Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 3, 447 – 457

Об апостериорном выборе параметра регуляризации при решении жестко некорректных задач

Сергей Г. Солодкий, Анна В. Грушевая

(*Представлена А. М. Самойленко*)

Аннотация. В настоящей статье рассматривается проблема приближенного решения жестко некорректных задач с возмущенными правыми частями. Проводится анализ аппроксимационных свойств комбинации конечномерного варианта тихоновского метода регуляризации и апостериорного выбора параметра регуляризации по принципу равновесия. Установлено, что в рамках этого подхода удается достичь оптимальный порядок точности на исследуемом классе уравнений. Сравнительный анализ описанного метода с известными ранее подтверждает эффективность предлагаемого подхода.

2010 MSC. 47A52, 65R30.

Ключевые слова и фразы. Жестко некорректная задача, апостериорный выбор параметра регуляризации, принцип равновесия, оптимальный порядок точности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим проблему приближенного решения некорректной задачи, представимой в виде операторного уравнения I рода

$$Ax = y, \tag{1.1}$$

где $A : X \to Y$ — линейный компактный инъективный оператор, действующий между гильбертовыми пространствами X и Y, причем множество $\mathrm{Range}(A)$ незамкнуто в Y. Для сокращения выкладок обозначим скалярные произведения в обоих пространствах через $(\cdot, \cdot)$ и соответствующие им нормы через $\|\cdot\|$. Более того, тем же символом $\|\cdot\|$ будем обозначать стандартную операторную норму. Из контекста будет ясно, какое именно пространство или норма имеются ввиду.

Статья поступила в редакцию 30.06.2011

ISSN 1810 – 3200.

Кроме того, будем предполагать, что вместо y доступно лишь некоторое приближение $y_\delta \in Y$, $\|y - y_\delta\| \leq \delta, \delta > 0$.

Обычно уравнение (1.1) называют жестко некорректной задачей, если его решение $x_0 = A^{-1}y$ имеет конечную в некотором смысле гладкость, а A — оператор бесконечной гладкости. Характерной чертой таких задач является то, что решение x_0 принадлежит некоторому подпространству V, непрерывно вложенному в X, причем сингулярные значения оператора канонического вложения J_V из V в X стремятся к нулю с полиномиальной скоростью, в то время как сингулярные значения $\{\sigma_l\}_{l=1}^{\infty}$ оператора A стремятся к нулю экспоненциально. Следуя [6, 14], в данном случае будем предполагать, что x_0 принадлежит множеству

$$M_{p,\rho}(A) := \left\{x : x = \ln^{-p}(A^*A)^{-1}v,\ \|v\| \leq \rho\right\} \tag{1.2}$$

при некотором неизвестном значении $p > 0$ и известном $\rho > 0$, где операторная функция $\ln^{-p}(A^*A)^{-1}$ определяется спектральным разложением оператора

$$A^*A = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 (\Psi_k, \cdot)\Psi_k,$$

то есть

$$\ln^{-p}(A^*A)^{-1}v = \sum_{l=1}^{\infty} \ln^{-p} \sigma_l^{-2} (\Psi_l, v)\Psi_l.$$

В дальнейшем без потери общности будем считать, что $\|A\| \leq \theta \leq e^{-1/2}$, $\sigma_l \leq \theta \leq e^{-1/2}$, $l = 1, 2, \ldots$.

Пример 1.1. В качестве примера жестко некорректной задачи рассмотрим задачу из теории гравитационной градиентометрии спутника. Если принять поверхность земли и орбиту спутника за сферы с радиусами $r_1 < r_2$, соответственно, $\Omega_{r_i} = \{u \in \mathbb{R}^3, |u| = r_i\}, \quad i = 1, 2$, то одна из задач в этой теории может быть описана уравнением (1.1) с оператором

$$Ax(u) := \frac{1}{4\pi r_1} \int\limits_{\Omega_{r_1}} \frac{d^2}{dr_2^2} \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{|u - v|^3} \right) x(v)\, d\Omega_{r_1}(v), \quad u \in \Omega_{r_2}. \tag{1.3}$$

В градиентометрии спутника обычно считается, что точное решение уравнения (1.1) с оператором (1.3) является элементом сферического пространства Соболева

$$\mathcal{H}_s := \left\{ f \in L_2(\Omega_{r_1}) : \|f\|_s^2 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2l+1} \left(l + \frac{1}{2}\right)^{2s} |\langle Y_{l,k}^{(1)}, f\rangle|^2 < \infty \right\}$$

при некотором положительном индексе s. С другой стороны, так как для сингулярных значений $\{\sigma_l\}$ оператора (1.3) справедливо следующее соотношение:

$$\ln \sigma_l^{-2} \asymp \Big(l + \frac{1}{2}\Big),$$

то найдутся положительные константы $c_2 > c_1 > 0$ такие, что для любого элемента $f \in \mathcal{H}_s$ соболевского пространства выполняются двусторонние оценки

$$c_1 \|f\|_s \le \| \ln^s (A^*A)^{-1} f\| \le c_2 \|f\|_s.$$

Это, в частности, означает, что каждый элемент из $\mathcal{H}_s$ принадлежит множеству (1.2) при $p = s$. Более подробную информацию об этом можно найти в [4, 9].

Поскольку Range(A) предполагается незамкнутым в Y, то непрерывной зависимости решения x_0 от входных данных нет. Следовательно, численное решение задачи (1.1)–(1.2) требует применения специальных методов регуляризации.

Отметим, что проблема устойчивого решения жестко некорректных задач стала интенсивно изучаться, начиная со статьи [6], в которой для регуляризации был использован метод Тихонова. Далее жестко некорректные задачи рассматривались в работах [1, 2, 5, 10]. Так, в частности, в [10] регуляризация жестко некорректных задач (1.1) с решениями из (1.2) проводилась методом Тихонова, а выбор параметра регуляризации α осуществлялся по принципу невязки Морозова. Этот подход позволил достичь оптимальную по порядку (в логарифмической шкале) точность $O(\ln^{-p} \frac{1}{\delta})$ восстановления решений из указанного множества для любого $p : p > p_0 > 0$. Идея использования тихоновской регуляризации в сочетании с принципом невязки нашла свое дальнейшее применение в работе [12], где было установлено, что указанный метод обеспечивает оптимальный порядок точности также в случае возмущенного оператора в (1.1). Позднее исследования, инициированные в [10], были распространены в [13] на более широкий класс экспоненциально некорректных задач, для которого также удалось добиться оптимального порядка точности восстановления решений $O((\ln \ldots \ln \frac{1}{\delta})^{-p})$.

В настоящей статье, в отличие от всех упомянутых выше работ, с целью выбора параметра регуляризации α (в комбинации с методом Тихонова) будет использовано другое правило останова, а именно, принцип равновесия, который для решения некорректных задач впервые был предложен в [8]. Ниже будет установлена оптимальность предлагаемого подхода на классе жестко некорректных задач (1.1) с решениями из множества (1.2).

Схема настоящей статьи следующая. Параграф 2 содержит вспомогательные утверждения, необходимые для анализа аппроксимационных свойств предлагаемого нами подхода. В параграфе 3 описывается принцип равновесия, а в параграфе 4 доказывается оптимальность по порядку комбинации метода Тихонова с принципом равновесия в качестве правила выбора параметра регуляризации.

Напомним, что в рамках метода Тихонова регуляризованное решение x_α^δ определяется как решение вариационной задачи

$$I_\alpha(X) := \|Ax - y_\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 \to \min .$$

Поскольку для численной реализации тихоновского метода необходимо выполнять все вычисления с конечномерным приближением A_n вместо A, то вариационная задача $I_\alpha(X) \to \min$ заменяется конечномерным аналогом

$$I_{\alpha,n}(x) := \|A_n x - y_\delta\|^2 + \alpha\|x\|^2 \to \min,$$

где A_n — некоторое конечномерное приближение к A, $\mathrm{rank}(A_n) = n$. Нахождение приближенного решения требует в этом случае решения линейного операторного уравнения

$$\alpha x + A_n^* A_n x = A_n^* y_\delta, \tag{1.4}$$

то есть приближение ищется в виде $x_{\alpha,n}^\delta = (\alpha I + A_n^* A_n)^{-1} A_n^* y_\delta$.

Отметим, что в данной статье мы не ограничиваемся рамками какой-либо конкретной схемы дискретизации, а накладываем на дискретизированный оператор A_n только одно, предельно общее, условие. А именно, конечномерное приближение A_n должно выбираться таким образом, чтобы уровень дискретизации и уровень возмущения правой части были согласованными по порядку, то есть чтобы выполнялось неравенство

$$\|A - A_n\| \le \delta\rho^{-1}. \tag{1.5}$$

Таким образом, на базе предлагаемого нами общего подхода (1.4), (1.5) к решению жестко некорректных задач, может быть разработана целая совокупность численных алгоритмов в зависимости от выбора конкретной схемы дискретизации. Примеры проекционных схем дискретизации некорректных задач, которые позволяют сохранить оптимальную точность решения при минимально возможном объеме вычислений, можно найти, например, в работах [3, 11].

2. Вспомогательные утверждения

Приведем необходимые определения и факты.

Общее условие истокопредставимости задается следующим образом:

$$A_\varphi(\rho) := \{x \in X, \quad x = \varphi(A^*A)v, \quad \|v\| \le \rho\}, \tag{2.1}$$

где $\varphi(t)$ — произвольная возрастающая функция такая, что $\varphi(0) = 0$. При этом φ называется индексной функцией.

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение (см. работу [7, предложение 1]).

Лемма 2.1. *Предположим, что φ — индексная функция и $\varphi(t)/t$ невозрастающая. Тогда для всех $0 < s, t \le e^{-1}$ имеем*

$$\sup_{0<t\le e^{-1}} \left| \frac{s}{s-t}\varphi(t) \right| \le \varphi(s).$$

Напомним, что в нашем случае индексная функция имеет вид $\varphi(t) = \ln^{-p}\frac{1}{t}$. Очевидно, что она удовлетворяет условию леммы 2.1.

Хорошо известно (см., например, [7]), что для любого ограниченного оператора B выполняются соотношения

$$\begin{gathered} B(\alpha I + B^*B)^{-1} = (\alpha I + BB^*)^{-1}B, \\ \|(\alpha I + B^*B)^{-1}\| \le \alpha^{-1}, \quad \|(\alpha I + B^*B)^{-1}B^*\| \le \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \\ \|B(\alpha I + B^*B)^{-1}B^*\| \le 1. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. *Пусть $\|A\| \le e^{-1/2}$ и $x_0 = A^{-1}y \in M_{p,\rho}$. Тогда имеет место следующее неравенство:*

$$\|x_0 - x^\delta_{\alpha,n}\| \le \rho \ln^{-p}\frac{1}{\alpha} + \frac{3\delta}{2\sqrt{\alpha}}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Прежде всего воспользуемся правилом треугольника

$$\|x_0 - x^\delta_{\alpha,n}\| \le \|x_0 - x_\alpha\| + \|x_\alpha - x_{\alpha,n}\| + \|x_{\alpha,n} - x^\delta_{\alpha,n}\|,$$

где $x_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*y$, $x_{\alpha,n} = (\alpha I + A_n^*A_n)^{-1}A_n^*y$.

Оценим первое слагаемое. Используя лемму 2.1, получим

$$\|x_0 - x_\alpha\| = \| \ln^{-p}(A^*A)^{-1}v - (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*A \ln^{-p}(A^*A)^{-1}v\|$$

$$\le \rho \sup_{0<\lambda\le e^{-1}} \Big| \ln^{-p}\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{\alpha-\lambda}\ln^{-p}\frac{1}{\lambda}\Big|$$

$$= \rho \sup_{0<\lambda\le e^{-1}} \Big| \frac{\alpha}{\alpha-\lambda}\ln^{-p}\frac{1}{\lambda}\Big| \le \rho \ln^{-p}\frac{1}{\alpha}.$$

Для оценки второго слагаемого нам потребуются предварительные выкладки. Принимая во внимание (2.2), имеем

$$\begin{aligned}
&(\alpha I + A^*A)^{-1}A^*y - (\alpha I + A_n^*A_n)^{-1}A_n^*y \\
&\quad = A^*(\alpha I + AA^*)^{-1}y - (\alpha I + A_n^*A_n)^{-1}A_n^*y \\
&\quad = [A^* - (\alpha I + A_n^*A_n)^{-1}A_n^*(\alpha I + AA^*)](\alpha I + AA^*)^{-1}y \\
&\quad = (\alpha I + A_n^*A_n)^{-1}[(\alpha I + A_n^*A_n)A^* - A_n^*(\alpha I + AA^*)](\alpha I + AA^*)^{-1}y \\
&\quad = (\alpha I + A_n^*A_n)^{-1}[\alpha A^* + A_n^*A_nA^* - \alpha A_n^* - A_n^*AA^*](\alpha I + AA^*)^{-1}y \\
&\quad = (\alpha I + A_n^*A_n)^{-1}[\alpha(A^* - A_n^*) + A_n^*(A_n - A)A^*](\alpha I + AA^*)^{-1}Ax_0.
\end{aligned}$$

Отсюда, с учетом неравенств (2.2), получаем оценку второго слагаемого

$$\begin{aligned}
\|x_\alpha - x_{\alpha,n}\| &= \|(\alpha I + A_n^*A_n)^{-1}[\alpha(A^* - A_n^*) \\
&\quad + A_n^*(A_n - A)A^*](\alpha I + AA^*)^{-1}Ax_0\| \le I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \alpha\|(\alpha I + A_n^*A_n)^{-1}(A^* - A_n^*)(\alpha I + AA^*)^{-1}Ax_0\| \\
&\le \frac{\|A - A_n\|}{2\sqrt{\alpha}}\rho \le \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}},
\end{aligned}$$

$$I_2 := \|(\alpha I + A_n^*A_n)^{-1}A_n^*(A_n - A)A^*(\alpha I + AA^*)Ax_0\| \le \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}}.$$

И, наконец,

$$\begin{aligned}
\|x_{\alpha,n} - x_{\alpha,n}^\delta\| &= \|(\alpha I + A_n^*A_n)^{-1}A_n^*y - (\alpha I + A_n^*A_n)^{-1}A_n^*y_\delta\| \\
&\le \|(\alpha I + A_n^*A_n)^{-1}A_n^*(y - y_\delta)\| \le \frac{\delta}{2\sqrt{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Суммируя найденные выше оценки, получим искомую оценку. □

3. Принцип равновесия

Будем минимизировать правую часть (2.3), выбирая α согласно принципу равновесия. Суть этого принципа состоит в выборе параметра регуляризации α таким образом, чтобы уравновесить две функции, задающие оценку погрешности. В рассматриваемом случае эти функции (см. (2.3)) имеют вид

$$\Phi(\alpha) := \rho \ln^{-p} \frac{1}{\alpha},$$

$$\Psi(\alpha) := \frac{3\delta}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Поскольку $\varphi(t) = \ln^{-p} \frac{1}{t}$ — монотонно возрастающая функция, то с ростом α $\Phi(\alpha)$ возрастает, а $\Psi(\alpha)$ убывает. Теперь (2.3) можно переписать в виде

$$\|x_0 - x^\delta_{\alpha,n}\| \leq \Phi(\alpha) + \Psi(\alpha). \tag{3.1}$$

В силу поведения функций Φ и Ψ (а именно, их монотонности и вогнутости) выбор значения параметра регуляризации $\alpha = \hat{\alpha}$, минимизирующего правую часть (3.1), будет уравновешивать величины $\Phi(\alpha)$ и $\Psi(\alpha)$, т.е. $\Phi(\hat{\alpha}) = \Psi(\hat{\alpha})$ и, следовательно,

$$\|x_0 - x^\delta_{\hat{\alpha},n}\| \leq 2\Phi(\hat{\alpha}). \tag{3.2}$$

Однако, если функция φ неизвестна, то такой априорный выбор теоретически наилучшего значения $\hat{\alpha}$ невозможен. Поэтому в нашей ситуации необходимо использовать какое-нибудь апостериорное правило выбора α. С этой целью воспользуемся принципом равновесия. Чтобы его применить, рассмотрим дискретное множество возможных значений параметра регуляризации

$$\triangle_N = \{\alpha_i = (q^2)^i \alpha_0, \quad i = 1, 2, \ldots, N\}, \quad q > 1. \tag{3.3}$$

Здесь $\alpha_0 = n\delta^2$, $N : \alpha_N \asymp 1$.

Используя принцип равновесия, рассмотрим множество

$$M^+(\triangle_N) = \left\{\alpha_i \in \triangle_N : \|x^\delta_{\alpha_i,n} - x^\delta_{\alpha_j,n}\| \leq 4\Psi(\alpha_j), \quad j = 1, \ldots, i\right\}$$

и выберем значение параметра регуляризации по правилу

$$\alpha = \alpha_+ := \max\{\alpha \in M^+(\triangle_N)\}. \tag{3.4}$$

Ниже (см. теорему 4.1) будет показано, что выбор $\alpha = \alpha_+$ дает оценку погрешности, которая отличается от наилучшей возможной (3.2) только на множитель $3q$.

Чтобы доказать этот факт, рассмотрим вспомогательное множество

$$M(\triangle_N) := \{\alpha_i \in \triangle_N : \Phi(\alpha_j) \leq \Psi(\alpha_i), \quad j = 1, \ldots, i\}$$

и вспомогательную величину

$$\alpha_* := \max\{\alpha \in M(\triangle_N)\}.$$

Без потери общности будем считать, что

$$M(\triangle_N) \neq \emptyset, \quad \triangle_N \diagdown M(\triangle_N) \neq \emptyset.$$

Теперь можно оценить близость точного и приближенного решений для параметра регуляризации α_+.

4. Основные результаты

Теорема 4.1. *Пусть параметр регуляризации выбирается согласно правилу* (3.4). *Тогда имеет место следующая оценка:*

$$\|x_0 - x^\delta_{\alpha_+,n}\| \le 6q\Phi(\hat{\alpha}).$$

Доказательство. Начнем доказательство с установления неравенства $\alpha_* \le \alpha_+$. С учетом (3.1), поведения функций $\Phi(\alpha)$, $\Psi(\alpha)$ и определения множества $M(\triangle_N)$, при любом $\alpha_j < \alpha_*$ имеем

$$\begin{aligned}\|x^\delta_{\alpha_*,n} - x^\delta_{\alpha_j,n}\| &\le \|x_0 - x^\delta_{\alpha_*,n}\| + \|x_0 - x^\delta_{\alpha_j,n}\| \\ &\le \Phi(\alpha_*) + \Psi(\alpha_*) + \Phi(\alpha_j) + \Psi(\alpha_j) \le 2\Phi(\alpha_*) + \Psi(\alpha_*) + \Psi(\alpha_j) \\ &\le 3\Psi(\alpha_*) + \Psi(\alpha_j) \le 4\Psi(\alpha_j).\end{aligned}$$

Таким образом, включение $\alpha_* \in M^+(\Delta_N)$ доказано. А значит, выполняется $\alpha_* \le \alpha_+$.

Вновь используя (3.1) при $\alpha = \alpha_*$, а также определения множеств $M^+(\triangle_N)$ и $M(\triangle_N)$, заключаем

$$\|x_0 - x^\delta_{\alpha_+,n}\| \le \|x_0 - x^\delta_{\alpha_*,n}\| + \|x^\delta_{\alpha_*,n} - x^\delta_{\alpha_+,n}\| \le 6\Psi(\alpha_*). \tag{4.1}$$

В силу монотонности Ψ легко видеть, что

$$\Psi(q^2\alpha_*) = \frac{3\delta}{2\sqrt{q^2\alpha_*}} = \frac{1}{q}\cdot\frac{3\delta}{2\sqrt{\alpha_*}} = \frac{1}{q}\Psi(\alpha_*). \tag{4.2}$$

С другой стороны, очевидно, что $\alpha_* \le \hat{\alpha} \le q^2\alpha_*$. Вместе с (4.1) и (4.2) это дает

$$\|x_0 - x^\delta_{\alpha_+,n}\| \le 6q\Psi(q^2\alpha_*) \le 6q\Psi(\hat{\alpha}) = 6q\Phi(\hat{\alpha}) = 6q\rho\ln^{-p}\frac{1}{\hat{\alpha}}.$$

Теорема 4.1 доказана. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 4.1. *Тогда справедлива оценка*

$$\|x_0 - x^{\delta}_{\alpha_+,n}\| \le \tilde{c} \ln^{-p} \frac{1}{\delta},$$

где константа $\tilde{c}$ *в общем случае зависит только от* q, ρ *и* p, *а при* $\rho \ge 3/2 \quad \tilde{c} = 6q\rho$. *Более того, метод* (1.4), (1.5), (3.4) *гарантирует оптимальную по порядку точность приближения на классе задач* (1.1)–(1.2).

Доказательство. Так как при $\alpha = \hat{\alpha}$ справедливо $\Phi(\hat{\alpha}) = \Psi(\hat{\alpha})$, то

$$\rho \ln^{-p} \frac{1}{\hat{\alpha}} = \frac{3\delta}{2\sqrt{\hat{\alpha}}},$$

$$\sqrt{\hat{\alpha}} = \frac{3\delta}{2\rho} \ln^{p} \frac{1}{\hat{\alpha}},$$

$$\hat{\alpha} = \frac{9\delta^2}{4\rho^2} \ln^{2p} \frac{1}{\hat{\alpha}}.$$

Поскольку для любых $x > 0$ и $\nu > 0$ выполняется $\ln x < x^{\nu}$, то

$$\hat{\alpha} = \frac{9\delta^2}{4\rho^2} \ln^{2p} \frac{1}{\hat{\alpha}} \le \frac{9\delta^2}{4\rho^2} \frac{1}{\hat{\alpha}}.$$

Следовательно, для значения параметра регуляризации, теоретически минимизирующего погрешность, справедлива оценка

$$\hat{\alpha} \le \frac{3\delta}{2\rho}.$$

В итоге получаем

$$\|x_0 - x^{\delta}_{\alpha_+,n}\| \le 6q\rho \ln^{-p} \frac{2\rho}{3\delta} = \tilde{c} \ln^{-p} \frac{1}{\delta}.$$

С другой стороны, в работах [6, 14] было установлено, что погрешность восстановления произвольным приближенным методом точного решения x_0 из множества (1.2) по y_δ не может быть меньше величины $O(\ln^{-p} \frac{1}{\delta})$. Отсюда немедленно следует, что наш метод является оптимальным по порядку на классе жестко некорректных задач (1.1)–(1.2). □

Замечание 4.1. Проведем сравнительный анализ наших результатов с уже известными. Так, в статье [10] для решения уравнений (1.1) с $x_0 \in M_{p,\rho(A)}$ также использовался стандартный метод Тихонова, при этом в качестве правила останова рассматривался принцип невязки. Полученные в обеих работах ([10] и настоящей) порядки точности совпадают, в то же время наш подход имеет существенное преимущество. А именно, при построении метода из [10] задействована нижняя граница для возможных значений p: $p > p_0$, где величина $p_0 > 0$ предполагается известной. То же самое можно сказать и о методах из работ [12, 13]. В нашей же работе это ограничение снято и все результаты справедливы при любых $p > 0$.

Литература

[1] А. Б. Бакушинский, М. Ю. Кокурин, *Итеративные методы для решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами*, М.: Едиториал УРСС, 2002.

[2] М. Ю. Кокурин, Н. А. Юсупова, *О необходимых и достаточных условиях медленной сходимости методов решения линейных некорректных задач* // Изв. вузов. Матем., (2003), No. 2, 81–84.

[3] С. В. Переверзев, С. Г. Солодкий, *Оптимальная дискретизация некорректных задач* // Укр. мат. журн., **52** (2000), No. 1, 106–121.

[4] W. Freeden, F. Schneider, *Regularization wavelets and multiresolution* // Inverse Problems, (1998), No. 14, 225–243.

[5] T. Hohage, *Regularization of exponentially ill-posed problems* // Numer. Funct. Anal. Optim., (2000), No. 21, 439–464.

[6] B. A. Mair, *Tikhonov regularization for finitely and infinitely smoothing operators* // SIAM J. Math. Anal., **1** (1994), No. 25, 135–147.

[7] P. Mathe, S. Pereverzev, *Regularization of some linear ill-posed problems with discretized random noisy data* // Mathematics of Computation, **75** (2006), No. 256, 1913–1929.

[8] S. Pereverzev, E. Schock, *On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems* // SIAM J. Numer. Anal., (2005), No. 43, 2060–2076.

[9] R. Rummel, O. L. Colombo, *Gravity field determination from satellite gradiometry* // Bull. Geod., (1985), No. 59, 233–246.

[10] E. Schock, S. V. Pereverzev, *Morozov's discrepancy principle for Tikhonov regularization of severely ill-posed problems in finite-dimensional subspaces* // Numer. Funct. Anal. Optim., (2000), No. 21, 901–916.

[11] S. G. Solodky, *On a quasi-optimal regularized projection method for solving operator equations of the first kind* // Inverse Problems, **21** (2005), No. 4, 1473—1485.

[12] S. G. Solodky, A. V. Mosentsova, *Morozov's discrepancy principle for the Tikhonov regularization of exponentially ill-posed problems* // Comp. Meth. Appl. Math., **8** (2008), No. 1, 86–98.

[13] S. G. Solodky, A. V. Mosentsova, *Unsaturable methods for solving severely ill-posed problems* // Int. J. Comput. Sci. Math., **2** (2009), No. 3, 229–242.

[14] U. Tautenhahn, *Optimality for ill-posed problems under general source conditions* // Numer. Funct. Anal. and Optimiz., **1** (1998), No. 19, 377–398.

Сведения об авторах

Сергей Григорьевич Солодкий, Анна Викторовна Грушевая	Институт математики НАН Украины ул. Терещенковская 3 01601, Киев Украина *E-Mail:* solodky@imath.kiev.ua, anna_mos@imath.kiev.ua