d\varkappa(\zeta) \geq 0,$$

где $\varphi_m(z,\zeta) = \lambda_m(z)\,(\nu_0(z) - \mu(z))\,f_z^2\,\varphi(f(z), f(\zeta))$. Повторяя рассуждения, которые использовались при доказательстве теоремы 5.1, по теореме Фубини можем изменить порядок интегрирования:

$$\int\limits_{|z-z_0|\leq r} \Bigg[\operatorname{Re}\int\limits_{\mathbb{C}} \varphi_m(z,\zeta)\,d\varkappa(\zeta)\Bigg] dm(z) \geq 0.$$

По теореме Лебега о дифференцировании неопределенного интеграла, $\lambda_m(z)\ \mathrm{Re}(\nu_0(z)-\mu(z))\mathcal{B}(z) \geq 0$, т.е. $\mathrm{Re}\,\mu(z)\,\mathcal{B}(z) \leq \mathrm{Re}\,\nu_0(z)\,\mathcal{B}(z)$ для п.в. $z \in E_m$. Поскольку $E_m,\ m = 1, 2, \ldots$, исчерпывают плоскость $\mathbb{C}$ по мере, то $\mathrm{Re}\,\mu(z)\mathcal{B}(z) \leq k(z)\ \mathrm{Re}\,e^{i\vartheta_0(z)}\mathcal{B}(z)$ для п.в. $z \in \mathbb{C}$. При $k(z)\,\mathcal{B}(z) \neq 0$ абсолютный минимум выражения, стоящего справа в предыдущем неравенстве достигается только для $e^{i\vartheta_0(z)} = -\overline{\mathcal{B}(z)}/|\mathcal{B}(z)|$, т.е., имеет место (5.7). □

6. О конформности по Белинскому

Напомним, что отображение f называется конформным в точке z_0, если f дифференцируемо в точке z_0 по Дарбу–Штольцу:

$$f(z) - f(z_0) = f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)\overline{(z - z_0)} + o(|z - z_0|), s \qquad (6.1)$$

и если $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$, а $f_z(z_0) \neq 0$.

Как показывает пример $w = z(1 - \ln|z|)$ Шабата Б. В. (см. [3, с. 40]), при непрерывной комплексной характеристике $\mu(z)$ отображение $w = f(z)$ может быть недифференцируемым в этом смысле.

Если характеристика $\mu(z)$ непрерывна в точке z_0, то, как повидимому впервые установлено Белинским П. П. (см. [3, с. 41]), отображение $w = f(z)$ дифференцируемо в z_0 в следующем смысле:

$$\Delta w = A(\rho)\left[\Delta z + \mu_0 \overline{\Delta z} + o(\rho)\right], \qquad (6.2)$$

где $\mu_0 = \mu(z_0),\ \rho = |\Delta z + \mu_0\overline{\Delta z}|,\ A(\rho)$ зависит только от ρ и $o(\rho)/\rho \to 0$ при $\rho \to 0$. Здесь $A(\rho)$ может не иметь предела при $\rho \to 0$, однако,

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{A(t\rho)}{A(\rho)} = 1 \quad \forall\, t > 0. \qquad (6.3)$$

Отображение f называется *дифференцируемым по Белинскому* в точке z_0, если выполнены условия (6.2)–(6.3) с некоторым $\mu_0 \in \mathbb{D}$. При этом, при разрывной $\mu(z)$, в соотношении (6.2) не обязательно $\mu_0 = \mu(z_0)$. Если $\mu_0 = 0$, то говорят также, что f *конформно по Белинскому* в точке z_0 (см., [14]).

Функция $\mu(z)$ называется *аппроксимативно непрерывной в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, если существует измеримое множество E, на котором $\mu(z) \to \mu(z_0)$ при $z \to z_0$ и z_0 является точкой плотности E, т.е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathrm{mes}\{E \cap D(z_0, \varepsilon)\}}{\mathrm{mes}\{D(z_0, \varepsilon)\}} = 1\,.$$

Как увидим, аппроксимативная непрерывность μ остается достаточным условием дифференцируемости f по Белинскому с $\mu_0 = \mu(z_0)$.

Аналог следующей теоремы для квазиконформных отображений можно найти в статье [14].

Теорема 6.1. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$, $0 \in D$, и пусть $f : D \to \mathbb{C}$ — регулярное решение уравнения Бельтрами* (1.1), $f(0) = 0$, *и*

$$\limsup_{r\to 0} \ \fint_{D(r)} \Phi\left(K_\mu(z)\right)\, dm(z) < \infty, \tag{6.4}$$

для неубывающей выпуклой функции $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ такой, что

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty \tag{6.5}$$

при $\delta > \Phi(0)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) *f конформно по Белинскому в нуле;*

2) *для любого $\zeta \in \mathbb{D}$ при $\tau > 0$*

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{f(\tau\zeta)}{f(\tau)} = \zeta; \tag{6.6}$$

3) *для любого $\delta \in (0,\,1)$ при $|z'| < \delta|z|$ и $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$*

$$\lim_{z\to 0} \left\{ \frac{f(z')}{f(z)} - \frac{z'}{z} \right\} = 0; \tag{6.7}$$

4) *для любого $\zeta \in \mathbb{D}$ при $z \in \mathbb{C}^*$*

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z\zeta)}{f(z)} = \zeta. \tag{6.8}$$

При этом, предел в (6.8) *— локально равномерный по ζ в $\mathbb{D}$.*

Доказательство. Придерживаемся схемы 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1). Полагаем $f_0(\zeta) \equiv \zeta$ в $\mathbb{D}$ и $f_z(\zeta) \equiv f(\zeta\, z)/f(z)$ при $\zeta \in \mathbb{D}$ и $z \in \mathbb{C}^*$, $0 < |z| < \mathrm{dist}(0,\,\partial D)$.

1) $\Rightarrow$ 2). Непосредственно из (6.2), (6.3) следует, что $f_\tau(\zeta) \to f_0(\zeta)$ при $\tau \to 0,\ \tau > 0$, для любого фиксированного $\zeta \in \mathbb{D}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Заметим, что f_τ при $\tau \in (0, \mathrm{dist}(0,\,\partial D))$ — регулярное решение уравнения Бельтрами (1.1) с комплексным коэффициентом $\mu_\tau(\zeta) = \mu(\tau\zeta)$ и с дилатацией $K_{\mu_\tau}(\zeta) = K_\mu(\tau\zeta)$ в $\mathbb{D}$. Таким образом,

$$I_\tau := \int_{\mathbb{D}} \Phi\left(K_{\mu_\tau}(\zeta)\right) dS(\zeta) \le \frac{1}{\tau^2} \int_{|z|<\tau} \Phi\left(K_\mu(z)\right) dm(z)$$

и по условию (6.4) $I_\tau \le M < \infty$ для малых $0 < \tau \le \tau_0 < \operatorname{dist}(0, \partial D)$. Заметим также, что f_τ не принимают значение 1 и ∞ внутри $\mathbb{D}$. Поэтому f_τ, $\tau \in (0, \tau_0]$, образуют нормальное семейство (см. теорему 2 в [21]). Итак, f_τ, $\tau \in (0, \tau_0]$, — равностепенно непрерывное семейство по предложению 7.1 в [24] и условие (6.6) влечет, что $f_\tau \to f_0$ локально равномерно в $\mathbb{D}$ по теореме 7.1 в [24].

Покажем, что $f_z(\zeta) - f_0(\zeta) \to 0$ при $z \to 0$, $z \in \mathbb{C}^*$, равномерно относительно $\zeta \in D_\delta = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \le \delta\}$ для любого $\delta \in (0, 1)$. Проведем рассуждение от противного и для этого отметим очевидное тождество $f_z(\zeta) = f_{\tau^*}(\zeta z/\tau^*)/f_\tau(z/\tau^*) = f(z')/f(z)$ при $\zeta = z'/z$ и $\tau^* = |z|/\Delta$, где Δ — произвольное фиксированное число из $(0, 1)$.

Действительно, предположим, что наше утверждение не верно. Тогда найдутся число $\varepsilon > 0$ и последовательности $\zeta_n \in D_\delta$, $z_n \to 0$, $z_n \in \mathbb{C}^*$, такие, что $|g_n(\zeta_n) - \zeta_n| \ge \varepsilon$, где $g_n(\zeta) = f_{z_n}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$. Ввиду компактности замкнутого круга D_δ и окружности ∂D_Δ можно считать, что $\zeta_n \to \zeta_0 \in D_\delta$ и $\eta_n = \Delta z_n/|z_n| \to \eta_0 \in \partial D_\Delta$.

Обозначим через $\varphi_n(\zeta)$ отображение $f_{\tau_n}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$, где $\tau_n = |z_n|/\Delta$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда, по приведенным в первой части доказательства этого пункта замечаниям, $\varphi_n(\zeta) \to \zeta$ при $n \to \infty$ равномерно на $D_\delta \cup \partial D_\Delta$ и, кроме того, $g_n(\zeta) = \varphi_n(\eta_n\zeta)/\varphi_n(\eta_n)$. Следовательно, $g_n(\zeta) \to \zeta$ при $n \to \infty$ равномерно на D_δ. Поэтому, $g_n(\zeta_n) \to \zeta_0$ при $n \to \infty$ (см., напр., замечание 7.1 в [24]). Однако, последнее противоречит сделанному выше предположению.

3) $\Rightarrow$ 4). Полагая в (6.7) $z' = z\zeta$, $\zeta \in \mathbb{D}$, и выбирая произвольное $\delta \in (|\zeta|, 1)$, немедленно получаем (6.8). Последнее означает, что $f_z(\zeta) \to f_0(\zeta)$ при $z \to 0$, $z \in \mathbb{C}^*$, поточечно в $\mathbb{D}$. Аналогично импликации 2) $\Rightarrow$ 3) показывается, что последнее влечет локально равномерную сходимость $f_z \to f_0$ при $z \to 0$ в $\mathbb{D}$.

4) $\Rightarrow$ 1). Из (6.8) для $z = \rho > 0$, $\zeta = e^{i\vartheta}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, и $w = \zeta z = \rho\, e^{i\vartheta}$ получаем, что $f(w) = f(\rho)(\zeta + \alpha(\rho))$, где $\alpha(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Таким образом, $f(w) = A(\rho)(w + o(\rho))$, где $A(\rho) = f(\rho)/\rho$ и $o(\rho)/\rho \to 0$ при $\rho \to 0$, т.е. имеет место (6.2). Кроме того, из (6.8) с $z = \rho > 0$ и $\zeta = t > 0$ получаем, что A удовлетворяет (6.3). $\Box$

Следующая лемма доказывается совершенно аналогично теореме 3.3 из работы [31]. Поэтому мы не приводим здесь ее доказательство.

Лемма 6.1. *Пусть D — область в $\mathbb{C}$ и пусть $f_n : D \to \mathbb{C}$ — последовательность сохраняющих ориентацию* ACL *гомеоморфизмов с комплексными характеристиками μ_n такими, что неопределенные интегралы дилатаций K_{μ_n} локально равностепенно абсолютно* *непрерывны. Если* $f_n \to f$ *равномерно на каждом компакте в* D*, где* f *— гомеоморфизм, то* $f \in \mathrm{ACL}$ *и* ∂f_n *и* $\overline{\partial} f_n$ *сходятся слабо в* $L^1_{loc}(D)$ *к* ∂f *и* $\overline{\partial} f$*, соответственно. Кроме того, если* $\mu_n \to \mu$ *п.в. или по мере, то* $\overline{\partial} f = \mu \partial f$ *п.в.*

Напомним, что функция $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ называется *строго выпуклой*, если она является выпуклой, неубывающей и $\lim_{t\to\infty} \Phi(t)/t = \infty$.

Следствие 6.1. *В частности, заключения леммы верны, если*

$$\int\limits_D \Phi\left(K_{\mu_n}(z)\right) dS(z) \le M < \infty \tag{6.9}$$

для некоторой строго выпуклой функции $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$*.*

Действительно, условие (6.9) влечет, что дилатации K_{μ_n} имеют локально равностепенно абсолютно непрерывные интегралы (см. теорему 3.1.2 в [27]), и мы можем воспользоваться леммой 6.1.

Теперь приведем наиболее интересное следствие теоремы 6.1.

Теорема 6.2. *Пусть* D *— область в* $\mathbb{C}$*,* $z_0 \in D$*,* $f : D \to \mathbb{C}$ *— регулярное решение уравнения Бельтрами* (1.1) *и*

$$\limsup_{r\to 0} \quad \fint\limits_{D(z_0,r)} \Phi\left(K_\mu(z)\right)\, dm(z) < \infty \tag{6.10}$$

для строго выпуклой функции $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *с условием* (6.5)*. Если* $\mu(z)$ *аппроксимативно непрерывна в точке* z_0*, то отображение* f *дифференцируемо по Белинскому в этой точке с* $\mu_0 = \mu(z_0)$*.*

Доказательство. Действительно, f дифференцируемо по Белинскому в точке z_0 в том и только в том случае, если $g = h\circ\varphi^{-1}$ конформно по Белинскому в нуле, где $h(z) = f(z_0+z) - f(z_0)$ и $\varphi(z) = z + \mu_0\overline{z}$, где μ_0 взято из (6.2).

По пункту 2) теоремы 6.1 это эквивалентно тому, что $g_\tau(\zeta) \to g_0(\zeta)$ при $\tau \to 0$ для любого $\zeta \in \mathbb{C}$, где $g_0(\zeta) \equiv \zeta$, $g_\tau(\zeta) = g(\tau\zeta)/g(\tau)$, $\tau > 0$. Ввиду однородности φ и φ^{-1} относительно мультипликаторов $\tau > 0$, $\varphi^{-1}(\tau\varphi(z)) = \tau z$, последнее эквивалентно тому, что $h_\tau(z) \to h_0(z)$ при $\tau \to 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$, где $h_\tau(z) = g_\tau(\varphi(z))/g_\tau(\varphi(1)) = h(\tau z)/h(\tau), \tau > 0,\ h_0(z) = \varphi(z)/\varphi(1)$.

Очевидно, что $\mu_h(z) = \mu(z+z_0)$ и $K_{\mu_h}(z) = K_\mu(z+z_0)$. Пусть $\mu_\tau(z)$ — комплексная характеристика $h_\tau(z)$. Тогда также очевидно, что $\mu_\tau(z) = \mu(z_0+\tau z)$, $K_{\mu_\tau}(z) = K_\mu(z_0+\tau z)$, и что аппроксимативная непрерывность $\mu(z)$ в точке z_0 эквивалентна сходимости по мере

$\mu_\tau \to \mu_0 = \mu(z_0)$ при $\tau \to 0$. Таким образом, $h_\tau \to h_0$ при $\tau \to 0$ в силу теоремы 2 и леммы 2 из [21] с учетом (6.10) и (6.5), а также следствия 6.1, ср. оценку интеграла I_τ в доказательстве теоремы 6.1. $\square$

Из равенства (6.7) и неравенства треугольника получаем:

Следствие 6.2. *При посылках и одном из условий* 1)–4) *теоремы* 6.1, *при* $|z'| \le \delta|z|$ *для любого* $\delta > 0$, *существует*

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}^*}} \left\{ \frac{|f(z')|}{|f(z)|} - \frac{|z'|}{|z|} \right\} = 0. \tag{6.11}$$

Отсюда и из теоремы Штольца докажем следующее:

Теорема 6.3. *При посылках и условии* 1) *теоремы* 6.1

$$\lim_{z\to 0} \frac{\ln|f(z)|}{\ln|z|} = 1. \tag{6.12}$$

Доказательство. Действительно, допустим от противного, что соотношение (6.12) не имеет место, т.е. для некоторых $\varepsilon > 0$ и $z_n \to 0$,

$$\left| \frac{\ln|f(z_n)|}{\ln|z_n|} - 1 \right| \ge \varepsilon, \tag{6.13}$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$. Для сокращения записи введем обозначения $t_n = -\ln|z_n|$ и $\tau_n = -\ln|f(z_n)|$. Тогда (6.13) перепишется в виде:

$$\left| \frac{\tau_n}{t_n} - 1 \right| \ge \varepsilon. \tag{6.14}$$

При необходимости переходя к подпоследовательности, можно считать, что $t_n - t_{n-1} \ge 1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Далее, вставляя, если нужно, между соседними членами последовательности t_n, $n = 1, 2, \ldots$, их среднее арифметическое, можно добиться, чтобы $t_n - t_{n-1} < 2$. При этом неравенство (6.14) сохраняется для бесконечного числа членов последовательности.

Таким образом, последовательность $\rho_n = |z_n| = e^{-t_n}$ удовлетворяет неравенствам $e^{-2} < \rho_n/\rho_{n-1} \le e^{-1}$. Из соотношения (6.11) получаем, что $\exp(\tau_{n-1} - \tau_n) = \exp(t_{n-1} - t_n) + \alpha_n$, где $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, или, по-другому, $\exp(\tau_{n-1} - \tau_n) = (1 + \beta_n)\exp(t_{n-1} - t_n)$ с $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда имеем, что $(\tau_n - \tau_{n-1}) = (t_n - t_{n-1}) + \gamma_n$ с $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$ и, поскольку $t_n - t_{n-1} \ge 1$, $(\tau_n - \tau_{n-1})/(t_n - t_{n-1}) = 1 + \delta_n$, где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда по теореме Штольца $\tau_n/t_n \to 1$ (см., напр., [35, с. 60]), что противоречит (6.14). Полученное противоречие и доказывает (6.12). $\square$

Из теорем 6.2 и 6.3 немедленно получаем следующее:

Следствие 6.3. *При посылках теоремы* 6.2 *с* $\mu(z_0) = 0$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\ln |f(z) - f(z_0)|}{\ln |z - z_0|} = 1. \tag{6.15}$$

7. Об одном приложении

Рассмотрим в области $D \subset \mathbb{C}$ уравнение

$$\operatorname{div}(K \operatorname{grad} u) = 0, \tag{7.1}$$

которое является основным уравнением в теории стационарных потоков, гидродинамике, магнито- и электростатике неоднородных сред. Нам удобно будет интерпретировать коэффициент K как функцию комплексной переменной $z = x + iy$. При этом мы будем предполагать, что коэффициент K положителен и равномерно отделен от 0, что является естественным с физической точки зрения. Кроме того, дополнительной нормировкой всегда можно добиться, чтобы $\operatorname{ess\,inf} K(z) \geq 1$.

Здесь мы не предполагаем коэффициент K дифференцируемым или хотя бы непрерывным или ограниченным. Под (слабым) решением уравнения (7.1) в этом случае понимается функция U, которая обладает локально сопряженной функцией V такой, что пара (U, V) обладает первыми обобщенными производными и удовлетворяет п.в. обобщенной системе Коши–Римана

$$V_x = -KU_y, \quad V_y = KU_x, \tag{7.2}$$

в соответствующей окрестности каждой точки области D, за исключением изолированных особенностей.

Как легко видеть, система уравнений (7.2) эквивалентна одному комплексному уравнению Бельтрами второго рода

$$F_{\overline{z}} = -k(z)\overline{F_z}, \tag{7.3}$$

где $F = U + iV,\ z = x + iy$ и

$$k(z) = \frac{K(z) - 1}{K(z) + 1}\,. \tag{7.4}$$

Аналог ниже приведенной теоремы для $K \in L^\infty$ впервые был анонсирован при условиях Белинского–Виттиха–Тейхмюллера в [15], а затем доказан при более слабых условиях аппроксимативной непрерывности в диссертации [30].

Теорема 7.1. *Пусть D — область в $\overline{\mathbb{C}}$ и $K : D \to [1, \infty]$ — измеримая функция такая, что*

$$\int\limits_{D} \Phi\left(K(z)\right)\, dS(z) < \infty \tag{7.5}$$

для строго выпуклой функции $\Phi : [1, \infty] \to [0, \infty]$ с условием (6.5). Тогда для любой $z_0 \in D\backslash\{\infty\}$ существует решение уравнения (7.1), представимое в виде:

$$U(z, z_0) = \ln|f(z) - f(z_0)|, \tag{7.6}$$

где f — регулярное решение уравнения

$$f_{\overline{z}} = -k(z)\, \frac{f(z) - f(z_0)}{\overline{f(z) - f(z_0)}}\, \overline{f_z} \tag{7.7}$$

в $\overline{\mathbb{C}}$ с нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(\infty) = \infty$. Здесь $k(z)$ задается (7.4) в D, $k(z) \equiv 0$ вне D и, при этом, само решение $U(z,\, z_0)$ продолжается по непрерывности в $\overline{\mathbb{C}}$ и в дополнительной области $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, где полагаем $K(z) \equiv 1$, является гармонической функцией.

Кроме того, если функция $K(z)$ аппроксимативно непрерывна в точке z_0 и удовлетворяет условию

$$\limsup_{r \to 0} \quad ⨍\limits_{D(z_0, r)} \Phi\left(K(z)\right)\, dm(z) < \infty, \tag{7.8}$$

то

$$\lim_{z \to z_0} \frac{U(z,\, z_0)}{\ln|z - z_0|} = \frac{1}{K(z_0)}\,. \tag{7.9}$$

Замечание 7.1. Аналогично, если $K(1/z)$ аппроксимативно непрерывна в 0 и удовлетворяет там (7.8), то

$$\lim_{z \to \infty} \frac{U(z,\, z_0)}{\ln|z|} = \frac{1}{K(\infty)}. \tag{7.10}$$

Замечание 7.2. Заметим, что по теореме Лебега условие (7.5) влечет условие (7.8) для п.в. $z_0 \in D$ (см., напр., теорему IV(5.4) в [32]), а по теореме Данжуа любая почти всюду конечная измеримая функция является почти всюду аппроксимативно непрерывной (см., напр., теорему IV(10.6) в [32]).

Следствие 7.1. *При условии (7.5) решение уравнения (7.1) со свойством (7.9) существует для п.в. $z_0 \in D$.*

Доказательство теоремы 7.1. 1) Существование регулярного решения уравнения (7.7) докажем, решая экстремальную задачу

$$\max_{f\in\mathfrak{F}_{r,\,R}} |f'(z_0)| = \max_{\substack{\alpha\in[0,\,2\pi]\\ f\in\mathfrak{F}_{r,\,R}}} \operatorname{Re} e^{i\alpha}\cdot f'(z_0)$$

в классах $\mathfrak{F}_{r,\,R}$, $r>0$, $R>r+|z_0|$, всех регулярных $K(z)-$к.к. отображений, конформных в областях $|z-z_0|<r$ и $|z|>R$, с гидродинамической нормировкой в окрестности ∞: $f(z)=z+\frac{\alpha_1}{z}+\cdots$, с последующей перенормировкой $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(\infty)=\infty$ и предельными переходами при $r\to 0$ и $R\to\infty$.

Для экстремального случая, $e^{i\alpha_0}f'(z_0)>0$. Таким образом, исходный функционал можно заменить на линейный функционал $\Omega(f)=\operatorname{Re} e^{i\alpha_0}\cdot f'(z_0)$ и по следствию 4.2 экстремаль f удовлетворяет уравнению

$$f_{\overline{z}} = -k(z)\ \frac{\overline{\mathcal{A}(f(z))}}{|\mathcal{A}(f(z))|}\cdot\overline{f_z},$$

где, см. замечание 3.1,

$$\mathcal{A}(w)=\mathcal{A}_f(w)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{e^{i\alpha_0}\cdot f'(z_0)}{(w-f(z_0))^2}=\frac{C}{(w-f(z_0))^2}$$

при $C>0$. Поэтому для экстремали имеем

$$\overline{\mathcal{A}(f(z))}/|\mathcal{A}(f(z))| = (f(z)-f(z_0))/\overline{(f(z)-f(z_0))},$$

т.е. экстремаль удовлетворяет (7.7).

По теореме 4 из работы [22] класс $\mathfrak{F}_{r,\,R}$ компактен через естественную связь с отображениями, нормированными условиями $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f(\infty)=\infty$. Кроме того, по известной теореме Вейерштрасса о сходимости аналитических функций (см., напр., [8, с. 17]), функционал $|f'(z_0)|$ непрерывен в $\mathfrak{F}_{r,\,R}$. Отсюда следует существование экстремали в задаче о $\max|f'(z_0)|$ на указанном классе, которая является регулярным решением уравнения (7.7).

Отметим, что отображение $(f(z)-f(0))/(f(1)-f(0))$ также удовлетворяет уравнению (7.7). Поэтому в дальнейшем предполагаем, что $f(0)=0$, $f(1)=1$ и $f(\infty)=\infty$. Соответствующий класс гомеоморфизмов H^*_M, где $M(z):=\{\nu\in\mathbb{C}:|\nu|\leq k(z)\}$, компактен по теореме 4 из [22]. Поэтому найдутся последовательности $r_n\to 0$ и $R_n\to\infty$, для которых соответствующие отображения $f_n\to f$ локально равномерны при $n\to\infty$, где $f\in H^*_M$. По лемме 6.1 предельное $K(z)-$к.к. отображение f удовлетворяет уравнению (7.7) во всей комплексной плоскости. При этом, f является регулярным решением (7.7) по теореме 4 в [22]. Функция $F(z) = \ln(f(z) - f(z_0))$ локально в $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ является решением уравнения (7.3), а потому $U(z, z_0) = \ln|f(z) - f(z_0)|$ есть решение уравнения (7.1) с особенностями только в точках z_0 и ∞.

2) Докажем (7.9). Пусть $G = \varphi \circ g$, где $g(z) = f(z_0 + z) - f(z_0)$, $\varphi(w) = w|w|^{\gamma-1}$, $\gamma = K(z_0)$. Заметим, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(\infty) = \infty$ и φ удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$\varphi_{\overline{w}} = k(z_0)\, \frac{w}{\overline{w}}\, \varphi_w\,. \tag{7.11}$$

Поскольку f – регулярное решение уравнения (7.7) и $K \in L^1_{loc}$ ввиду условия (7.5), то $h := g^{-1} \in W^{1,2}_{loc}$ (см, теорему 1.3 в [36]). Таким образом, по предложению 2.2 h п.в. удовлетворяет уравнению

$$h_{\overline{w}} = k(z_0 + h(w))\, \frac{w}{\overline{w}}\, h_w, \tag{7.12}$$

$h(0) = 0$, $h(\infty) = \infty$ (ср., напр., I.C(4) в [1]). Таким образом, по следствию 2.2 $G = \varphi \circ h^{-1}$, $G(0) = 0$, $G(\infty) = \infty$, имеет комплексную характеристику

$$\nu(z) = \frac{k(z_0) - k(z_0 + z)}{1 - k(z_0)k(z_0 + z)} \cdot \frac{g(z)}{\overline{g(z)}}\,\frac{\overline{g_z}}{g_z}, \tag{7.13}$$

(ср., напр., I.C(10) в [1]). Как видим, $\mu(z)$ аппроксимативно непрерывна в 0 и $\varphi(0) = 0$ и, как известно, $K_\nu(z) \le K(z_0) \cdot K(z_0 + z)$. Выбирая в условии (6.10) для следствия 6.3 $\Phi_*(t) = \Phi(ct)$, $c = 1/K(z_0)$, видим, что $\Phi_*^{-1}(\tau) = c^{-1}\Phi^{-1}(\tau)$, таким образом, Φ_* удовлетворяет (6.5), если Φ удовлетворяет (6.5). Наконец, по условию (7.8) получаем (7.9), поскольку $\ln|G| = \gamma \ln|g|$. □

Теорема 7.1 показывает, что развитая теория вариационного метода для уравнения Бельтрами применима, в частности, к задачам математической физики.

Литература

[1] Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Мир, Москва, 1969.

[2] L. Ahlfors, L. Bers, *Riemann's mapping theorem for variable metrics* // Ann. Math., **72** (1960), 385–404.

[3] П. П. Белинский, *Общие свойства квазиконформных отображений*, Наука, Новосибирск, 1974.

[4] B. Bojarski, V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, *On the Beltrami equations with two characteristics* // Complex Variables and Elliptic Equations, **54** (2009), No. 10, 935–950.

[5] B. Bojarski, V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, *On integral conditions for general Beltrami equations* // Complex Anal. Oper. Theory, **5** (2011), No. 3, 835–845.

[6] Н. Бурбаки, *Интегрирование*, Наука, Москва, 1967.

[7] С. К. Водопьянов, А. Ухлов, *Пространства Соболева и* (P, Q)*-квазиконформные отображения групп Карно* // Сиб. матем. журн., **39** (1998), No. 4, 665–682.

[8] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, Москва, 1966.

[9] В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения*, Наука, Москва, 1983.

[10] В. Я. Гутлянский, *О методе вариаций для однолистых аналитических функций с квазиконформным продолжением* // Доклады АН СССР, **236** (1977), No. 5, 1045–1048.

[11] В. Я. Гутлянский, *О произведении конформных радиусов неналегающих областей* // Доклады АН Укр. ССР, сер. А (1977) No. 4, 298–302.

[12] В. Я. Гутлянский, *О методе вариаций для однолистых аналитических функций с квазиконформным продолжением* // Сиб. матем. журн., **21** (1980), No. 2, 61–78.

[13] V. Ya. Gutlyanskii, *The product of the conformal radii of nonoverlapping domains* // Ten papers on complex analysis, Amer. Math. Soc. Transl., ser. 2, **122** (1984), 65–69.

[14] В. Я. Гутлянский, В. И. Рязанов, *К теории локального поведения квазиконформных отображений* // Изв. РАН, Сер. матем., **59** (1995), No. 3, 31–58.

[15] В. Я. Гутлянский, В. И. Рязанов, *О фундаментальном решении одного уравнения математической физики* // Комплексные методы в математической физике, Тез. док. Всесоюзной шк. мол. уч., ИМ АН СССР, ИПММ АН Укр. ССР, ДГУ, Донецк, 1984.

[16] В. Я. Гутлянский, В. И. Рязанов, *Геометрическая и топологическая теория функций и отображений*, Наукова думка, Киев, 2011.

[17] V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On recent advances in the Beltrami equations* // Укр. мат. вестник, **7** (2010), No. 4, 467–515.

[18] G. David, *Solutions de l'equation de Beltrami avec* $\|\mu\|_\infty = 1$ // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A1. Math., **13** (1988), 25–70.

[19] С. Л. Крушкаль, *Квазиконформные отображения и римановы поверхности*, Наука, Новосибирск, 1975.

[20] O. Lehto, K. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Springer, New York, 1973.

[21] Т. В. Ломако, *К теории сходимости и компактности для уравнений Бельтрами* // Укр. мат. журн., **63** (2011), No. 3, 341–349.

[22] Т. В. Ломако, *К теории сходимости и компактности для уравнений Бельтрами с ограничениями теоретико-множественного типа* // Укр. мат. журн., **63** (2011), No. 9, 1227–1240.

[23] П. Ж. Лоран, *Аппроксимация и оптимизация*, Мир, Москва, 1975.

[24] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2009.

[25] D. Menchoff, *Sur les differentielles totales des fonctions univalentes* // Math. Ann., **105** (1931), 75–85.

[26] С. П. Пономарев, *N^{-1}-свойство отображений и (N)-условие Лузина* // Мат. заметки, **58** (1995), 411–418.

[27] У. Рудин, *Теория функций в поликруге*, Мир, Москва, 1974.

[28] В. И. Рязанов, *Некоторые вопросы сходимости и компактности для квазиконформных отображений* // В кн.: Теория отображений и приближение функций (ред. Г. Д. Суворов), Наукова думка, Киев, 1983, 50–62.

[29] V. I. Ryazanov, *Some questions of convergence and compactness for quasiconformal mappings* // Amer. Math. Soc. Transl., **131** (1986), No. 2, 7–19.

[30] В. И. Рязанов, *Топологические аспекты теории квазиконформных отображений. Диссертация . . . д.ф.-м.н.*, ИПММ НАН Украины, Донецк, 1993.

[31] V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *On strong solutions of the Beltrami equations* // Complex Variables and Elliptic Equations, **55** (2010), No. 1–3, 219–236.

[32] С. Сакс, *Теория интеграла*, ИЛ, Москва, 1949.

[33] А. Ухлов, *Отображения, порождающие вложения пространств Соболева* // Сиб. матем. журн., **34** (1993), No. 1, 165–171.

[34] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, Москва, 1987.

[35] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1*, Наука, Москва, 1970.

[36] S. Hencl, P. Koskela, *Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism* // Arch. Rat. Mech. Anal., **180** (2006), No. 1, 75–95.

[37] M. Schiffer, G. Schober, *A variational method for general families of quasiconformal mappings* // J. Anal. Math., **34** (1978), 240–264.

[38] G. Schober, *Univalent Functions* // Lect. Notes Math., **478**, Springer–Verlag, Berlin etc., 1975.

Сведения об авторах

Владимир Яковлевич Гутлянский, Татьяна Владимировна Ломако, Владимир Ильич Рязанов

Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Розы Люксембург 74
Донецк, 83114
Украина
E-Mail: `vladimirgut@mail.ru`, `tlomako@yandex.ru`, `vlryazanov1@rambler.ru`