

О внутренних дилатациях отображений с неограниченной характеристикой

ЕВГЕНИЙ А. СЕВОСТЬЯНОВ, РУСЛАН Р. САЛИМОВ

(Представлена В. Я. Гутлянским)

Аннотация. Для отображений $f : D \rightarrow D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, удовлетворяющих определённому геометрическому условию в фиксированной области D , установлены оценки вида $K_I(x, f) \leq Q(x)$ п.в., где $K_I(x, f)$ — внутренняя дилатация f в точке x , а $Q(x)$ — фиксированная вещественнозначная функция, отвечающая за “контроль” искажения семейств кривых в D при отображении f .

2010 MSC. 30C65, 30C62.

Ключевые слова и фразы. Отображения с ограниченным и конечным искажением, модули, емкости.

1. Введение

Всюду далее D — область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, m — мера Лебега \mathbb{R}^n , запись $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f , заданное в области D , непрерывно. Здесь и далее *кривой* γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ (либо открытого интервала (a, b)) в \mathbb{R}^n , $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ , а $f(\Gamma) = \{f \circ \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Напомним, что гомеоморфизм $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, называется *квазиконформным отображением*, если

$$(1/K) M(\Gamma) \leq M(f(\Gamma)) \leq K M(\Gamma) \quad (1.1)$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D , где M — конформный модуль семейства кривых (внешняя мера, определённая на семействах кривых в \mathbb{R}^n), а $K \geq 1$ — некоторая постоянная, см. определение 13.1 в [15, разд. 13, гл. II]. Другими словами, модуль любого семейства кривых искажается не более, чем в K раз. При этом, для

Статья поступила в редакцию 15.06.2010

квазиконформности f достаточно выполнения только одного неравенства в правой части соотношения (1.1), именно, гомеоморфизм f есть квазиконформное отображение, как только

$$M(f(\Gamma)) \leq K M(\Gamma) \quad (1.2)$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D , см. теорему 34.3 в [15, гл. IV]. Как известно, гомеоморфизмы, удовлетворяющие соотношению (1.2) в D имеют почти всюду невырожденный якобиан $J(x, f)$, см., напр., теорему 34.4 в [15]. Определим *внутреннюю дилатацию* $K_I(x, f)$ отображения f в точке x отношением

$$K_I(x, f) = \frac{|J(x, f)|}{l(f'(x))^n},$$

если якобиан $J(x, f) := \det f'(x) \neq 0$, $K_I(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x, f) = \infty$. В [15, гл. IV] доказано следующее утверждение, см. теорему 34.6.

Утверждение 1.1. *Предположим, что гомеоморфизм $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, удовлетворяет соотношению (1.2) в области D для произвольного семейства кривых Γ . Тогда для п.в. $x \in D$ имеет место оценка*

$$|J(x, f)| \leq K \cdot l(f'(x)), \quad (1.3)$$

где $J(x, f)$ обозначает якобиан отображения f в точке x , а $l(f'(x)) := \min_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}$.

Учитывая сделанное нами выше замечание, что $J(x, f) \neq 0$ п.в., соотношение (1.3) может быть записано в следующем эквивалентном виде: $K_I(x, f) \leq K$ для почти всех $x \in D$.

Пусть теперь в основе определения рассматриваемого класса отображений, вместо соотношения (1.1), лежит неравенство вида

$$M(f(\Gamma)) \leq \int_D Q(x) \cdot \rho^n(x) dm(x), \quad (1.4)$$

где ρ — произвольная неотрицательная борелевская функция, такая что произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую 1 в метрике ρ , другими словами, криволинейный интеграл первого рода по кривой γ удовлетворяет условию

$$\int_{\gamma} \rho(x) |dx| \geq 1 \quad (1.5)$$

для всех кривых $\gamma \in \Gamma$, а $Q : D \rightarrow [1, \infty]$ — заданная функция, измеримая по Лебегу, см., напр., [8, разд. 4.1, гл. IV]. Изучение неравенств типа (1.4) восходит к Л. Альфорсу, см., напр., теорему 3 в [1, разд. D, гл. I], а также О. Лехто и К. Вертанену, см. неравенство (6.6) в [7, разд. 6.3, гл. V]. Неравенство (1.4) упоминалось Ю. Ф. Струговым в работе [13], в контексте изучения отображений, квазиконформных в среднем. В пространственном случае, с приведением подробной строгой аргументации, неравенство типа (1.4) установлено В. Я. Гутлянским, совместно с К. Бишопом, О. Мартио и М. Vuorinen, в работе [3] для квазиконформных отображений; в указанном выше случае, Q равно внутренней дилатации $K_I(x, f)$. В. М. Миклюков в этом контексте также исследовал некоторые подобные классы, но на основе ёмкостей, см. [9]. В случае, когда $Q(x) \leq K$ п.в., из (1.4) следует неравенство (1.2). В общем случае, когда $Q(x)$ может быть неограничена, неравенство (1.4) означает, что искажение модуля исходного семейства Γ происходит, как говорят, “с некоторым весом $Q(x)$ ”, $M(f(\Gamma)) \leq M_Q(\Gamma)$, см., напр., работы А. Казаку Каберия, [2], и М. Кристи, [4]. Отметим, что, иногда, для извлечения ряда свойств отображения f , удовлетворяющего соотношениям вида (1.4), вполне достаточно ограничиться некоторыми конкретными семействами Γ , а не всеми семействами Γ кривых γ без исключения. Основными результатами настоящей работы являются следующие два утверждения.

Утверждение 1.2. Пусть $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное отображение, удовлетворяющее оценке вида (1.4) в области D для произвольного семейства Γ кривых γ в области D и произвольной $\rho \in \text{adm } \Gamma$. Предположим, что $Q \in L^1_{\text{loc}}(D)$. Тогда для почти всех $x \in D$ выполнено неравенство:

$$K_I(x, f) \leq Q(x).$$

Пусть $E, F \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D , т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. В [5, разд. 13], Ф. Геринг определил K -квазиконформное отображение как гомеоморфизм, изменяющий модуль кольцевой области не более, чем в K раз. Мотивируя упомянутым выше определением, введём в рассмотрение следующее понятие. Говорят, что отображение $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q -отображением* в точке $x_0 \in D$, если соотношение

$$M(f(\Gamma(S_1, S_2, A))) \leq \int_A Q(x) \cdot \eta^n(|x - x_0|) dm(x) \quad (1.6)$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \rightarrow [0, \infty]$ такой, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \eta(r) dr \geq 1. \quad (1.7)$$

Отметим, что условие (1.7) играет ту же роль, что и функция ρ в неравенстве (1.5), а именно, (1.7) есть просто условие допустимости для специального семейства кривых $\Gamma(S_1, S_2, A)$. Говорят, что отображение $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q – отображением* в D , если соотношения (1.6)–(1.7) выполнены в каждой точке $x_0 \in D$.

Утверждение 1.3. Пусть $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное отображение, удовлетворяющее соотношениям вида (1.6)–(1.7) в каждой точке x_0 области D . Предположим, что $Q \in L^1_{loc}(D)$ и $J(x, f) \neq 0$ п.в. в D . Тогда при п.в. $x \in D$ выполнено соотношение

$$K_I(x, f) \leq c_n \cdot Q(x),$$

где константа c_n зависит только от n .

2. Предварительные сведения

Всюду далее $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$. Отображение $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым множеством в \mathbb{R}^n . Следующие определения могут быть найдены, напр., в [15, разд. 1–6, гл. I]. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в \mathbb{R}^n , если соотношение (1.5) выполнено для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho \in \text{adm } \Gamma$. Модулем семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_D \rho^n(x) dm(x).$$

Свойства модуля в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в \mathbb{R}^n . Именно, модуль пустого семейства кривых равен нулю, $M(\emptyset) = 0$, обладает свойством монотонности относительно семейств кривых Γ_1 и $\Gamma_2 : \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \Rightarrow M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)$, а также свойством полуаддитивности:

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i),$$

см. теорему 6.2 в [15]. Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2 , пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2 . Хорошо известно, что

$$\Gamma_1 > \Gamma_2 \Rightarrow M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2), \quad (2.1)$$

см. теорему 6.4 в [15].

Следующие важные определения можно найти в [11, разд. 3, гл. II]. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — некоторая кривая и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Кривая $\alpha : [a, c] \rightarrow D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x , если

- (i) $\alpha(a) = x$;
- (ii) $f \circ \alpha = \beta|_{[a, c]}$;
- (iii) если $c < c' \leq b$, то не существует кривой $\alpha' : [a, c'] \rightarrow D$, такой что $\alpha = \alpha'|_{[a, c]}$ и $f \circ \alpha' = \beta|_{[a, c']}$.

Пусть f — открытое дискретное отображение и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Тогда кривая $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x , см. следствие 3.3 в [11, гл. II]. *Конденсатором* в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, называют пару $E = (A, C)$, где A — открытое множество в \mathbb{R}^n , а C — компактное подмножество A . Отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *абсолютно непрерывным на линиях*, пишем $f \in ACL$, если в любом n -мерном параллелепипеде P с рёбрами, параллельными осям координат, и таком, что $\bar{P} \subset D$, все координатные функции $f = (f_1, \dots, f_n)$ абсолютно непрерывны на почти всех прямых, параллельных осям координат. Известно, что если $f \in ACL$, то f имеет п.в. частные производные в D . *Ёмкостью* конденсатора E называется величина

$$\text{cap } E = \text{cap } (A, C) = \inf_{u \in W_0(E)} \int_A |\nabla u|^n dm(x),$$

где $W_0(E) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных непрерывных функций $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ с компактным носителем в A , таких что $u(x) \geq 1$ при $x \in C$ и $u \in ACL$. Известно, что для произвольного конденсатора $E = (A, C)$ выполнено соотношение

$$\text{cap } E \geq \frac{(\inf m_{n-1} S)^n}{[m(A \setminus C)]^{n-1}}, \quad (2.2)$$

где $m_{n-1} S$ — $(n - 1)$ -мерная мера Лебега C^∞ -многообразия S , являющегося границей $S = \partial U$ ограниченного открытого множества U ,

содержащего C и содержащегося вместе со своим замыканием \bar{U} в A ; в (2.2) точная нижняя грань берется по всем таким S , см. предложение 5 из [6].

Пусть $E = (A, C)$ — произвольный конденсатор в \mathbb{R}^n тогда будем обозначать через Γ_E семейство всех кривых вида $\gamma : [a, b) \rightarrow A$ с $\gamma(a) \in C$, таких что $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \emptyset$ для произвольного компакта $F \subset A$. Иначе говоря, для конденсатора $E = (A, C)$ семейство Γ_E состоит из тех и только тех кривых, которые имеют начало в C , лежат в A и, в то же время, целиком не лежат ни в одном фиксированном компакте внутри A . В случае ограниченного множества A такие кривые обязаны “подходить” к границе A , однако, не обязаны быть спрямляемыми и, вообще говоря, к чему-то стремиться.

Предложение 2.1 (см. [11, предложение 10.2 гл. II]). *Имеет место равенство:*

$$\text{cap } E = M(\Gamma_E).$$

Для отображения $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющего в D частные производные почти всюду,

$$\|f'(x)\| = \max_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}.$$

Внешняя дилатация отображения f в точке x есть величина

$$K_O(x, f) = \frac{\|f'(x)\|^n}{|J(x, f)|},$$

если $J(x, f) \neq 0$, $K_O(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_O(x, f) = \infty$ в остальных точках. *Линейная дилатация* f в точке x есть величина

$$H(x, f) = \sqrt[n]{K_I(x, f)K_O(x, f)}.$$

Предположим, что отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ дифференцируемо в точке $x_0 \in D$ и матрица Якоби $f'(x_0)$ невырождена, $J(x, f) = \det f'(x_0) \neq 0$. Тогда найдутся системы векторов e_1, \dots, e_n и $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ и положительные числа $\lambda_1(x_0), \dots, \lambda_n(x_0)$, $\lambda_1(x_0) \leq \dots \leq \lambda_n(x_0)$, такие что $f'(x_0)e_i = \lambda_i(x_0)\tilde{e}_i$, см. теорему 2.1 в [10, гл. II], причём $\lambda_1^2(x_0), \dots, \lambda_n^2(x_0)$ — собственные значения симметрического отображения $(f'(x_0))^* f'(x_0)$, см. теорему 2.2 в [10, гл. I],

$$\begin{aligned} |J(x_0, f)| &= \lambda_1(x_0) \dots \lambda_n(x_0), & \|f'(x_0)\| &= \lambda_n(x_0), \\ l(f'(x_0)) &= \lambda_1(x_0), \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$K_O(x_0, f) = \frac{\lambda_n^n(x_0)}{\lambda_1(x_0) \cdots \lambda_n(x_0)}, \quad K_I(x_0, f) = \frac{\lambda_1(x_0) \cdots \lambda_n(x_0)}{\lambda_1^n(x_0)},$$

см. соотношение (2.5) и дополнительные комментарии на с. 21 в [10, разд. 2.1, гл. I]. Кроме того, из приведённых выше формул следует, что

$$K_I(x, f) \leq K_O^{n-1}(x, f), \quad K_O(x, f) \leq K_I^{n-1}(x, f),$$

см. соотношения (2.7) и (2.8) в [10, разд. 2.1, гл. I], и что $K_I(x, f) \geq 1$ и $K_O(x, f) \geq 1$ всюду, где эти величины определены корректно.

Числа $\lambda_1(x_0), \dots, \lambda_n(x_0)$, упомянутые выше, называются *главными значениями*, а векторы e_1, \dots, e_n и $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ — *главными векторами* отображения $f'(x_0)$, по этому поводу см. соответствующий комментарий в [10, разд. 2.1, гл. I] после доказательства теоремы 2.2 там же. Разумеется, главные векторы и главные значения зависят как от точки x_0 , так и от отображения f , однако, с целью упрощения записи, мы здесь и в дальнейшем опускаем “ (x_0) ”, если недоразумение невозможно.

3. Об оценке внутренней дилатации открытых дискретных кольцевых Q -отображений

Теорема 3.1. Пусть $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное отображение, удовлетворяющее соотношениям вида (1.6)–(1.7) в каждой точке x_0 области D . Предположим, что $Q \in L_{loc}^1(D)$ и $J(x, f) \neq 0$ п.в. Тогда при п.в. $x \in D$ выполнено соотношение

$$K_I(x, f) \leq c_n \cdot Q(x), \tag{3.1}$$

где константа c_n зависит только от n .

Доказательство. Согласно теореме 3.2 в [17], f дифференцируемо п.в. в D . Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\infty \notin D' = f(D)$. В каждой точке $x \in D$ дифференцируемости отображения f , где $J(x, f) \neq 0$, рассмотрим конденсатор $E_r = (A_r, G_r)$, где $A_r = \{y : |x - y| < 2r\}$ и $G_r = \{y : |x - y| \leq r\}$. Т.к. f — открытое и непрерывное отображение, $f(E_r)$ также является конденсатором в \mathbb{R}^n . Пусть Γ_{E_r} и $\Gamma_{f(E_r)}$ — семейства кривых в смысле обозначений, данных перед предложением 2.1, и Γ_r^* — семейство максимальных поднятий $\Gamma_{f(E_r)}$ при отображении f с началом в G_r . Покажем, что $\Gamma_r^* \subset \Gamma_{E_r}$.

Предположим противное, т.е., что существует кривая $\beta : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ семейства $\Gamma_{f(E_r)}$, для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha : [a, c) \rightarrow A_r$ лежит в некотором компакте K внутри A_r .

Следовательно, его замыкание $\bar{\alpha}$ — компакт в A_r . Заметим, что $c \neq b$, поскольку в противном случае $\bar{\beta}$ — компакт в $f(A_r)$, что противоречит условию $\beta \in \Gamma_{f(E_r)}$. Рассмотрим предельное множество кривой $\alpha(t)$ при $t \rightarrow c - 0$:

$$G = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(t_k) \right\}, \quad t_k \in [a, c), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = c,$$

где $t_k \rightarrow c - 0$ монотонно. Для $x \in G$, в силу непрерывности f , будем иметь $f(\alpha(t_k)) \rightarrow f(x)$ при $k \rightarrow \infty$, где $t_k \in [a, c)$, $t_k \rightarrow c$ при $k \rightarrow \infty$. Однако, $f(\alpha(t_k)) = \beta(t_k) \rightarrow \beta(c)$ при $k \rightarrow \infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на G в A_r . С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\bar{\alpha}$, см. 3.6 в [16, гл. I],

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha([t_k, c))} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha([t_k, c)) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha([t_k, c)) \neq \emptyset$$

в виду монотонности относительно последовательности связных множеств $\alpha([t_k, c))$ и, таким образом, G является связным, см. [16, разд. 9.12, гл. II]. Таким образом, в силу дискретности f , множество G не может состоять более чем из одной точки, и кривая $\alpha : [a, c) \rightarrow A_r$ продолжается до замкнутой кривой $\alpha : [a, c] \rightarrow K \subset A_r$, причём и $f(\alpha(c)) = \beta(c)$. Снова по следствию 3.3 в [11, гл. II], можно построить максимальное поднятие α' кривой $\beta|_{[c, b)}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Объединяя поднятия α и α' , получаем новое поднятие α'' кривой β , которое определено на $[a, c')$, $c' \in (c, b)$, что противоречит максимальнойности поднятия α . Таким образом, $\Gamma_r^* \subset \Gamma_{E_r}$. Заметим, что $\Gamma_{f(E_r)} > f(\Gamma_r^*)$, и, следовательно, по предложению 2.1 и свойству минорирования (2.1)

$$\text{cap } f(E_r) = M(\Gamma_{f(E_r)}) \leq M(f(\Gamma_r^*)) \leq M(f(\Gamma_{E_r})). \quad (3.2)$$

Поскольку f по условию удовлетворяет условиям (1.6)–(1.7), т.е. f является кольцевым Q -отображением, из (3.2) следует, что

$$\text{cap } f(E_r) \leq \int_{r < |x-y| < 2r} Q(y) \eta^n(|x-y|) dm(y)$$

для любой неотрицательной измеримой функции $\eta : (r, 2r) \rightarrow [0, \infty]$, такой что $\int_r^{2r} \eta(t) dt \geq 1$. В частности, рассмотрим однопараметрическое семейство вещественнозначных функций

$$\eta_r(t) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & t \in (r, 2r), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (r, 2r). \end{cases}$$

Тогда

$$\text{cap } f(E_r) \leq \frac{2^n \Omega_n}{m(A_r)} \int_{A_r} Q(y) dm(y). \quad (3.3)$$

С другой стороны, по неравенству (2.2) получаем

$$\text{cap } f(E_r) \geq \frac{(\inf m_{n-1} S)^n}{[m(f(A_r) \setminus f(G_r))]^{n-1}}, \quad (3.4)$$

где \inf берётся по всевозможным C^∞ — многообразиям S , являющихся границей $S = \partial U$ ограниченного открытого множества U , содержащего $f(G_r)$ и содержащегося вместе со своим замыканием \bar{U} в $f(A_r)$. Комбинируя (3.3) и (3.4), получаем, что

$$(\inf m_{n-1} S)^n \leq \frac{2^n \Omega_n [m(f(A_r) \setminus f(G_r))]^{n-1}}{m(A_r)} \int_{A_r} Q(y) dm(y). \quad (3.5)$$

При $r \rightarrow 0$ множество $f(G_r)$ с точностью до $o(r)$ представляет собой эллипсоид $f'(G_r)$, являющийся образом шара G_r при линейном отображении f' . Если данный эллипсоид имеет полуоси $0 < a_1 r \leq \dots \leq a_n r$, то $m(f'(G_r)) = \Omega_n a_1 \dots a_n r^n = \Omega_n J(x, f) r^n$, см. соотношения (2.3). Разместим наш эллипсоид таким образом, чтобы его центр совпал с началом координат, а главные направления с координатными осями e_1, \dots, e_n . Тогда площадь его поверхности допускает нижнюю оценку:

$$\begin{aligned} m_{n-1}(\partial f'(G_r)) &\geq 2m_{n-1}(\text{Pr}_1(f'(G_r))) \\ &= 2\Omega_{n-1} \cdot a_2 \dots a_n r^{n-1} = 2\Omega_{n-1} \cdot \frac{J(x, f)}{l(f'(x))} r^{n-1}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\text{Pr}_1(\cdot)$ обозначает проекцию на гиперплоскость, перпендикулярную вектору e_1 . Следовательно, по (3.5) и (3.6), т.к. $J(x, f) \neq 0$, получим

$$\begin{aligned} \left[2\Omega_{n-1} \cdot \frac{J(x, f)}{l(f'(x))} r^{n-1} - o(r^{n-1}) \right]^n &\leq [m_{n-1} \partial f'(G_r) - o(r^{n-1})]^n \\ &\leq \frac{2^n \Omega_n [m(f(A_r) \setminus f(G_r))]^{n-1}}{m(A_r)} \int_{A_r} Q(y) dm(y). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Разделив неравенство (3.7) на $r^{n(n-1)}$, устремляя r к 0 и применяя теорему Лебега о дифференцируемости неопределённого интеграла, см. теорему 5.4 в [12, гл. IV], будем иметь

$$\left[\frac{J(x, f)}{l(f'(x))} \right]^n \leq [J(x, f)]^{n-1} c_n \cdot Q(x)$$

для п.в. $x \in D$. Следовательно, т.к. по условию $J(x, f) \neq 0$ п.в.,

$$K_I(x, f) = \frac{J(x, f)}{(l(f'(x)))^n} \leq c_n \cdot Q(x)$$

для п.в. $x \in D$. Теорема 3.1 доказана. \square

Следствие 3.1. Пусть $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное отображение, удовлетворяющее соотношениям вида (1.6)–(1.7) в каждой точке x_0 области D . Предположим, что $Q \in L^1_{loc}(D)$ и $J(x, f) \neq 0$ п.в. Тогда п.в.

$$H(x, f) \leq c_n \cdot Q(x),$$

где константа c_n зависит только от n .

Следствие 3.2. Пусть $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное отображение, удовлетворяющее соотношениям вида (1.6)–(1.7) в каждой точке x_0 области D . Предположим, что $Q \in L^1_{loc}(D)$ и $J(x, f) \neq 0$ п.в. Тогда $H(x, f) \in L^1_{loc}(D)$ и $K_I(x, f) \in L^1_{loc}(D)$.

4. Об оценке внутренней дилатации открытых дискретных Q -отображений

В настоящем разделе мы исследуем отображения, удовлетворяющие более сильной, чем (1.6), оценке вида (1.4). Ниже будет показано, что для указанных выше отображений, в неравенстве типа (3.1), также имеющем место для отображений вида (1.4), можно взять $c_n \equiv 1$. Такая оценка будет являться точной, ибо внутренняя дилатация всегда не меньше единицы, см. раздел 2.

Теорема 4.1. Пусть $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное отображение, удовлетворяющее оценке вида (1.4) в области D для произвольного семейства Γ кривых γ в области D и произвольной $\rho \in \text{adm } \Gamma$. Предположим, что $Q \in L^1_{loc}(D)$. Тогда при почти всех $x \in D$ выполнено соотношение

$$K_I(x, f) \leq Q(x). \quad (4.1)$$

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\infty \notin D' = f(D)$. Согласно теореме 3.2 и следствию 4.4 в [17], f дифференцируемо п.в. и $J(x, f) \neq 0$. Обозначим через $\Phi(A)$ функцию множества $A \subset D$, определённую следующим образом:

$$\Phi(A) = \int_A Q(x) dm(x).$$

Т.к. по условию функция $Q \in L^1_{loc}(D)$, по теореме Лебега функция Φ обобщённо дифференцируема в почти каждой точке $x_0 \in D$, см., напр., теорему 5.4 в [12, гл. IV], причём производная $D\Phi(x) = Q(x)$ для почти всех $x \in D$, см. теорему 6.3 там же. Здесь же см. понятие обобщённой дифференцируемости функции множества в точке. Обозначим через E_1 множество всех $x \in D$, где Φ обобщённо дифференцируема и $D\Phi(x) = Q(x)$, а через E_2 — множество всех $x \in D$, где само отображение f дифференцируемо и невырождено. Для справедливости заключения теоремы достаточно показать, что (4.1) имеет место для всех $x \in E_0 = E_1 \cup E_2$.

Фиксируем произвольную точку $x_0 \in E_0$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = 0$ и $f(x_0) = 0$. Пусть $e_1, \dots, e_n, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, соответственно, главные векторы и главные значения отображения $f'(0)$, $\lambda_n \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_1 > 0$. Посредством преобразования поворота в образе и прообразе, можно добиться, чтобы $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0) = \tilde{e}_i$. Мы должны убедиться, что

$$\frac{\lambda_2 \cdots \lambda_n}{\lambda_1^{n-1}} \leq Q(0),$$

т.к. $|J(0, f)| = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ и $l(f'(0)) = \lambda_1$. Фиксируем произвольно параметр $t > 0$ и выберем число $r > 0$ так, чтобы конденсатор $E := (A, C)$, где $C = \{x : x_1 = 0, |x_i| \leq r, i = 2, \dots, n\}$ и $A = \{x : |x_1| < rt\lambda_1, |x_i| < r + rt\lambda_i, i = 2, \dots, n\}$ лежал в области D . Заметим, что

$$m(A) = 2^n \lambda_1 r t \prod_{i=2}^n (r + rt\lambda_i) \tag{4.2}$$

и

$$\text{dist}(C, \partial A) = rt\lambda_1. \tag{4.3}$$

Так как $E = (A, C)$ — конденсатор в D , то $f(E) = (f(A), f(C))$ — конденсатор в $D' = f(D)$ в виду открытости и непрерывности f . Пусть Γ_E и $\Gamma_{f(E)}$ — семейства кривых в смысле предложения 2.1 и Γ^* — семейство максимальных поднятий $\Gamma_{f(E)}$ при отображении f с началом в C . Как и при доказательстве теоремы 3.1, имеем $\Gamma^* \subset \Gamma_E$. Заметим, что $\Gamma_{f(E)} > f(\Gamma^*)$, и, следовательно, т.к. по условию теоремы отображение f удовлетворяет соотношению (1.4), из соотношения

$$\text{cap } f(E) = M(\Gamma_{f(E)}) \leq M(f(\Gamma^*)) \leq M(f(\Gamma_E))$$

следует, что

$$\text{cap}(f(A), f(C)) \leq \int_D Q(x) \cdot \rho^n(x) dm(x) \tag{4.4}$$

для любой допустимой функции $\rho \in \text{adm } \Gamma_E$. Заметим, что функция

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\text{dist}(C, \partial A)}, & x \in A \setminus C, \\ 0, & x \notin A \setminus C \end{cases}$$

является допустимой для семейства Γ_E и, таким образом, в силу (4.4),

$$\text{cap}(f(A), f(C)) \leq \frac{1}{(\text{dist}(C, \partial A))^n} \int_A Q(x) dm(x). \quad (4.5)$$

С другой стороны, применяя неравенство (2.2), из (4.5) имеем

$$\frac{(\inf m_{n-1} S)^n}{[m(f(A))]^{n-1}} \leq \frac{1}{(\text{dist}(C, \partial A))^n} \int_A Q(x) dm(x), \quad (4.6)$$

где $m_{n-1} S$ означает $(n-1)$ -мерную площадь C^∞ -многообразия S , являющегося границей открытого множества U , содержащего $f(C)$ и содержащегося вместе со своим замыканием \bar{U} в $f(A)$, а точная нижняя грань в (4.6) берётся по всем таким S . Произведём оценку дроби в неравенстве (4.6), опираясь на свойство дифференцируемости отображения f в нуле. Фиксируя произвольно $0 < \varepsilon < \lambda_1$, выберем $r > 0$ столь малым, чтобы $|f(x) - f'(0)x| < \varepsilon r$ при $x \in A$. Тогда множество $f(A)$ содержится в параллелепипеде

$$V = \{y : |y_1| \leq r t \lambda_1^2 + \varepsilon r, |y_i| \leq r \lambda_i + r t \lambda_i^2 + \varepsilon r, i = 2, \dots, n\},$$

а проекция множества $f(C)$ на подпространство $y_1 = 0$ содержит в себе $(n-1)$ -мерный параллелепипед

$$V_0 = \{y : y_1 = 0, |y_i| \leq r \lambda_i - \varepsilon r, i = 2, \dots, n\}.$$

Поэтому

$$m(f(A)) \leq m(V) = 2^n r^n (t \lambda_1^2 + \varepsilon) \prod_{i=2}^n (\lambda_i + t \lambda_i^2 + \varepsilon)$$

и

$$m_{n-1} S \geq 2 m_{n-1} V_0 = 2^n r^{n-1} \prod_{i=2}^n (\lambda_i - \varepsilon).$$

Следовательно, подставляя найденные оценки указанных выше величин в неравенство (4.6), учитывая (4.2) и (4.3), получаем

$$\frac{\left(2^n r^{n-1} \prod_{i=2}^n (\lambda_i - \varepsilon)\right)^n}{\left(2^n r^n (t\lambda_1^2 + \varepsilon) \prod_{i=2}^n (\lambda_i + t\lambda_i^2 + \varepsilon)\right)^{n-1}} \leq \frac{2^n \lambda_1 r t \prod_{i=2}^n (r + r t \lambda_i)}{r^n t^n \lambda_1^n} \frac{1}{m(A)} \int_A Q(x) dm(x),$$

откуда

$$\frac{\left(\prod_{i=2}^n (\lambda_i - \varepsilon)\right)^n}{\left((t\lambda_1^2 + \varepsilon) \prod_{i=2}^n (\lambda_i + t\lambda_i^2 + \varepsilon)\right)^{n-1}} \leq \frac{\prod_{i=2}^n (1 + t\lambda_i)}{t^{n-1} \lambda_1^{n-1}} \frac{1}{m(A)} \int_A Q(x) dm(x),$$

и устремляя $r \rightarrow 0$, будем иметь

$$\frac{\left(\prod_{i=2}^n (\lambda_i - \varepsilon)\right)^n}{\left((t\lambda_1^2 + \varepsilon) \prod_{i=2}^n (\lambda_i + t\lambda_i^2 + \varepsilon)\right)^{n-1}} \leq \frac{\prod_{i=2}^n (1 + t\lambda_i)}{t^{n-1} \lambda_1^{n-1}} Q(0).$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем

$$\frac{\left(\prod_{i=2}^n \lambda_i\right)^n}{\left(t\lambda_1^2 \prod_{i=2}^n (\lambda_i + t\lambda_i^2)\right)^{n-1}} \leq \frac{\prod_{i=2}^n (1 + t\lambda_i)}{t^{n-1} \lambda_1^{n-1}} Q(0),$$

а затем умножая обе части неравенства на t^{n-1} и переходя к пределу при $t \rightarrow 0$, выводим

$$\frac{\prod_{i=2}^n \lambda_i}{\lambda_1^{n-1}} \leq Q(0),$$

следовательно, теорема 4.1 полностью доказана. \square

Следствие 4.1. Пусть $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное отображение, удовлетворяющее оценке вида (1.4) в области D для произвольного семейства Γ кривых γ в области D и произвольной $\rho \in \text{adm } \Gamma$. Предположим, что $Q \in L_{loc}^1(D)$. Тогда $Q(x) \geq 1$ для почти всех $x \in D$.

Следствие 4.2. Пусть $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное отображение, удовлетворяющее оценке вида (1.4) в области D для произвольного семейства Γ кривых γ в области D и произвольной $\rho \in \text{adm } \Gamma$. Предположим, что $Q \in L_{loc}^1(D)$. Тогда $K_O(x, f) \leq Q^{n-1}(x)$ для почти всех $x \in D$.

Следствие 4.3. Пусть $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное отображение, удовлетворяющее оценке вида (1.4) в области D для произвольного семейства кривых Γ в области D и произвольной $\rho \in \text{adm } \Gamma$. Предположим, что $Q \in L_{loc}^1(D)$. Тогда при почти всех $x \in D$

$$H(x, f) \leq Q(x).$$

5. Заключительные замечания

Авторы предполагают, что неравенство $K_O(x, f) \leq C_n \cdot Q^{n-1}(x)$ с $C_n = 1$, см., напр., [17], а также неравенство $K_I(x, f) \leq c_n Q(x)$ с $c_n = 1$, для отображений, удовлетворяющих (1.6)–(1.7) в каждой точке $x_0 \in D$, вообще говоря, неверно. Попросту говоря, мы предполагаем, что класс кольцевых Q -отображений шире, чем класс Q -отображений. Другой открытый вопрос заключается в присутствующих условиях “открытости” и “дискретности” отображения f . Исследования дилатаций отображений, не являющихся открытыми и дискретными, требуют привлечения техники, отличной от модульной.

Постскриптум. Настоящая работа выполнена в русле исследований, инициированных известным математиком Г. Д. Суворовым, считавшим “идеалом (и целью!) в теории функций достижение такой ситуации, когда мы будем располагать большим числом различных классов функций и для каждого класса иметь разработанный каталог свойств (метрических и топологических)”, см. [14, с. 325].

Литература

- [1] Л. Альфорс, *Лекции по квазиконформным отображениям*, Москва: Мир, 1969.
- [2] Andreian C. Cazacu, *On the length-area dilatation* // Complex Var. Theory Appl., **50** (2005), No. 7–11, 765–776.
- [3] C. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen, *On conformal dilatation in space* // Intern. Journ. Math. and Math. Scie., **22** (2003), 1397–1420.
- [4] M. Cristea, *Local homeomorphisms having local ACLⁿ inverses* // Compl. Var. and Ellipt. Equat., **53** (2008), No. 1, 77–99.
- [5] F. W. Gehring, *Rings and quasiconformal mappings in space* // Trans. Amer. Math. Soc., **103** (1962), 353–393.

- [6] В. И. Кругликов, *Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем* // Матем. сб., **130** (1986), No. 2, 185–206.
- [7] O. Lehto and K. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, New York etc.: Springer, 1973.
- [8] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, and E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
- [9] В. М. Миклюков, *Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения*, Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2005.
- [10] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Новосибирск: Наука, 1982.
- [11] S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Results in Mathematic and Related Areas (3), 26, Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [12] С. Сакс, *Теория интеграла*, М.: ИЛ, 1949.
- [13] Ю. Ф. Стругов, *Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем* // ДАН СССР, **243** (1978), No. 4, 859–861.
- [14] Г. Д. Суворов, *Об искусстве математического исследования*, Донецк: Донецкая фирма наукоёмких технологий НАН Украины (Фирма ТЕАН), 1999.
- [15] J. Väisälä, *Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.
- [16] G. T. Whyburn, *Analytic topology*, Rhode Island: American Mathematical Society, 1942.
- [17] R. Salimov and E. Sevost'yanov, *ACL and differentiability of the open discrete ring mappings* // Comрд. Var. and Ellip. Equat., **55** (2010), No. 1–3, 49–59.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Евгений	Институт прикладной математики
Александрович	и механики НАН Украины
Севостьянов,	ул. Розы Люксембург, 74,
Руслан Радикович	Донецк, 83114
Салимов	Украина
	<i>E-Mail:</i> brusin2006@rambler.ru,
	ruslan623@yandex.ru