Український математичний вісник
Том 8 **(2011)**, № 3, 421 – 446

О модулях гладкости и K-функционалах дробного порядка в пространствах Харди

Юрий С. Коломойцев

(*Представлена Р. М. Тригубом*)

Аннотация. Доказана эквивалентность специальных модулей гладкости и K-функционалов дробного порядка в пространстве H_p, $p > 0$. В качестве приложений получен аналог теоремы Харди–Литтльвуда, а также точные оценки приближения функций обобщенными средними Бохнера–Рисса.

2010 MSC. 30H10, 30E10.

Ключевые слова и фразы. Пространства Харди, K-функционал, модули гладкости, дробная производная.

1. Введение

Единичный круг обозначим через $D = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$. Аналитическая в единичном круге D функция f принадлежит пространству H_p, если

$$\|f\|_{H_p} = \sup_{0<\rho<1} \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Хорошо известно, что каждая функция $f \in H_p$, $p > 0$, имеет некасательный предел $f(e^{it})$ для почти всех $t \in [0, 2\pi)$, принадлежащий пространству L_p. Здесь и далее L_p обозначает пространство измеримых, 2π-периодических функций с конечной (квази-)нормой

$$\|f\|_p = \|f(e^{it})\|_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(e^{it})|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Имеет место равенство: $\|f\|_{H_p} = \|f\|_p$ (см. [11]).

Статья поступила в редакцию 21.03.2011

ISSN 1810 – 3200.

Любая функция из H_p, $p > 0$, раскладывается в круге D в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

где $z^k = \rho^k e^{ikt}$, $c_k = c_k(f)$ — коэффициенты ряда Тейлора функции f.

Пусть $r \in \mathbb{N}$, всюду далее:

$$f_r(z) = \sum_{k=r}^{\infty} c_k z^k,$$

$x_+ = \max(x, 0)$ и $[x]$ — целая часть числа x.

Биномиальные коэффициенты дробного порядка $\beta > 0$ обозначим через

$$\binom{\beta}{k} = \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-k+1)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

и $\binom{\beta}{0} = 1$. Мы будем неоднократно использовать следующую, хорошо известную, оценку (см., например, [29, гл. 1, §1]):

$$\left|\binom{\beta}{k}\right| \le \frac{C(\beta)}{k^{\beta+1}}. \tag{1.1}$$

Всюду далее C и C_j, $j = 1, 2, \ldots,$ — некоторые положительные константы, зависящие от указанных параметров. Запись $A(f, \varepsilon) \asymp B(f, \varepsilon)$ будет обозначать двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от f и ε.

Гладкость функций измеряют модулями гладкости разных порядков. См., например, работы [4,7,8,25,32,34,35,37,38], в которых изучаются и применяются к целому ряду задач анализа различные модули гладкости целого и дробного порядка.

В настоящей работе рассматриваются следующие модули гладкости дробного порядка $\beta > 0$:

1. *Контурный* (*граничный*) *модуль гладкости* определяют следующим образом:

$$\omega_\beta(f, \varepsilon)_p = \sup_{0<\delta<\varepsilon} \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\beta}{\nu} (-1)^\nu f(e^{i(t+\nu\delta)}) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.2}$$

При целых $\beta > 0$ свойства модуля гладкости (1.2) хорошо известны (см., например, [14, гл. 4]). Основные свойства данного модуля в случае дробных $\beta > 0$ см. в [4, 25].

2. *Радиальный модуль гладкости* определяют по формуле:

$$\omega_\beta(f,\mathcal{R},\varepsilon)_p = \left(\int\limits_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=0}^\infty \binom{\beta}{\nu}(-1)^\nu f(e^{-\nu\varepsilon}e^{it})\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.3)$$

Заметим, что величину (1.3) можно рассматривать как (квази-)норму разности функции f и ее обобщенных средних Абеля–Пуассона

$$P_\varepsilon^\beta(f,z) = \sum_{\nu=1}^\infty \binom{\beta}{\nu}(-1)^{\nu+1} f(e^{-\nu\varepsilon}z),$$

т.е.

$$\omega_\beta(f,\mathcal{R},\varepsilon)_p = \|f - P_\varepsilon^\beta\|_p.$$

Изучению двусторонних оценок приближения функций обобщенными средними Абеля–Пуассона в пространствах H_p посвящены работы [25, 27, 31, 32]. Приведем здесь теорему об эквивалентности контурного модуля гладкости (1.2) и радиального модуля гладкости (1.3) (другими словами, теорему об эквивалентности погрешности приближения функций обобщенными средними Абеля–Пуассона и модуля гладкости (1.2) в пространстве H_p).

Теорема A (см. [25, 27]). *Пусть* $f \in H_p$, $0 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{N} \cup ((1/p-1)_+, \infty)$. *Тогда*

$$\omega_\beta(f,\mathcal{R},\varepsilon)_p \asymp \omega_\beta(f,\varepsilon)_p, \quad \varepsilon \in (0,1).$$

Мы покажем (см. теорему 2.2), что если вместо модуля (1.2) в теореме A использовать соответствующий K-функционал (см. (1.11)), то ограничение $\beta > 1/p - 1$ можно заменить на $\beta > 0$. Аналогичное утверждение, дополняющее основные результаты работы [26], выполняется и в случае приближения функции обобщенными средними Бохнера–Рисса (см. теорему 5.2 ниже).

3. *Модифицированный радиальный модуль гладкости* введем следующим образом:

$$\omega_\beta(f,\mathcal{J},\varepsilon)_p = \left(\int\limits_0^{2\pi}\left|\sum_{\nu=0}^\infty \binom{\beta}{\nu}(-1)^\nu e^{-\nu\varepsilon} f(e^{-\nu\varepsilon}e^{it})\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1.4)$$

С помощью данного модуля гладкости мы получим двусторонние оценки для K-функционала, соответствующего дробной производной в смысле Римана–Лиувилля (см. (1.7)). Модуль (1.4) можно также рассматривать как разность функции f и ее средних

$$\widetilde{P}_{\varepsilon}^{\beta}(f,z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\binom{\beta}{\nu}(-1)^{\nu+1}e^{-\nu\varepsilon}f(e^{-\nu\varepsilon}z). \tag{1.5}$$

Перейдем к определению K-функционалов. Сначала рассмотрим K-функционал, соответствующий дробной производной в смысле Римана–Лиувилля. Пусть $\beta>0$, дробная производная в смысле Римана–Лиувилля, определяется следующим образом:

$$f^{(\beta)}(z)=\sum_{k=[\beta]}^{\infty}\frac{\Gamma(k-[\beta]+1+\beta)}{\Gamma(k-[\beta]+1)}c_k z^{k-[\beta]}. \tag{1.6}$$

Если $\beta\in\mathbb{N}$, то $f^{(\beta)}$ — обычная производная. Определение (1.6) можно найти в работе А. А. Пекарского [24]. K-функционал, соответствующий производной (1.6), определяют по формуле:

$$K_{\beta}(f,\varepsilon)_p=\inf_g\{\|f-g\|_p+\varepsilon^{\beta}\|g^{(\beta)}\|_p\}. \tag{1.7}$$

Отметим, что при $\beta\in\mathbb{N}$ имеет место соотношение (см. [8, 35]):

$$K_{\beta}(f,\varepsilon)_p\asymp\omega_{\beta}(f_{[\beta]},\varepsilon)_p,\quad \varepsilon\in(0,1). \tag{1.8}$$

Мы покажем (см. теорему 2.3 и следствие 2.2 ниже), что соотношение (1.8) имеет место и для дробных $\beta>(1/p-1)_+$.

Отметим также, что в терминах K-функционала (1.7) в работе [8] была получена следующая теорема типа Харди–Литтльвуда о росте дробной производной функции при подходе к границе.

Теорема B (см. [8]). *Пусть $f\in H_p$, $0<p<\infty$, $\beta>0$. Тогда:*

1) *имеет место неравенство*

$$\|f^{(\beta)}(re^{it})\|_p\le C(1-r)^{-\beta}K_{\beta}(f,1-r)_p,\quad 0<r<1,$$

где C — константа, не зависящая от f и r;

2) *пусть $\omega(t)$ — неубывающая непрерывная функция на $[0,1]$ такая, что $\omega(+0)=0$ и*

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{\omega(u)}{u}\,du\le C\omega(\varepsilon),\quad \varepsilon\in(0,1),$$

где C — константа, не зависящая от ε. Тогда из неравенства

$$\|f^{(\beta)}(re^{it})\|_p \le C(1-r)^{-\beta}\omega(1-r), \quad r \to 1-0,$$

следует, что

$$K_\beta(f,\varepsilon)_p \le C\omega(\varepsilon), \quad \varepsilon \in (0,1).$$

Мы покажем (см. теорему 2.3), что K-функционал в теореме B можно заменить на специальный модуль гладкости, а также докажем аналог теоремы B для производных в смысле Вейля.

В настоящей работе мы будем рассматривать следующие производные в смысле Вейля

$$\mathcal{R}^\beta f(z) = \sum_{k=0}^\infty k^\beta c_k z^k \tag{1.9}$$

и

$$\mathcal{J}^\beta f(z) = \sum_{k=0}^\infty (k+1)^\beta c_k z^k. \tag{1.10}$$

K-функционалы, соответствующие производным (1.9) и (1.10), определяют по следующим формулам:

$$K_\beta(f,\mathcal{R},\varepsilon)_p = \inf_g\{\|f-g\|_p + \varepsilon^\beta\|\mathcal{R}^\beta g\|_p\} \tag{1.11}$$

и

$$K_\beta(f,\mathcal{J},\varepsilon)_p = \inf_g\{\|f-g\|_p + \varepsilon^\beta\|\mathcal{J}^\beta g\|_p\}. \tag{1.12}$$

В работе [9] (см. также [1,17]) было доказано, что при $\beta \in \mathbb{N}$ имеет место соотношение:

$$K_\beta(f,\mathcal{R},\varepsilon)_p \asymp \omega_\beta(f,\varepsilon)_p, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{1.13}$$

Ниже (см. теорему 2.4) мы докажем соотношение (1.13) для дробных $\beta > (1/p-1)_+$.

Следует отметить статью [38], а также монографию [14], в которых содержится достаточно полный обзор результатов, касающихся свойств различных модулей гладкости и K-функционалов.

Настоящая статья имеет следующую структуру. В § 2 излагаются основные результаты работы. В § 3 приводятся вспомогательные теоремы о мультипликаторах степенных рядов в пространствах Харди H_p, а также доказываются вспомогательные леммы, используемые в последующих параграфах. В § 4 доказываются основные результаты работы. В § 5, в качестве приложений, получен аналог теоремы

Харди–Литтльвуда о росте производной функции при подходе к границе, а также получены двусторонние оценки приближения функций обобщенными средними Бохнера–Рисса.

Доказательство основных результатов настоящей статьи основано на методах и теоремах о мультипликаторах из работы [37].

2. Формулировка основных результатов

2.1. Модули гладкости и K-функционалы в H_p, $p > 0$

Следующие теоремы обобщают результаты работы [17] на случай дробных $\beta > 0$.

Теорема 2.1. *Пусть $f \in H_p$, $0 < p < \infty$, $\beta > 0$. Тогда*

$$K_\beta(f, \mathcal{J}, \varepsilon)_p \asymp \omega_\beta(f, \mathcal{J}, \varepsilon)_p, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{2.1}$$

Теорема 2.2. *Пусть $f \in H_p$, $0 < p < \infty$, $\beta > 0$. Тогда*

$$K_\beta(f, \mathcal{R}, \varepsilon)_p \asymp \omega_\beta(f, \mathcal{R}, \varepsilon)_p, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{2.2}$$

Из теорем 2.1 и 2.2, а также леммы 3.5 (см. ниже) получаем:

Следствие 2.1. *Пусть $f \in H_p$, $0 < p < \infty$, $\beta > 0$. Тогда*

$$\omega_\beta(f, \mathcal{R}, \varepsilon)_p \asymp \omega_\beta(f_1, \mathcal{J}, \varepsilon)_p, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{2.3}$$

В следующей теореме приводится соотношение между K-функционалом, соответствующим дробной производной в смысле Римана–Лиувилля (1.6), и модулем гладкости (1.4).

Теорема 2.3. *Пусть $f \in H_p$, $0 < p < \infty$, $\beta > 0$. Тогда*

$$K_\beta(f, \varepsilon)_p \asymp \omega_\beta(f_{[\beta]}, \mathcal{J}, \varepsilon)_p, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{2.4}$$

Для обычного контурного модуля гладкости (1.2) имеет место следующая теорема.

Теорема 2.4. *Пусть $f \in H_p$, $0 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{N} \cup ((1/p - 1)_+, \infty)$. Тогда*

$$K_\beta(f, \mathcal{R}, \varepsilon)_p \asymp \omega_\beta(f, \varepsilon)_p, \quad \varepsilon \in (0,1).$$

Комбинируя теоремы 2.1–2.4 и следствие 2.1, можно получить соотношения эквивалентности между различными модулями гладкости и K-функционалами. Например, имеет место следующее утверждение.

Следствие 2.2. *Пусть $f \in H_p$, $0 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{N} \cup ((1/p - 1)_+, \infty)$. Тогда*

$$\omega_\beta(f, \varepsilon)_p \asymp \omega_\beta(f_1, \mathcal{J}, \varepsilon)_p, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{2.5}$$

2.2. Модули гладкости и K-функционалы в L_p, $0 < p < 1$

Отметим, что обычный K-функционал в пространстве L_p, $0 < p < 1$, тождественно равен 0 (см. [7]). Однако, как было показано в работе [7], в этом случае K-функционал можно заменить его реализацией, которую принято обозначать через $\widetilde{K}$. Чтобы определить объект $\widetilde{K}$ введем необходимые обозначения.

Множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n обозначим символом $\mathcal{T}_n$. Пусть

$$T_n(e^{it}) = \sum_k a_k e^{ikt} \in \mathcal{T}_n.$$

Дробную производную в смысле Вейля полинома T_n определяют следующим образом:

$$\mathcal{D}^\beta T_n(e^{it}) = \sum_k (ik)^\beta a_k e^{ikt}, \quad (ik)^\beta = |k|^\beta e^{\frac{i\pi\beta}{2} \operatorname{sign} k}.$$

Положим

$$\widetilde{K}_\beta(f,\varepsilon)_p = \inf_{T \in \mathcal{T}_{[1/\varepsilon]}} \{\|f - T\|_p + \varepsilon^\beta \|\mathcal{D}^\beta T\|_p\}. \tag{2.6}$$

Следующая теорема при $\beta \in \mathbb{N}$ была получена в работе [7], а для дробных β является, по-видимому, новой.

Теорема 2.5. *Пусть $f \in L_p$, $0 < p < 1$, $\beta \in \mathbb{N} \cup (1/p - 1, \infty)$. Тогда*

$$\widetilde{K}_\beta(f,\varepsilon)_p \asymp \omega_\beta(f,\varepsilon)_p, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{2.7}$$

3. Вспомогательные утверждения

Для доказательства основных результатов мы будем использовать теоремы о мультипликаторах из работы [37] (см. также [14, гл.7]).

Числовая последовательность $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ называется мультипликатором в H_p (будем писать $\{\lambda_k\} \in M_p$), если для любой функции $f \in H_p$ с коэффициентами Тейлора $\{c_k\}$

$$(\Lambda f)(z) = \sum_{k=0}^\infty \lambda_k c_k z^k \in H_p$$

и существует константа γ такая, что для любой функции $f \in H_p$

$$\|\Lambda f\|_{H_p} \le \gamma \|f\|_{H_p}, \quad \|\{\lambda_k\}\|_{M_p} = \inf \gamma.$$

Если $\varphi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{C}$, $(\mathbb{R}_+ = [0, \infty))$, то будем писать $\varphi \in M_p$, если

$$\|\varphi\|_{M_p} = \sup_{\varepsilon>0} \|\{\varphi(\varepsilon k)\}\|_{M_p} < \infty.$$

Приведем здесь несколько свойств мультипликаторов (см., например, [14, гл. 7], [37]):

1) $M_p \subset M_q \subset M_r$ при $0 < p < q \leq 1 \leq r \leq \infty$;

2) $\|\{\lambda_k \mu_k\}\|_{M_p} \leq \|\lambda_k\|_{M_p} \|\mu_k\|_{M_p}$ при $p > 0$;

3) $\|\{\lambda_k + \mu_k\}\|^s_{M_p} \leq \|\lambda_k\|^s_{M_p} + \|\mu_k\|^s_{M_p}$ при $s = \min(1, p)$.

Лемма 3.1 (принцип сравнения [37]). *Пусть* $\{\lambda_k\}$ *и* $\{\widetilde{\lambda}_k\}$ *— две такие последовательности, что из* $\lambda_k = 0$ *следует* $\widetilde{\lambda}_k = 0$, *а* $K = \inf \|\{\widetilde{\lambda}_k/\lambda_k\}\|_{M_p} < \infty$ (*нижняя грань относится к выбору значений дробей* $0/0$), $p > 0$. *Тогда для любой функции* f *такой, что* $\Lambda f \in H_p$ *выполняется неравенство* $\|\widetilde{\Lambda} f\|_{H_p} \leq K \|\Lambda f\|_{H_p}$.

Приведем одно достаточное условие для мультипликаторов степенных рядов.

Лемма 3.2. *Пусть* $0 < p \leq \infty$, *а* $\varphi \in C^r(\mathbb{R}_+)$ *при некотором натуральном* $r > 1/s - 1/2$, $s = \min(1, p)$. *Если*

$$|\varphi(x)| \leq \frac{A}{1 + x^a}, \quad \left|\frac{\partial^r \varphi}{\partial x^r}(x)\right| \leq \frac{B}{1 + x^b},$$

где $b = a > 1/s - 1/2$, *то*

$$\|\varphi\|_{M_p} \leq C(r, p, a, b)(A + B).$$

Доказательство. При $0 < p \leq 1$ доказательство леммы 3.2 можно найти в [37]. В случае $p \geq 1$ продолжим φ на $\mathbb{R}$ с сохранением ее свойств, например, по методу Хестенса (см. [30]). Тогда по теореме 1 из статьи [23] получим, что продолженная функция представляется в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье. Таким образом, применив теорему 1 из статьи [36], а также неравенство

$$\|\{\lambda_k\}\|_{M_p} \leq \|\{\lambda_k\}\|_{M_\infty},$$

которое имеет место для любого $p \in [1, \infty)$ (см., например, [39, с. 284]), мы докажем лемму 3.2. $\square$

Следующая лемма доказана в статье [8].

Лемма 3.3. *Пусть $f \in H_p$, $0 < p < \infty$, $\beta > 0$. Тогда*

$$\|\mathcal{J}^\beta f(re^{it})\|_p \le C(1-r)^{-\beta}\|f\|_p, \quad 0 < r < 1, \tag{3.1}$$

где C — константа, не зависящая от f и r.

Из леммы 3.3 нетрудно получить неравенство типа Бернштейна для аналитических полиномов (см. [2, 19]). Далее множество аналитических полиномов порядка не выше n обозначаем символом $\mathcal{T}_n^+$, т.е.

$$\mathcal{T}_n^+ = \operatorname{span}\{\, e^{ikt} \,:\, 0 \le k \le n,\ k \in \mathbb{Z}\,\}.$$

Лемма 3.4. *Пусть $0 < p < \infty$, $\beta > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любого полинома $T \in \mathcal{T}_n^+$ имеет место неравенство*

$$\|\mathcal{J}^\beta T\|_p \le Cn^\beta \|T\|_p, \tag{3.2}$$

где C — константа, не зависящая от T и n.

В следующей лемме приведены соотношения между производными (1.6), (1.9) и (1.10).

Лемма 3.5. *Пусть $f \in H_p$, $0 < p < \infty$, $\beta > 0$. Тогда*

$$C^{-1}\|\mathcal{J}^\beta f_{[\beta]}\|_p \le \|f^{(\beta)}\|_p \le C\|\mathcal{J}^\beta f_{[\beta]}\|_p \tag{3.3}$$

и

$$C^{-1}\|\mathcal{J}^\beta f_1\|_p \le \|\mathcal{R}^\beta f\|_p \le C\|\mathcal{J}^\beta f\|_p, \tag{3.4}$$

где C — константа, не зависящая от функции f.

Доказательство. Неравенства (3.3) вытекают из леммы 1 статьи [24]. Докажем нижнее неравенство в (3.4). В силу принципа сравнения (лемма 3.1) достаточно показать, что последовательность

$$\lambda_k = \begin{cases} \left(\frac{k+1}{k}\right)^\beta - 1, & k \ge 1; \\ 0, & k = 0 \end{cases}$$

является мультипликатором в пространстве H_p.

Пусть функция $h \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ и

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1/4; \\ 1, & x > 1/2. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = h(x)((1+1/x)^\beta - 1)$. Используя лемму 3.2, нетрудно проверить, что $\varphi \in M_p$, а поскольку $\varphi(k) = \lambda_k$, то и $\{\lambda_k\} \in M_p$.

Верхнее неравенство в (3.4) доказывается аналогично.

Лемма 3.5 доказана. $\square$

Используя леммы 3.3 и 3.5, получаем следующее утверждение.

Лемма 3.6. *Пусть* $f \in H_p$, $0 < p < \infty$, $\beta > 0$. *Тогда*

$$\|\mathcal{R}^\beta f(re^{it})\|_p \le C(1-r)^{-\beta}\|f\|_p, \quad 0 < r < 1, \tag{3.5}$$

где C — *константа, не зависящая от* f *и* r.

Из лемм 3.5 и 3.6 получаем также, что для любого полинома $T \in \mathcal{T}_n^+$ и $\beta > 0$

$$\|\mathcal{R}^\beta T\|_p \le Cn^\beta \|T\|_p, \tag{3.6}$$

где C — константа, не зависящая от T и n.

Отметим, что для тригонометрических полиномов с полным спектром неравенство вида (3.6) с производной Вейля $\mathcal{D}^\beta$ было получено в работах [3, 13]. Однако, в отличие от случая аналитических полиномов, при $\beta \notin \mathbb{N}$ и $0 < p < 1$ данное неравенство имеет место только для $\beta > 1/p - 1$ (см. [3]).

Лемма 3.7. *Пусть* $0 < p < \infty$, $\beta > 0$ *и* $\rho_{\varepsilon,j}(x) = (x + j\varepsilon)^\beta h(x)$, *где* $j = 0, 1$, $h \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\operatorname{supp} h \subset [0, 2)$ *и* $h(x) = 1$ *при* $x \le 1$. *Тогда*

$$\sup_{\varepsilon \in (0,1)} \|\{\rho_{\varepsilon,j}(\varepsilon k)\}\|_{M_p} < \infty.$$

Доказательство. Пусть функция $f(z) = \sum_k c_k z^k \in H_p$. Применяя неравенства типа Бернштейна (3.2) и (3.6), а также учитывая, что функция $h \in M_p$, находим:

$$\left\| \sum_{k=0}^\infty (\varepsilon k + j\varepsilon)^\beta h(\varepsilon k) c_k e^{ikt} \right\|_p \le C_1 \left\| \sum_{k=0}^\infty h(\varepsilon k) c_k e^{ikt} \right\|_p \le C_2 \|f\|_p.$$

Лемма 3.7 доказана. $\square$

Лемма 3.8. *Пусть* $f \in L_p$, $0 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{N} \cup ((1/p-1)_+, \infty)$. *Тогда*

1) $$\omega_\beta(f, \varepsilon)_p \le C_1 \|f\|_p, \tag{3.7}$$

2) *если* $\lambda > 0$, *то*

$$\omega_\beta(f, \lambda\varepsilon)_p \le C_1(\lambda + 1)^{C_2} \omega_\beta(f, \varepsilon)_p,$$

где C_1 *и* C_2 — *константы, не зависящие от* f, ε *и* λ.

Доказательство леммы 3.8 можно найти в работе [25] (см. также в [4] случай $p \ge 1$).

В следующей лемме показано, что для специальных модулей гладкости (1.3) и (1.4) свойство (3.7) имеет место для любого $\beta > 0$.

Лемма 3.9. *Пусть* $f \in H_p$, $0 < p < \infty$, $\beta > 0$ *и* $\varepsilon \in (0,1)$. *Тогда:*

1) $$\omega_\beta(f, \mathcal{J}, \varepsilon)_p \le C\|f\|_p; \tag{3.8}$$

2) $$\omega_\beta(f, \mathcal{R}, \varepsilon)_p \le C\|f\|_p, \tag{3.9}$$

где C *— константа, не зависящая от* f *и* ε.

Доказательство. Для доказательства утверждения 1) введем функцию

$$\varphi_\varepsilon(x) = (1 - e^{-(x+\varepsilon)})^\beta. \tag{3.10}$$

Заметим, что

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\beta}{\nu} (-1)^\nu e^{-\varepsilon\nu} f(e^{-\varepsilon\nu} z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_\varepsilon(\varepsilon k) c_k z^k.$$

Таким образом, для доказательства неравенства (3.8) достаточно показать, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \|\{\varphi_\varepsilon(\varepsilon k)\}\|_{M_p} < \infty. \tag{3.11}$$

Положим $\varphi_{\varepsilon,j} = h_j^2 \cdot \varphi_\varepsilon$, где функции $h_j \in C^\infty(\mathbb{R})$, $j = 1, 2$, определены следующими равенствами:

$$h_1(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 2, \end{cases} \qquad h_2(x) = 1 - h_1(x). \tag{3.12}$$

Проверим сначала, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \|\{\varphi_{\varepsilon,1}(\varepsilon k)\}\|_{M_p} < \infty. \tag{3.13}$$

Для этого представим функцию $\varphi_{\varepsilon,1}$ в виде следующего произведения:

$$\varphi_{\varepsilon,1} = \rho_\varepsilon \cdot \sigma_\varepsilon,$$

где

$$\rho_\varepsilon(x) = (x+\varepsilon)^\beta h_1(x) \quad \text{и} \quad \sigma_\varepsilon(x) = \frac{\varphi_\varepsilon(x) h_1(x)}{(x+\varepsilon)^\beta}.$$

Функция $\sigma_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ имеет компактный носитель, а модуль каждой ее производной ограничен некоторой константой, не зависящей от ε. Следовательно, $\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \|\sigma_\varepsilon\|_{M_p} < \infty$ (см. лемму 3.2). Таким образом, применяя лемму 3.7 к функции ρ_ε, получаем (3.13).

Теперь проверим, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \|\varphi_{\varepsilon,2}\|_{M_p} < \infty. \tag{3.14}$$

Для этого представим функцию $\varphi_{\varepsilon,2}$ в виде следующей суммы:

$$\varphi_{\varepsilon,2} = \psi + \chi_\varepsilon,$$

где

$$\psi(x) = (h_2(x))^2 \quad \text{и} \quad \chi_\varepsilon(x) = (\varphi_\varepsilon(x) - 1)(h_2(x))^2.$$

Используя лемму 3.2, а также очевидные свойства мультипликаторов нетрудно проверить, что функция $\psi \in M_p$. Функция $\chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ и при $x \to \infty$ убывает к нулю вместе с каждой своей производной как $O(e^{-\frac{x}{2}})$, причем константы в O не зависят от ε. Таким образом, применяя лемму 3.2 к функции χ_ε, получаем, что $\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \|\chi_\varepsilon\|_{M_p} < \infty$. Следовательно, имеет место (3.14).

Объединяя (3.13) и (3.14), получаем (3.11).

Доказательство утверждения 2) аналогично доказательству утверждения 1). Нужно лишь вместо функции φ_ε рассмотреть функцию $\varphi = \varphi_0$ и применить соответствующие леммы.

Лемма 3.9 доказана. $\square$

4. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 2.1. Проверим сначала, что

$$\omega_\beta(f, \mathcal{J}, \varepsilon)_p \le C_1 \varepsilon^\beta \|\mathcal{J}^\beta f\|_p \tag{4.1}$$

и

$$\varepsilon^\beta \|\mathcal{J}^\beta \widetilde{P}_\varepsilon^\beta(f)\|_p \le C_2 \omega_\beta(f, \mathcal{J}, \varepsilon)_p, \tag{4.2}$$

где C_1 и C_2 — константы, не зависящие от f и ε, а операторы $\widetilde{P}_\varepsilon^\beta$ определены в (1.5).

Для доказательства (4.1) и (4.2), в силу принципа сравнения (лемма 3.1), достаточно показать, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \left\| \left\{ \frac{\varphi_\varepsilon(\varepsilon k)}{(\varepsilon k + \varepsilon)^\beta} \right\} \right\|_{M_p} < \infty \tag{4.3}$$

и

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \left\| \left\{ \frac{(\varepsilon k + \varepsilon)^\beta (1 - \varphi_\varepsilon(\varepsilon k))}{\varphi_\varepsilon(\varepsilon k)} \right\} \right\|_{M_p} < \infty, \tag{4.4}$$

где $\varphi_\varepsilon(x) = (1 - e^{-(x+\varepsilon)})^\beta$.

Введем функции

$$\xi_\varepsilon(x) = \frac{\varphi_\varepsilon(x)}{(x+\varepsilon)^\beta} \quad \text{и} \quad \eta_\varepsilon(x) = \frac{(x+\varepsilon)^\beta (1 - \varphi_\varepsilon(x))}{\varphi_\varepsilon(x)}.$$

Обозначим: $\xi_{\varepsilon,j} = h_j \cdot \xi_\varepsilon$, $\eta_{\varepsilon,j} = h_j \cdot \eta_\varepsilon$, $j = 1, 2$, где h_j — функции, определенные в доказательстве леммы 3.9 равенствами (3.12).

Функция $\xi_{\varepsilon,1}$ принадлежит пространству $C^\infty(\mathbb{R}_+)$ и имеет компактный носитель, а модуль каждой производной $\xi_{\varepsilon,1}$ ограничен константой, не зависящей от ε; применяя к этой функции лемму 3.2, получаем, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \|\xi_{\varepsilon,1}\|_{M_p} < \infty. \tag{4.5}$$

Представим функцию $\xi_{\varepsilon,2}$ в виде следующего произведения

$$\xi_{\varepsilon,2} = \rho_\varepsilon \cdot \varphi_\varepsilon,$$

где $\rho_\varepsilon(x) = h_2(x)(x+\varepsilon)^{-\beta}$. Применяя лемму 3.2 (см. также примеры в [37]), нетрудно проверить, что $\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \|\rho_\varepsilon\|_{M_p} < \infty$. Используя утверждение 1) леммы 3.9 и элементарные свойства мультипликаторов, получаем, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \|\{\xi_{\varepsilon,2}(\varepsilon k)\}\|_{M_p} < \infty. \tag{4.6}$$

Объединяя (4.5) и (4.6), имеем (4.3).

Исследуем теперь функцию η_ε. Представим $\eta_{\varepsilon,1}$ в виде произведения:

$$\eta_{\varepsilon,1} = \psi_\varepsilon \cdot \chi_\varepsilon,$$

где

$$\psi_\varepsilon(x) = 1 - \varphi_\varepsilon(x) \quad \text{и} \quad \chi_\varepsilon(x) = h_1(x)(x+\varepsilon)^{\beta}(\varphi_\varepsilon(x))^{-1}.$$

В силу утверждения 1) леммы 3.9 имеем $\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \|\{\psi_\varepsilon(\varepsilon k)\}\|_{M_p} < \infty$. Используя лемму 3.2, нетрудно проверить, что и $\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \|\chi_\varepsilon\|_{M_p} < \infty$. Таким образом,

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \|\{\eta_{\varepsilon,1}(\varepsilon k)\}\|_{M_p} < \infty. \tag{4.7}$$

Функция $\eta_{\varepsilon,2} \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ и при $x \to \infty$ убывает к нулю вместе с каждой своей производной как $O(e^{-\frac{x}{2}})$, причем константы в O не зависят от ε. Применяя лемму 3.2, получаем, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)} \|\{\eta_{\varepsilon,2}(\varepsilon k)\}\|_{M_p} < \infty. \tag{4.8}$$

Объединяя (4.7) и (4.8), имеем (4.4).

Таким образом неравенства (4.1) и (4.2) доказаны. Выведем теперь из этих неравенств двустороннее неравенство (2.1).

Находим:

$$K_\beta(f,\mathcal{J},\varepsilon)_p \le \|f-\widetilde{P}_\varepsilon^\beta(f)\|_p + \varepsilon^\beta\|\mathcal{J}^\beta\widetilde{P}_\varepsilon^\beta(f)\|_p \\ \le (1+C_2)\omega_\beta(f,\mathcal{J},\varepsilon)_p. \quad (4.9)$$

Докажем оценку снизу. При произвольной функции g такой, что $\mathcal{J}^\beta g \in H_p$ и $s=\min(1,p)$, имеем:

$$\omega_\beta(f,\mathcal{J},\varepsilon)_p^s = \|f-\widetilde{P}_\varepsilon^\beta(f)\|_p^s \\ \le \|(f-g)-\widetilde{P}_\varepsilon^\beta(f-g)\|_p^s + \|g-\widetilde{P}_\varepsilon^\beta(g)\|_p^s \\ \le (1+\|\widetilde{P}_\varepsilon^\beta\|_{H_p\to H_p}^s)\|f-g\|_p^s + C_1^s\varepsilon^{\beta p}\|\mathcal{J}^\beta g\|_p^s. \quad (4.10)$$

Осталось перейти к нижней грани по g и учесть, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)}\|\widetilde{P}_\varepsilon^\beta\|_{H_p\to H_p} = \sup_{\varepsilon\in(0,1)}\|\{1-\varphi_\varepsilon(\varepsilon k)\}\|_{M_p} < \infty$$

(см. утверждение 1) леммы 3.9).

Теорема 2.1 доказана. □

Доказательство теоремы 2.2 аналогично доказательству теоремы 2.1.

Доказательство теоремы 2.3. Докажем оценку сверху. Используя неравенства (3.3) и (4.2), находим:

$$K_\beta(f,\varepsilon)_p = K_\beta(f_{[\beta]},\varepsilon)_p \\ \le \|f_{[\beta]}-\widetilde{P}_\varepsilon^\beta(f_{[\beta]})\|_p + \varepsilon^\beta\|(\widetilde{P}_\varepsilon^\beta(f_{[\beta]}))^{(\beta)}\|_p \\ \le \omega_\beta(f_{[\beta]},\mathcal{J},\varepsilon)_p + C_1\varepsilon^\beta\|\mathcal{J}^\beta\widetilde{P}_\varepsilon^\beta(f_{[\beta]})\|_p \\ \le C_2\omega_\beta(f_{[\beta]},\mathcal{J},\varepsilon)_p. \quad (4.11)$$

Докажем оценку снизу. Пусть $s=\min(1,p)$. Применяя неравенство

$$|c_k(f)| \le C(p)(k+1)^{\frac{1}{s}-1}\|f\|_p$$

(см., например, [28]), неравенства (4.1) и (3.3), а также учитывая, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)}\|\widetilde{P}_\varepsilon^\beta\|_{H_p\to H_p} = \sup_{\varepsilon\in(0,1)}\|\{1-\varphi_\varepsilon(\varepsilon k)\}\|_{M_p} < \infty,$$

находим:

$$\omega_\beta(f_{[\beta]},\mathcal{J},\varepsilon)_p^s = \|f_{[\beta]}-\widetilde{P}_\varepsilon^\beta(f_{[\beta]})\|_p^s \\ \le \|(f_{[\beta]}-g)-\widetilde{P}_\varepsilon^\beta(f_{[\beta]}-g)\|_p^s + \|g-\widetilde{P}_\varepsilon^\beta(g)\|_p^s$$

$$\le (1 + \|\widetilde{P}_\varepsilon^\beta\|_{H_p\to H_p}^s)\|f_{[\beta]} - g\|_p^s + C_3^s\varepsilon^{\beta s}\|\mathcal{J}^\beta g\|_p^s$$
$$\le C_4(\|f_{[\beta]} - g\|_p^s + \varepsilon^{\beta s}\|\mathcal{J}^\beta g_{[\beta]}\|_p^s)$$
$$\le C_5(\|f_{[\beta]} - g\|_p^s + \varepsilon^{\beta s}\|g^{(\beta)}\|_p^s).$$

Остается только перейти к нижней грани по g.

Теорема 2.3 доказана. □

Доказательство теоремы 2.4 сразу следует из теоремы A и теоремы 2.2.

Доказательство теоремы 2.5. Основным инструментом для доказательства теоремы 2.5 является следующее неравенство типа Никольского–Стечкина–Боаса, полученное в работе [21].

Лемма 4.1. *Пусть* $0 < p < 1$, $\beta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ *и* $0 < h, \delta \le \frac{\pi}{n}$. *Тогда найдется константа* $C > 0$, *зависящая только от* p *и* β *такая, что для каждого полинома* $T_n \in \mathcal{T}_n$ *имеют место неравенства*

$$C^{-1}h^{-\beta}\|\Delta_h^\beta T_n\|_p \le \|\mathcal{D}^\beta T_n\|_p \le C\delta^{-\beta}\|\Delta_\delta^\beta T_n\|_p, \tag{4.12}$$

где

$$\Delta_\delta^\beta T_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\binom{\beta}{\nu}T_n(x + (\beta - \nu)\delta).$$

Докажем оценку сверху в неравенствах (2.7). Пусть $n = [1/\varepsilon]$ и $T_n \in \mathcal{T}_n$. Используя утверждение 1) леммы 3.8 и лемму 4.1, находим:

$$\omega_\beta(f,\varepsilon)_p^p \le C_1\{\|f - T_n\|_p^p + \omega_\beta(T_n,\varepsilon)_p^p\}$$
$$\le C_2\{\|f - T_n\|_p^p + \varepsilon^\beta\|\mathcal{D}^\beta T_n\|_p^p\}.$$

Остается только перейти к нижней грани по T_n.

Докажем оценку снизу. Пусть $f \in L_p$, $\beta > 1/p - 1$ и $n = [1/\varepsilon]$. Из теоремы 1 статьи [20] (см. также [33]), равенства $\Delta_h^{\beta+\alpha} = \Delta_h^\alpha(\Delta_h^\beta)$ и утверждения 1) леммы 3.8 вытекает существование полинома $T_n^* \in \mathcal{T}_n$ такого, что

$$\|f - T_n^*\|_p \le C\omega_\beta(f, 1/n)_p, \tag{4.13}$$

где C — константа, зависящая только от p и β. Неравенство (4.13) называется теоремой типа Джексона. Используя лемму 4.1, неравенство (4.13), а также утверждение 2) леммы 3.8, находим:

$$K_\beta(f,\varepsilon)_p \le \|f - T_n^*\|_p + \varepsilon^\beta\|\mathcal{D}^\beta T_n^*\|_p$$
$$\le C_3\{\omega_\beta(f, 1/n)_p + \|\Delta_{1/n}^\beta T_n^*\|_p\}$$

$$\le C_4\{\omega_\beta(f,1/n)_p + \|\Delta^\beta_{1/n} f\|_p\}$$
$$\le C_5\omega_\beta(f,1/n)_p \le C_6\omega_\beta(f,\varepsilon)_p. \quad (4.14)$$

Теорема 2.5 доказана. □

5. Приложения

5.1. Аналог теоремы Харди–Литтльвуда

Следующий классический результат был получен Г. Х. Харди и Дж. Е. Литтльвудом в работе [6]:

Пусть $f \in H_p$, $f^{\langle\beta\rangle}(z) = \sum(\Gamma(k+1)/\Gamma(k+1-\beta))c_k(f)z^{k-\beta}$. *Если* $f \in Lip(\alpha,p)$, $-1+\alpha<\beta<\alpha$, *то* $f^{\langle\beta\rangle} \in Lip(\alpha-\beta,p)$.

Этот результат в различных направлениях обобщали А. Зигмунд [15], Ю. А. Брудный и И. Е. Гопенгауз [18], Э. А. Стороженко [32], М. Павлович [10], А. В. Товстолис и Р. М. Тригуб [35], [14, гл. 8], Ю. Крякин и В. Требелс [8] и др.

Следующая теорема является обобщением теоремы 2.3 статьи [10] на случай дробных $\beta>0$, а также является аналогом теоремы B в случае производной в смысле Вейеля $\mathcal{R}^\beta$.

Теорема 5.1. *Пусть* $f \in H_p$, $0<p<\infty$, $\beta>0$. *Тогда:*

1) *имеет место неравенство*

$$\|\mathcal{R}^\beta f(re^{it})\|_p \le C(1-r)^{-\beta}\omega_\beta(f,\mathcal{R},1-r)_p, \quad 0<r<1, \quad (5.1)$$

где C *— константа, не зависящая от* f *и* r*;*

2) *пусть* $\omega(t)$ *— неубывающая непрерывная функция на* $[0,1]$ *такая, что* $\omega(+0)=0$ *и*

$$\int_0^\varepsilon \frac{\omega(u)}{u}\,du \le C\omega(\varepsilon), \quad \varepsilon\in(0,1), \quad (5.2)$$

где C *— константа, не зависящая от* ε. *Тогда из неравенства*

$$\|\mathcal{R}^\beta f(re^{it})\|_p \le C(1-r)^{-\beta}\omega(1-r), \quad r\to 1-0, \quad (5.3)$$

следует

$$\omega_\beta(f,\mathcal{R},\varepsilon)_p \le C\omega(\varepsilon), \quad \varepsilon\in(0,1). \quad (5.4)$$

Замечание 5.1. Из теорем 2.2 и 2.4 сразу получаем, что модуль гладкости в формулировке теоремы 5.1 можно заменить на соответствующий K-функционал (1.11) и модуль гладкости (1.2) при $\beta > (1/p-1)_+$.

Замечание 5.2. Отметим, что условие (5.2) в формулировке теоремы 5.1 ослабить нельзя. Другими словами, теорема 5.1 является точной. Этот факт можно доказать, рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 3.11 статьи [8].

В качестве вспомогательного объекта для доказательства теоремы 5.1 мы будем использовать следующую интегро-дифференциальную характеристику функции f:

$$w_\beta(f,\varepsilon)_p = \left\| \int\limits_{1-\varepsilon}^{1} \Big(\log\frac{1}{\rho}\Big)^{\beta-1}\frac{1}{\rho}\cdot\mathcal{R}^\beta f(\rho e^{it})\,d\rho \right\|_p. \tag{5.5}$$

Лемма 5.1. *Пусть $f\in H_p$, $0<p<\infty$, $\beta>0$. Тогда*

$$w_\beta(f,\varepsilon)_p \asymp \omega_\beta(f,\mathcal{R},\varepsilon)_p, \quad \varepsilon\in(0,1/2).$$

Доказательство. Нам понадобятся некоторые свойства неполной гамма-функции

$$\gamma(\alpha,x)=\int\limits_0^x t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt.$$

Лемма 5.2 ([16, гл. 9]). *Пусть $\alpha>0$. Тогда:*

a) имеет место сходящееся разложение

$$\gamma(\alpha,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu x^{\alpha+\nu}}{\nu!(\alpha+\nu)},\quad x>0,$$

b) при $x\to\infty$ имеет место асимптотическое разложение

$$\gamma(\alpha,x)=\Gamma(\alpha) - \frac{x^{\alpha-1}}{e^x}\bigg(\sum_{m=0}^{r}\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(2+m-\alpha)}{(-x)^m}+O\Big(\frac{1}{x^r}\Big)\bigg),$$

где $r=1,2,\dots$.

Заметим, что

$$\int\limits_{1-\varepsilon}^{1}\Big(\ln\frac{1}{\rho}\Big)^{\beta-1}\frac{1}{\rho}\cdot\mathcal{R}^\beta f(\rho e^{it})\,d\rho=\sum_k \psi_\varepsilon(\varepsilon k)c_k e^{ikt},$$

где

$$\psi_\varepsilon(x) = \gamma\left(\beta, -x\ln(1-\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) = \int\limits_0^{\frac{x}{\varepsilon}\ln\frac{1}{1-\varepsilon}} t^{\beta-1}e^{-t}\,dt.$$

В силу леммы 3.1 для доказательства леммы 5.1 достаточно показать, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1/2)}\left\|\frac{\varphi}{\psi_\varepsilon}\right\|_{M_p} < \infty \quad \text{и} \quad \sup_{\varepsilon\in(0,1/2)}\left\|\frac{\psi_\varepsilon}{\varphi}\right\|_{M_p} < \infty, \tag{5.6}$$

где $\varphi(x) = (1-e^{-x})^\beta$.

Введем функции

$$\xi_\varepsilon = \frac{\varphi}{\psi_\varepsilon} \quad \text{и} \quad \eta_\varepsilon = \frac{\psi_\varepsilon}{\varphi}.$$

Обозначим: $\xi_{\varepsilon,j} = h_j^2\cdot\xi_\varepsilon$, $\eta_{\varepsilon,j} = h_j\cdot\eta_\varepsilon$, где функции h_j, $j=1,2$, определены в доказательстве леммы 3.9 равенствами (3.12). Далее все функции будем доопределять в нуле по непрерывности.

Рассмотрим сначала $\xi_{\varepsilon,1}$ и $\eta_{\varepsilon,1}$. Представим $\xi_{\varepsilon,1}$ в следующем виде:

$$\xi_{\varepsilon,1} = \rho\cdot\sigma_\varepsilon,$$

где

$$\rho(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\beta} \quad \text{и} \quad \sigma_\varepsilon(x) = \frac{h_1(x)x^\beta}{\psi_\varepsilon(x)}.$$

Рассуждая по аналогии с доказательством (4.3), нетрудно проверить, что функция $\rho\in M_p$. Для исследования функции σ_ε воспользуемся утверждением a) леммы 5.2. Имеем:

$$\sigma_\varepsilon(x) = h_1(x)\Bigg(\sum_{\nu=0}^\infty \frac{(-1)^\nu(\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{1}{1-\varepsilon})^{\nu+\beta}x^\nu}{\nu!(\beta+\nu)}\Bigg)^{-1}. \tag{5.7}$$

Применяя к (5.7) лемму 3.2, а также учитывая, что $\rho\in M_p$, получаем, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1/2)}\|\xi_{\varepsilon,1}\|_{M_p} < \infty. \tag{5.8}$$

Далее, представим функцию $\eta_{\varepsilon,1}$ в виде:

$$\eta_{\varepsilon,1} = \psi\cdot\chi_\varepsilon,$$

где

$$\psi(x) = \frac{h_1(x)x^\beta}{\varphi(x)} \quad \text{и} \quad \chi_\varepsilon(x) = \frac{h_1(x)\psi_\varepsilon(x)}{x^\beta}. \tag{5.9}$$

Рассуждая по аналогии с доказательством (5.8), используя при этом лемму 3.2, а также равенства (5.9), получаем, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1/2)} \|\eta_{\varepsilon,1}\|_{M_p} < \infty. \tag{5.10}$$

Рассмотрим теперь функции $\xi_{\varepsilon,2}$ и $\eta_{\varepsilon,2}$. Очевидно, что

$$\psi_\varepsilon(\infty) = \lim_{x\to\infty} \psi_\varepsilon(x) = \Gamma(\beta)$$

и

$$\frac{1}{\psi_\varepsilon(x)} = \frac{\psi_\varepsilon(\infty) - \psi_\varepsilon(x)}{\psi_\varepsilon(\infty)\psi_\varepsilon(x)} + \frac{1}{\psi_\varepsilon(\infty)},$$

$$\psi_\varepsilon(x) = (\psi_\varepsilon(x) - \psi_\varepsilon(\infty)) + \psi_\varepsilon(\infty).$$

Применяя лемму 3.2 к функциям

$$(h_2(x))^2 \frac{\psi_\varepsilon(\infty) - \psi_\varepsilon(x)}{\psi_\varepsilon(\infty)\psi_\varepsilon(x)} \quad \text{и} \quad h_2(x)(\psi_\varepsilon(x) - \psi_\varepsilon(\infty)),$$

учитывая при этом утверждение b) леммы 5.2, а также принадлежность функций φ и $h_2(1-\varphi)/\varphi$ пространству M_p, нетрудно проверить, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1/2)} \|\xi_{\varepsilon,2}\|_{M_p} < \infty \quad \text{и} \quad \sup_{\varepsilon\in(0,1/2)} \|\eta_{\varepsilon,2}\|_{M_p} < \infty. \tag{5.11}$$

Таким образом, из (5.8), (5.10) и (5.11) вытекает (5.6).

Лемма 5.1 доказана. □

Из теоремы 2.2 и леммы 5.1 получаем:

Следствие 5.1. *Пусть $f \in H_p$, $0 < p < \infty$, $\beta > 0$. Тогда*

$$K_\beta(f, \mathcal{R}, \varepsilon)_p \asymp \omega_\beta(f, \mathcal{R}, \varepsilon)_p \asymp w_\beta(f, \varepsilon)_{H_p}, \quad \varepsilon \in (0, 1).$$

Для доказательства утверждения 2) в теореме 5.1 нам также понадобится следующая лемма.

Лемма 5.3 ([6]). *Пусть $f \in H_p$, $0 < p < \infty$, $s = \min(1, p)$, $\beta > 0$, $0 < r < 1$. Тогда*

$$\left\| \int_r^1 (1-\rho)^{\beta-1} |f(\rho e^{it})| \, d\rho \right\|_p^s \le C \int_r^1 (1-\rho)^{\beta s-1} \|f(\rho e^{it})\|_p^s \, d\rho, \tag{5.12}$$

где C — константа, не зависящая от функции f и r.

Доказательство теоремы 5.1. Докажем сначала утверждение 1). Пусть g — произвольная функция такая, что $\mathcal{R}^\beta g \in H_p$ и $s = \min(1,p)$. Используя лемму 3.6, находим:

$$\begin{aligned}(1-r)^{s\beta}&\|\mathcal{R}^\beta f(re^{it})\|_p^s \\ &\le (1-r)^{s\beta}\{\|\mathcal{R}^\beta(f(re^{it})-g(re^{it}))\|_p^s+\|\mathcal{R}^\beta g(re^{it})\|_p^s\} \\ &\qquad\qquad \le C_1\{\|f-g\|_p+(1-r)^\beta\|\mathcal{R}^\beta g\|_p\}^s. \quad (5.13)\end{aligned}$$

Из неравенства (5.13) имеем:

$$\|\mathcal{R}^\beta f(re^{it})\|_p \le C_2(1-r)^{-\beta}K_\beta(f,\mathcal{R},1-r)_p. \quad (5.14)$$

Применяя к неравенству (5.14) теорему 2.2, получаем (5.1).

Докажем теперь утверждение 2). Далее $\varepsilon \in (0,1/2)$. Используя теорему 5.1, лемму 5.3, а также условия (5.2) и (5.3), находим:

$$\begin{aligned}K_\beta(f,\mathcal{R},\varepsilon)_p^s &\le C_3\left\|\int\limits_{1-\varepsilon}^{1}\left(\log\frac{1}{\rho}\right)^{\beta-1}\frac{1}{\rho}\cdot\mathcal{R}^\beta f(\rho e^{it})\,d\rho\right\|_p^s \\ &\le C_4\int\limits_{1-\varepsilon}^{1}(1-\rho)^{\beta s-1}\|\mathcal{R}^\beta f(\rho e^{it})\|_p^s\,d\rho \\ &\le C_5\int\limits_{1-\varepsilon}^{1}(1-\rho)^{\beta s-1}\left(\frac{\omega(1-\rho)}{(1-\rho)^\beta}\right)^s d\rho \\ &\qquad\le C_6\int\limits_0^\varepsilon\frac{\omega^s(u)}{u}\,du \le C_7\omega^s(\varepsilon). \quad (5.15)\end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем фактом, что (5.2) эквивалентно неравенству

$$\int\limits_0^\varepsilon\frac{\omega^s(u)}{u}\,du \le C\omega^s(\varepsilon)$$

(см. замечание 3.2 в статье [8]). Таким образом, из (5.15) и теоремы 2.2 получаем (5.4).

Теорема 5.1 доказана. $\square$

5.2. Аппроксимация функций обобщенными средними Бохнера–Рисса

Пусть функция $f \in H_p$. Обобщенные средние Бохнера–Рисса $R_\varepsilon^{\beta,\,\delta}$ функции f определяются следующим образом:

$$R_\varepsilon^{\beta,\,\delta}(f,z) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-(\varepsilon k)^\beta)_+^\delta c_k z^k.$$

Отметим, что вопросы приближения средними Бохнера–Рисса изучались в работах [1, 5, 9, 12, 17, 22, 26, 37]. В частности, в статье [26] было доказано, что при $0<p<1$, $\delta>1/p-1$ и $\beta\in\mathbb{N}\cup(1/p-1,\infty)$ имеет место следующая оценка:

$$\|f-R_\varepsilon^{\beta,\,\delta}(f)\|_p \asymp \omega_\beta(f,\varepsilon)_p, \quad \varepsilon\in(0,1).$$

Известно, что при $0<p<1$ функция

$$\varphi(x)=(1-x^\beta)_+^\delta \in M_p \tag{5.16}$$

тогда и только тогда, когда $\delta>1/p-1$ и $\beta>0$ (см. примеры в [14, с. 336]). Иначе говоря, средние $R_\varepsilon^{\beta,\,\delta}$ сходятся в пространстве H_p, $0<p<1$, тогда и только тогда $\delta>1/p-1$ и $\beta>0$. Таким образом, возникает задача — получить двусторонние оценки приближения функций обобщенными средними Бохнера–Рисса при любом $\beta>0$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5.2. *Пусть $f\in H_p$, $0<p<1$, $\beta>0$ и $\delta>1/p-1$. Тогда*

$$\|f-R_\varepsilon^{\beta,\,\delta}(f)\|_p \asymp K_\beta(f,\mathcal{R},\varepsilon)_p, \quad \varepsilon\in(0,1).$$

Доказательство. Докажем сначала следующие два неравенства:

$$\|f-R_\varepsilon^{\beta,\,\delta}(f)\|_p \le C_1\varepsilon^\beta\|\mathcal{R}^\beta f\|_p, \tag{5.17}$$

$$\varepsilon^\beta\|\mathcal{R}^\beta R_\varepsilon^{\beta,\,\delta}(f)\|_p \le C_2\|f-R_\varepsilon^{\beta,\,\delta}(f)\|_p, \tag{5.18}$$

где константы C_1 и C_2 зависят только от p,β и δ. В силу принципа сравнения (лемма 3.1) достаточно доказать, что после доопределения в нуле по непрерывности функции

$$\xi(x)=\frac{1-\varphi(x)}{x^\beta}\in M_p \quad \text{и} \quad \eta(x)=\frac{x^\beta\varphi(x)}{1-\varphi(x)}\in M_p, \tag{5.19}$$

где $\varphi(x)=(1-x^\beta)_+^\delta$.

Исследуем функцию ξ. Положим $\xi_j = h_j \cdot \xi$, $j = 1, 2$, где h_j — функции, определенные в доказательстве леммы 3.9 равенствами (3.12). Представим функцию ξ_1 в следующем виде:

$$\xi_1 = \xi_{1,1} + \xi_{1,2},$$

где

$$\xi_{1,1}(x) = h_1(x) \sum_{k=\sigma}^{\infty} \binom{\delta}{k} (-1)^k x^{\beta(k-1)},$$

$$\xi_{1,2}(x) = \sum_{k=1}^{\sigma-1} \binom{\delta}{k} (-1)^k x^{\beta(k-1)} h_1(x) \tag{5.20}$$

и $\sigma = [(1/p+1)/\beta]+2$. Используя лемму 3.2, а также оценку (1.1), нетрудно проверить, что $\xi_{1,1} \in M_p$. Применяя лемму 3.7 к каждому слагаемому суммы (5.20), а также используя очевидные свойства мультипликаторов, получаем, что и $\xi_{1,2} \in M_p$. Таким образом, $\xi_1 \in M_p$.

Принадлежность функции ξ_2 пространству M_p вытекает из того, что $1 - \varphi(x) \in M_p$ и $h_2(x)x^{-\beta} \in M_p$ (см. (5.16), а также примеры в [37]). Таким образом, из элементарных свойств мультипликатора следует, что $\xi \in M_p$.

Покажем теперь, что функция $\eta \in M_p$. Снова используем разбиение единицы. Положим $\eta_j = h_j \cdot \eta$, $j = 1, 2$. Проверим сначала, что $\eta_2 \in M_p$. Для этого представим η_2 в виде суммы двух функций:

$$\eta_2 = \eta_{2,1} + \eta_{2,2},$$

где

$$\eta_{2,1}(x) = x^\beta h_2(x) \sum_{k=1}^{\sigma} \varphi^k(x), \quad \eta_{2,2}(x) = x^\beta h_2(x) \sum_{k=\sigma+1}^{\infty} \varphi^k(x)$$

и $\sigma = [(1/p+1)/\delta]+2$. Используя лемму 3.2, получим, что $\eta_{2,2} \in M_p$. Функция $\eta_{2,1} \in M_p$ в силу (5.16) и леммы 3.2, примененной к функции $x^\beta h_2(x) h_1(x/4)$.

Остается показать, что $\eta_1 \in M_p$. Для этого, в силу (5.16), достаточно проверить, что

$$\eta_{1,1}(x) = \frac{x^\beta h_1(x)}{1 - \varphi(x)} \in M_p. \tag{5.21}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\phi(x) = \frac{x^\beta}{1 - (1 - x^\beta)_+^\delta} - \sum_{k=0}^{\lambda} a_k x^{\beta k},$$

где $\lambda = [(1/p+1)/\beta]+2$. Положим также $\gamma = \phi \cdot h_1$. Из леммы 3.7 следует, что $\gamma - \eta_{1,1} \in M_p$. Таким образом, показав, что

$$\gamma \in M_p, \tag{5.22}$$

мы получим (5.21).

Заметим, что при $t \in (0,1)$ имеет место равенство

$$\frac{t^\beta}{1-(1-t^\beta)^\delta} = \left(\sum_{k=0}^\infty d_k t^{\beta k}\right)^{-1},$$

где $d_0 = \delta \neq 0$. Следовательно, числа $\{a_k\}$ в определении функции ϕ можно выбрать так, чтобы

$$\phi(x) = \sum_{k=\lambda+1}^\infty b_k x^{\beta k} \cdot \left(\sum_{\nu=0}^\infty d_\nu x^{\beta\nu}\right)^{-1}. \tag{5.23}$$

Применяя лемму 3.2 к функции $\gamma = \phi \cdot h_1$, учитывая при этом равенство (5.23) и оценку (1.1), получаем (5.22).

Из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость соотношений (5.19) и, следовательно, неравенств (5.17) и (5.18). Выведем теперь из них оценки для K-функционала. Находим:

$$\begin{aligned} K_\beta(f,\mathcal{R},\varepsilon)_p &\le \|f - R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_p + \varepsilon^\beta \|\mathcal{R}^\beta R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_p \\ &\le (1+C_2)\|f - R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_p. \end{aligned}$$

Докажем оценку снизу. При произвольной функции g такой, что $\mathcal{R}^\beta g \in H_p$, имеем:

$$\begin{aligned} \|f - R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_p^p &\le \|(f-g) - R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f-g)\|_p^p + \|g - R_\varepsilon^{\beta,\delta}(g)\|_p^p \\ &\le (1 + \|R_\varepsilon^{\beta,\delta}\|_{H_p\to H_p})\|f-g\|_p^p + C_2^p \varepsilon^{\beta p}\|\mathcal{R}^\beta g\|_p^p. \end{aligned}$$

Осталось перейти к нижней грани по g и учесть, что

$$\sup_\varepsilon \|R_\varepsilon^{\beta,\delta}\|_{H_p\to H_p} = \sup_\varepsilon \|\{\varphi(\varepsilon k)\}\|_{M_p} = \|\varphi\|_{M_p} < \infty.$$

Теорема доказана. □

Из теорем 2.2 и 5.2 получаем следующее утверждение.

Следствие 5.2. *Пусть $f \in H_p$, $0<p<1$, $\beta>0$ и $\delta > 1/p-1$. Тогда*

$$\|f - R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_p \asymp \omega_\beta(f,\mathcal{R},\varepsilon)_p, \quad \varepsilon \in (0,1).$$

Литература

[1] E. S. Belinskii, *Strong summability of Fourier series of the periodic functions from* H_p $(0 < p \leq 1)$ // Constr. Approx., **12** (1996), No. 2, 187–195.

[2] E. S. Belinsky, *Strong summability for the Marcinkiewicz means in the integral metric and related questions* // J. Austral. Math. Soc. (Series A), **65** (1998), 303–312.

[3] E. Belinsky, E. Liflyand, *Approximation properties in* L_p, $0 < p < 1$ // Functiones et Approximatio, **XXII** (1993), 189–199.

[4] P. L. Butzer, H. Dyckhoff, E. Gorlich, R. L. Stens, *Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes* // Canad. J. Math., **XXIX** (1977), No. 4, 781–793.

[5] L. Colzani, *Jackson Theorems in Hardy Spaces and Approximation by Riesz Means* // J. Approx. Theory, **49** (1987), No. 3, 240–251.

[6] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, *Some properties of fractional integrals, II* // Math. Z., **34** (1932), 403–439.

[7] Z. Ditzian, V. Hristov, K. Ivanov, *Moduli of smoothness and K-functional in* L_p, $0 < p < 1$ // Constr. Approx., **11** (1995), 67–83.

[8] Yu. Kryakin, W. Trebels, *q-Moduli of Continuity in $H_p(D)$, $p > 0$, and an Inequality of Hardy and Littlewood* // J. Approx. Theory, **115** (2002), No. 2, 238–259.

[9] P. Oswald, *On some Approximation Properties of Real Hardy Spaces* $(0 < p \leq 1)$ // J. Approx. Theory, **40** (1984), No. 1, 45–65.

[10] M. Pavlovic, *On the moduli of continuity of H^p functions with* $0 < p < 1$ // Proc. Edinburgh Math. Soc., **35** (1992), 89–100.

[11] F. Riesz, *Über die Randwerte einer analytischen Funktion* // Math. Z., **18** (1932), 87–95.

[12] A. A. Solyanik, *On the order of approximation to functions of* $H^p(\mathbb{R})$ $(0 < p \leq 1)$ *by certain means of Fourier integrals* // Anal. Math., **12** (1986), 59–75.

[13] R. Taberski, *Approximation in the Frechet spaces* L^p $(0 < p < 1)$ // Functiones et Approximatio, **VII** (1979), 105–121.

[14] R. M. Trigub, E. S. Belinsky, *Fourier Analysis and Approximation of Functions*, Kluwer-Springer, 2004.

[15] A. Zygmund, *Smooth functions* // Duke Math. J., **34** (1945), No. 1, 47–76.

[16] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований. Том 2*, М.: Наука, 1969.

[17] Э. С. Белинский, *Сильная суммируемость периодических функций и теоремы вложения* // ДАН СССР, **332** (1993), No. 2, 133–134.

[18] Ю. А. Брудный, И. Е. Гопенгауз, *Обобщение одной теоремы Харди и Литтльвуда* // Матем. сб., **52(94)** (1960), No. 3, 891–894.

[19] Вит. В. Волчков, *Неравенсто Бернштейна в пространствах Харди H^p,* $0 < p < 1$ // Ряди Фур'є: теорія і застосування (Каменец-Подольский, 1997), Пр. Інст. Мат. Нац. Акад. Наук Укр. Мат. Застос., **20** (1998), 77–84.

[20] В. И. Иванов, *Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для* $0 < p < 1$ // Матем. заметки, **18** (1975), No. 5, 641–658.

[21] Ю. С. Коломойцев, *Неравенства типа Никольского–Стечкина–Боаса с дробной производной в* L_p*,* $0 < p < 1$ // Труды ИПММ НАН Украины, **15** (2007), 115–119.

[22] О. И. Кузнецова, Р. М. Тригуб, *Двусторонние оценки приближения функций средними Рисса и Марцинкевича* // ДАН СССР, **251** (1980), 34–36.

[23] И. Р. Лифлянд, Р. М. Тригуб, *О представлении функции в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье* // Тр. МИАН, **269** (2010), 153–166.

[24] А. А. Пекарский, *Неравенства тира Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации* // Матем. сб., **124(166)** (1984), No. 4(8), 571–588.

[25] С. Г. Прибегин, *Об одном методе приближения в* H_p*,* $0 < p < 1$ // Матем. сб., **192** (2001), No. 11, 123–136.

[26] С. Г. Прибегин, *Приближение функций из* H^p*,* $0 < p \leq 1$*, обобщенными средними Рисса с дробным показателем* // Матем. сб., **197** (2006), No. 7, 77–86.

[27] С. Г. Прибегин, *О некоторых методах суммирования степенных рядов для функций из* $H^p(D^n)$*,* $0 < p < \infty$ // Матем. сб., **200** (2009), No. 2, 89–106.

[28] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

[29] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Минск: Наука и техника, 1987.

[30] И. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, М.: Мир, 1973.

[31] Э. А. Стороженко, *Приближение функций класса* H_p*,* $0 < p < 1$ // Докл. АН Арм. ССР, **66** (1978), No. 3, 145–149.

[32] Э. А. Стороженко, *Об одной задаче Харди и Литтльвуда* // Матем. сб., **119** (1982), No. 4, 564–583.

[33] Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд, *Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах* L_p*,* $0 < p < 1$ // Матем. сб., **98(140)** (1975), No. 3(11), 395–415.

[34] П. М. Тамразов, *Гладкости и полиномиальные приближения*, Киев: Наукова думка, 1975.

[35] А. В. Товстолис, Р. М. Тригуб, *Эквивалентность разных модулей гладкости в пространствах Харди* // Теория приближения функций. Труды Ин-та прикл. матем. и мех., **3** (1998), 201—210.

[36] Р. М. Тригуб, *Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе* // Изв. АН СССР. Сер. матем., **44** (1980), No. 6, 1378–1409.

[37] Р. М. Тригуб, *Мультипликаторы в пространстве Харди* $H_p(D^m)$ *при* $p \in (0, 1]$ *и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов* // Матем. сб., **188** (1997), No. 4, 145–160.

[38] Р. М. Тригуб, *Мультипликаторы Фурье и* K*-функционалы гладких функций* // Укр. матем. вісник, **2** (2005), No. 2, 236–280.

[39] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды. Том 1*, М.: Мир, 1965.

Сведения об авторах

Юрий Сергеевич Коломойцев

Институт прикладной математики и механики НАН Украины
ул. Р. Люксембург 74,
83114 Донецк
Украина
E-Mail: kolomus1@mail.ru