

# Однозначна розв'язність задачі без початкових умов для лінійних та нелінійних еліптично-параболічних рівнянь

Микола М. Бокало

(Представлена А. Є. Шликовим)

**Анотація.** Встановлено існування та єдиність узагальнених розв'язків задачі без початкових умов для лінійних та нелінійних анізотропних еліптично-параболічних рівнянь другого порядку в необмежених за просторовими змінними областях. При цьому накладаються умови на поведінку розв'язків задачі та зростання її вихідних даних на нескінченності. Рівняння мають показники нелінійності, які залежать від точок області визначення рівнянь та напрямку диференціювання, а їх узагальнені розв'язки беруться з узагальнених просторів Лебега–Соболева.

**2010 MSC.** 35D30, 35J25, 35J60, 35K10, 35K55, 35K65, 35M12.

**Ключові слова та фрази.** Лінійне рівняння, нелінійне рівняння, еліптично-параболічне рівняння, вироджене параболічне рівняння, задача без початкових умов, узагальнений простір Лебега–Соболева, необмежена область.

## 1. Вступ

Нехай  $\Omega$  — необмежена область в арифметичному просторі  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) з евклідовою нормою  $|\cdot|$  ( $|x| := (|x_1|^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$  для  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ). Припускаємо, що межа  $\partial\Omega$  області  $\Omega \in C^1$  мнговидом розмірності  $n - 1$ . Нехай  $\Gamma_0$  — замикання відкритої множини на  $\partial\Omega$  (зокрема,  $\Gamma_0$  може бути порожньою множиною або збігатися з  $\partial\Omega$ ),  $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0$ ;  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  — одиничний вектор зовнішньої до  $\partial\Omega$  нормалі. Позначаємо  $S := (-\infty, 0]$ ,  $Q := \Omega \times S$ ,  $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times S$ ,  $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times S$ .

---

Стаття надійшла в редакцію 13.12.2010

Розглядаємо питання про відшукання функцій  $u : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ , які задовольняють (в певному сенсі) рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}(b(x)u) - \sum_{i=1}^n \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, \nabla u) + a_0(x, t, u, \nabla u) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1.1)$$

та крайові умови

$$u|_{\Sigma_0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_a} \Big|_{\Sigma_1} = 0, \quad (1.2)$$

де  $b(x) \geq 0$ ,  $x \in \Omega$ ,  $a_i(x, t, s, \xi)$ ,  $(x, t, s, \xi) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $f(x, t)$ ,  $(x, t) \in Q$ , — задані дійснозначні функції,

$$\frac{\partial u(y, t)}{\partial \nu_a} := \sum_{i=1}^n a_i(y, t, u, \nabla u) \nu_i(y), \quad (y, t) \in \Sigma_1.$$

Ми вважаємо, що рівність  $b = 0$  може виконуватися на будь-якій підмножині області  $\Omega$ , а просторова частина диференціального виразу в лівій частині рівняння (1.1) є еліптичною, тобто рівняння (1.1) є еліптично-параболічним [7, 30].

**Зауваження 1.1.** Нехай  $\Omega = (0, +\infty)$ ,  $\Gamma_0 = \{0\}$ ,  $\Gamma_1 = \emptyset$ , і розглядаємо рівняння теплопровідності

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad (x, t) \in (0, +\infty) \times (-\infty, 0] \quad (1.3)$$

та крайову умову

$$u(0, t) = 0. \quad (1.4)$$

Очевидно, що функції  $u_{\lambda, A}(x, t) = Ae^{-\lambda t} \sin \sqrt{\lambda} x$ ,  $(x, t) \in (0, +\infty) \times (-\infty, 0]$ , де  $\lambda > 0$ ,  $A$  — довільні числа, є розв'язками рівняння (1.3), які задовольняють його в класичному сенсі і для яких виконується умова (1.4). Також очевидно, що функції  $u_A(x, t) = Ax$ , де  $A$  — довільна стала, теж є розв'язками рівняння (1.3) і задовольняють умову (1.4).

Отож, для єдиності розв'язку рівняння (1.3) з крайовою умовою (1.4) потрібні додаткові умови на його поведінку при  $|x| \rightarrow +\infty$  та  $t \rightarrow -\infty$ , які можна трактувати як аналоги крайової умови на нескінченності та початкової умови в початковий момент  $-\infty$ . Як показано в роботі [15], такими умовами може бути вимога обмеженості розв'язку.

На підставі цього зауваження напрошується такий висновок. Оскільки умова єдиності розв'язку є визначальною для коректної постановки задачі у випадку еволюційних рівнянь, то було б природно задачу для рівняння (1.1) в області  $Q$  формулювати так: знайти розв'язок цього рівняння, який задовольняє крайову умову (1.2) та деяку умову на його поведінку на нескінченності, зокрема, умову належності розв'язку до певного вагового функційного простору [1, 4, 6, 8, 10, 16, 17, 29]. Але, виявляється, серед нелінійних рівнянь вигляду (1.1) є такі, для яких їх розв'язки визначаються однозначно тільки крайовими умовами (1.2) [2, 3, 13, 18–20].

У даній роботі, зробивши додаткові припущення на вихідні дані, виділено класи еліптично-параболічних рівнянь вигляду (1.1), елементами яких є як лінійні, так і нелінійні анізотропні рівняння, для яких задача без початкових умов при певних обмеженнях на нескінченності є однозначно розв'язною. Здобуті тут результати є узагальненнями і доповненнями результатів робіт [1, 9]. Ми використовуємо метод дослідження, який базується на аналозі відомого в механіці принципу Сен-Венана і розроблений в роботах [9, 16, 21, 22] та інших, і адаптований до задачі без початкових умов в [1, 9]. Крім того, при доведенні розв'язності нашої задачі опираємося ще і на метод монотонності [12].

Прикладами рівнянь типу (1.1), які тут вивчаються, є анізотропні рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}(b(x)u) - \sum_{i=1}^n (\hat{a}_i(x, t)|u_{x_i}|^{p_i(x)-2}u_{x_i})_{x_i} + \hat{a}_0(x, t)|u|^{p_0(x)-2}u = f(x, t), \quad (1.5)$$

де  $\hat{a}_i$  ( $i = \overline{0, n}$ ) — деякі вимірні додатні й відділені від нуля функції,  $p_i > 1$  ( $i = \overline{0, n}$ ) — вимірні обмежені функції (так звані показники нелінійності),  $f$ ,  $u$  — відповідно задана і невідома функції. Якщо показники нелінійності є сталими, то такі рівняння розглядалися в багатьох роботах, зокрема, в [13, 25, 26] (див. також бібліографію там).

В останні десятиліття дуже активно вивчаються нелінійні диференціальні рівняння зі змінними показниками нелінійності, прикладами яких є рівняння (1.5) (див., наприклад, [3, 5, 14]). Це пов'язано з тим, що такі рівняння виникають при математичному моделюванні різних типів фізичних процесів і, зокрема, описують потоки електро-реологічних речовин, процеси відновлення зображень, електричний струм у кондукторі під впливом змінного температурного поля [27].

Ми розглядатимемо *узагальнені розв'язки* рівняння (1.1), що задовольняють умови (1.2), а для їх означення та дослідження нам бу-

дуть потрібні деякі лінійні локально опуклі простори. Тому спочатку дамо означення цих просторів.

Нехай  $G$  — довільна область в  $\mathbb{R}^m$ , де  $m = n$  або  $m = n + 1$ . Для будь-якої функції  $r \in L_\infty(G)$  такої, що  $r(z) \geq 1$  для м.в.  $z \in G$ , на просторі  $C_c(\overline{G}) := \{v \in C(\overline{G}) \mid \text{supp } v \text{ — обмежена множина}\}$  вводимо норму

$$\|v\|_{L_{r(\cdot)}} := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_{G,r}(v/\lambda) \leq 1\},$$

де  $\rho_{G,r}(v) := \int_G |v(z)|^{r(z)} dz$ . (Зауважимо, що коли  $r(z) = r_0 \equiv \text{const} \geq 1$  для м.в.  $z \in G$ , то  $\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(G)} = \|\cdot\|_{L_{r_0}(G)}$ .) Поповнення здобутого нормованого лінійного простору — так званий *узагальнений простір Лебега* (див., наприклад, [23, 24]) — позначимо через  $L_{r(\cdot)}(G)$ . Зауважимо, що якщо  $\text{ess inf}_{z \in \Omega} r(z) > 1$ , то спряжений до  $L_{r(\cdot)}(G)$  можна ототожнити з  $L_{r^*(\cdot)}(G)$ , де  $r^*(z)$ ,  $z \in G$ , є функція, яка визначена рівністю  $\frac{1}{r(z)} + \frac{1}{r^*(z)} = 1$ ,  $z \in G$ .

Якщо  $G$  є необмеженою областю, то через  $L_{r(\cdot), \text{loc}}(\overline{G})$  позначимо поповнення  $C(\overline{G})$  в топології, що породжена системою півнорм:  $\{\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(G')} \mid G' \in Bd(G)\}$ , де під  $Bd(G)$  розуміємо множину всеможливих обмежених підобластей області  $G$ . Зауважимо, що послідовність  $\{v_l\}_{l=1}^\infty$  *слабко* збігається до  $v$  в  $L_{r(\cdot), \text{loc}}(\overline{G})$ , якщо для будь-якої області  $G' \in Bd(G)$  послідовність  $\{v_l|_{G'}\}_{l=1}^\infty$  збігається до  $v|_{G'}$  *слабко* в  $L_{r(\cdot)}(G')$ .

Визначимо

$$C(S; L_{2, \text{loc}}(\overline{\Omega})) := \{v : S \rightarrow L_{2, \text{loc}}(\overline{\Omega}) \mid v \in C([-l, 0]; L_2(\Omega')) \\ \forall l \in \mathbb{N}, \forall \Omega' \in Bd(\Omega)\}$$

з системою півнорм  $\{\|\cdot\|_{C([-l, 0]; L_2(\Omega'))} \mid l \in \mathbb{N}, \Omega' \in Bd(\Omega)\}$ .

Нехай  $p = (p_0, \dots, p_n)$  — вектор-функція, яка задовольняє умову:

**P)** для кожного  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  функція  $p_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  — вимірна,

$$\text{ess inf}_{x \in \Omega'} p_i(x) > 1, \quad \text{ess sup}_{x \in \Omega'} p_i(x) < \infty$$

для будь-яких  $\Omega' \in Bd(\Omega)$ .

Позначимо через  $W_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0)$  поповнення простору  $C^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0) := \{v \in C^1(\overline{\Omega}) \mid v|_{\Gamma_0} = 0\}$  в топології, яка породжена системою півнорм:  $\{\|v\|_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega')} + \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega')} \mid \Omega' \in Bd(\Omega)\}$ .

Нехай  $W_{p(\cdot), \text{c}}^1(\Omega, \Gamma_0)$  — підпростір простору  $W_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0)$ , складений з функцій з обмеженими носіями.

Нехай  $b \in L_{\infty, \text{loc}}(\overline{\Omega})$ ,  $b \geq 0$  на  $\Omega$ . Введемо лінійний локально опуклий простір  $\mathbb{U}_{p, \text{loc}}^b$  як замикання простору  $C^{1,0}(\overline{Q}, \Sigma_0) := \{u \in C(\overline{Q}) \mid u_{x_i} \in C(\overline{Q}) \ (i = \overline{1, n}), \ u|_{\Sigma_0} = 0\}$  за топологією, породженою системою півнорм

$$\left\{ \|u\|_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega' \times (-l, 0))} + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega' \times (-l, 0))} + \sup_{t \in [-l, 0]} \|b^{1/2}(\cdot)u(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega')} \mid l \in \mathbb{N}, \ \Omega' \in \text{Bd}(\Omega) \right\}.$$

Очевидно, що для будь-якого  $u \in \mathbb{U}_{p, \text{loc}}^b$  маємо

$$u \in (S \rightarrow W_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0)) \cap L_{p_0(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q}), \\ u_{x_i} \in L_{p_i(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q}) \ (i = \overline{1, n}), \quad b^{1/2}u \in C(S; L_{2, \text{loc}}(\overline{\Omega})).$$

Визначимо ще один простір

$$\mathbb{U}_{p, c}^* := \{v \in \mathbb{U}_{p, \text{loc}}^b \mid \text{supp } v \text{ — обмежена множина,} \\ v_t \in L_2(Q), \ v(\cdot, 0) = 0\}.$$

## 2. Формулювання задачі й основних результатів

Спочатку дамо означення узагальненого розв'язку рівняння (1.1), що задовольняє крайові умови (1.2), а для цього введемо відповідні обмеження на вихідні дані (класи вихідних даних).

Нехай  $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$  — вектор-функція, яка задовольняє умову **P**. Під  $\mathbb{A}_p$  розумітимемо множину впорядкованих наборів дійснозначних функцій  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ , які визначені на  $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  і задовольняють умови:

- A<sub>1</sub>**) для кожного  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  функція  $a_i(x, t, s, \xi)$ ,  $(x, t, s, \xi) \in Q \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , є каратеодорівською, тобто для майже всіх  $(x, t) \in Q$  функція  $a_i(x, t, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^{1+n} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — неперервна і для будь-яких  $(s, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$  функція  $a_i(\cdot, \cdot, s, \xi) : Q \rightarrow \mathbb{R}$  — вимірна;
- A<sub>1</sub><sup>\*</sup>**)  $a_i(x, t, 0, 0) = 0$  ( $i = \overline{0, n}$ ) для майже всіх  $(x, t) \in Q$ ;
- A<sub>2</sub>**) для кожного  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , майже всіх  $(x, t) \in Q$  і будь-яких  $(s, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$  виконується нерівність

$$|a_i(x, t, s, \xi)| \leq h_{1,i}^a(x, t) \left( |s|^{p_0(x)/p_i^*(x)} + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{p_j(x)/p_i^*(x)} \right) \\ + h_{2,i}^a(x, t),$$

де  $h_{1,i}^a \in L_{\infty, \text{loc}}(\overline{Q})$ ,  $h_{2,i}^a \in L_{p_i^*(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q})$ ,  $1/p_i(x) + 1/p_i^*(x) = 1$ .

**Зауваження 2.1.** Умова  $\mathbf{A}_1^*$  не є принциповою, ми її вводимо лише для спрощення викладення матеріалу.

Нехай

$$\mathbb{F}_{\text{loc}} := L_{2, \text{loc}}(\overline{Q}).$$

**Означення 2.1.** Нехай  $b \in L_{\infty, \text{loc}}(\overline{\Omega})$ ,  $b \geq 0$  на  $\Omega$ ,  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_p$ ,  $f \in \mathbb{F}_{\text{loc}}$ . Скажемо, що функція  $u \in \mathbb{U}_{p, \text{loc}}^b$  є узагальненим розв'язком рівняння (1.1), що задовольняє крайові умови (1.2), якщо виконуються інтегральна рівність

$$\begin{aligned} \iint_Q \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, t, u, \nabla u) v_{x_i} + a_0(x, t, u, \nabla u) v - b u v_t \right\} dx dt \\ = \iint_Q f v dx dt \quad (2.1) \end{aligned}$$

для будь-яких  $v \in \mathbb{U}_{p, c}^*$ .

Мета нашої роботи — при додаткових умовах на вихідні дані, які не виключають з розгляду лінійні рівняння, вказати “аналогі крайової та початкової умов на нескінченності” такі, що задача, яка полягає в знаходженні узагальненого розв'язку рівняння (1.1), який задовольняє крайові умови (1.2) та ці “аналогі . . .”, є однозначно розв'язною.

Нехай  $k \in \{1, \dots, n\}$  — число таке, що множина  $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_k^2 < \tau^2\}$  обмежена для будь-якого  $\tau > 0$ . Зокрема, коли  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ , де  $\Omega_1$  — необмежена область в  $\mathbb{R}^k$ ,  $\Omega_2$  — обмежена область в  $\mathbb{R}^{n-k}$ , то  $k$  — саме те, про яке тільки що говорилося.

Вважатимемо, що  $0 \in \Omega$  і позначимо для будь-якого  $\tau > 0$  через  $\Omega_\tau$  зв'язну компоненту множини  $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_k^2 < \tau^2\}$ , що містить 0.

Стосовно вектор-функції  $p = (p_0, \dots, p_n)$  додатково до умови  $\mathbf{P}$  зробимо ще таке припущення:

$$\mathbf{P}^*) \quad p_0(x) = p_1(x) = \dots = p_k(x) = 2 \text{ для м.в. } x \in \Omega.$$

Далі для кожних  $\tau \geq 1$ ,  $t_0 \leq -1$  позначимо:

$$\Gamma_{j, \tau} := \Gamma_j \cap \partial\Omega_\tau \quad (j = 0, 1), \quad \Gamma_{*, \tau} := \Omega \cap \partial\Omega_\tau, \quad Q_{\tau, t_0} := \Omega_\tau \times (t_0, 0],$$

$$\Sigma_{j, \tau, t_0} := \Gamma_{j, \tau} \times (t_0, 0] \quad (j = 0, 1), \quad \Sigma_{*, \tau, t_0} := \Gamma_{*, \tau} \times (t_0, 0].$$

Нехай  $\mathbb{K}$  — множина впорядкованих наборів  $(b, g, q, \mu)$ , де  $b \in L_{\infty, \text{loc}}(\overline{\Omega})$ ,  $b \geq 0$  на  $\Omega$ ,  $g := ((g_{1,1}, g_{2,1}), \dots, (g_{1,k}, g_{2,k}))$  — вектор-функція, компонентами якої є пари невід'ємних функцій з простору  $C(\overline{Q})$ ,  $q := (q_1, q_2)$  — вектор-функція, компоненти якої  $q_1, q_2 \in C(\overline{Q})$  такі, що  $q_1(x, t) > 0$  при  $(x, t) \in \overline{Q}$  і для деякого дійсного числа  $\mu$  маємо

$$q_2(x, t) + \mu b(x) > 0 \quad \text{для м.в.} \quad (x, t) \in Q.$$

Позначимо

$$d_1(\tau, t_0) := \sup_{\Sigma_{*, \tau, t_0}} \left( \sum_{i=1}^k g_{1,i}^2 / q_1 \right)^{1/2}, \quad d_2(\tau, t_0) := \sup_{\Sigma_{*, \tau, t_0}} \left( \sum_{i=1}^k g_{2,i}^2 \right)^{1/2}.$$

Покладемо

$$E_{k, \mu}(v) := q_1 \sum_{i=1}^k v_{x_i}^2 + (q_2 + \mu b)v^2,$$

$$\lambda(\tau, t_0) := \inf_{t, v} \left\{ \left[ \int_{\Gamma_{*, \tau}} E_{k, \mu}(v) d\Gamma \right] \left[ \int_{\Gamma_{*, \tau}} v^2 d\Gamma \right]^{-1} \right\},$$

де інфімум береться по всіх неперервно-диференційовних в околі  $\overline{\Gamma_{*, \tau}}$  функціях  $v$ , які рівні нулю на  $\partial\Gamma_{*, \tau} \cap \Gamma_0$ , і всіх  $t \in [t_0, T]$ ;

$$\Theta(\tau, t_0) := \sup_v \left\{ \left[ \int_{\Omega_\tau} E_{k, \mu}(v)|_{t=t_0} dx \right]^{-1} \cdot \left[ \int_{\Omega_\tau} b v^2 dx \right] \right\},$$

де супремум береться по всіх функціях  $v \in C^1(\overline{\Omega_\tau})$ , які рівні нулю в околі  $\overline{\Gamma_{0, \tau}}$ .

Через  $\mathbb{K}^*$  позначимо підмножину множини  $\mathbb{K}$ , для кожного елемента  $(b, g, q, \mu)$  якої існують неперервні додатні функції  $A_1(\tau, t_0)$ ,  $A_2(\tau, t_0)$ ,  $(\tau, t_0) \in \Pi := [1, +\infty) \times (-\infty, -1]$  такі, що для будь-яких  $(\tau, t_0) \in \Pi$  виконуються нерівності

$$d_1(\tau, t_0)\lambda^{-1/2}(\tau, t_0) + d_2(\tau, t_0)\lambda^{-1}(\tau, t_0) \leq A_1(\tau, t_0), \quad (2.2)$$

$$\Theta^{-1}(\tau, t_0) \leq 2A_2(\tau, t_0), \quad (2.3)$$

і задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = A_1(\tau, t_0), \quad \frac{dt_0}{d\alpha} = -A_2(\tau, t_0), \quad (2.4)$$

$$\tau(0) = 1, \quad t_0(0) = -1 \quad (2.5)$$

має єдиний розв'язок  $\tau(\alpha)$ ,  $t_0(\alpha)$ ,  $\alpha \in [0, +\infty)$ , і цей розв'язок задовольняє умову:

$$\tau(\alpha) \rightarrow +\infty, \quad t_0(\alpha) \rightarrow -\infty \quad \text{при } \alpha \rightarrow +\infty.$$

Далі *всюди вважаємо*, що  $(b, g, q, \mu)$  — який-небудь елемент  $\mathbb{K}^*$ .

Нехай  $\mathbb{A}_p^1(b, g, q, \mu)$  — підмножина  $\mathbb{A}_p$ , будь-який елемент якої задовольняє ще дві умови, які ми зараз сформулюємо:

**A<sub>3</sub>**) для кожного  $i \in \{1, \dots, k\}$  і для майже всіх  $(x, t) \in Q$  та будь-яких  $(s_1, \xi^1), (s_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$

$$\begin{aligned} & |a_i(x, t, s_1, \xi^1) - a_i(x, t, s_2, \xi^2)| \\ & \leq g_{1,i}(x, t) \left( \sum_{i=1}^k |\xi_i^1 - \xi_i^2| \right)^{1/2} + g_{2,i}(x, t) |s_1 - s_2|; \end{aligned}$$

**A<sub>4</sub>**) для майже всіх  $(x, t) \in Q$  і будь-яких  $(s_1, \xi^1), (s_2, \xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (a_i(x, t, s_1, \xi^1) - a_i(x, t, s_2, \xi^2)) (\xi_i^1 - \xi_i^2) \\ & \quad + (a_0(x, t, s_1, \xi^1) - a_0(x, t, s_2, \xi^2)) (s_1 - s_2) \\ & \geq q_1(x, t) \sum_{i=1}^k |\xi_i^1 - \xi_i^2|^2 + q_2(x, t) |s_1 - s_2|^2. \end{aligned}$$

Нехай  $\tau(\alpha)$ ,  $t_0(\alpha)$ ,  $\alpha \in [0, +\infty)$ , — розв'язок задачі (2.4), (2.5). Введемо ще такі позначення

$$\Omega^\alpha := \Omega_{\tau(\alpha)}, \quad \Gamma_j^\alpha := \Gamma_{j, \tau(\alpha)} \quad (j = 0, 1), \quad \Gamma_*^\alpha := \Gamma_{*, \tau(\alpha)},$$

$$Q^\alpha := Q_{\tau(\alpha), t_0(\alpha)}, \quad \Sigma_j^\alpha := \Sigma_{j, \tau(\alpha), t_0(\alpha)} \quad (j = 0, 1), \quad \Sigma_*^\alpha := \Sigma_{*, \tau(\alpha), t_0(\alpha)}$$

при  $\alpha \geq 0$ .

Покладемо

$$\langle v \rangle_\alpha := \left( \iint_{Q^\alpha} E_{k, \mu}(v) e^{-2\mu t} dx dt \right)^{1/2}$$

для всіх  $\alpha \geq 0$ .



А тепер сформулюємо основні результати роботи. Вони стосуються однозначної розв'язності задачі на знаходження узагальненого розв'язку рівняння (1.1), що задовольняють умови (1.2) та умову

$$\langle v \rangle_R = o(1)e^{R/2} \quad \text{при } R \rightarrow +\infty \quad (2.6)$$

(аналог початково-крайової умови на нескінченності).

Далі цю задачу коротко будемо називати задачею (1.1), (1.2), (2.6), а шукану функцію  $u$  — узагальненим розв'язком цієї задачі.

**Теорема 2.1 (єдиність розв'язку).** *Нехай  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^1(b, g, q, \mu)$ . Тоді задача (1.1), (1.2), (2.6) має не більше одного узагальненого розв'язку.*

Перейдемо до формулювання теореми існування розв'язку задачі (1.1), (1.2), (2.6).

Нехай  $\mathbb{A}_p^2(b, g, q, \mu)$  — підмножина множини  $\mathbb{A}_p^1(b, g, q, \mu)$ , кожний елемент якої  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$  додатково задовольняє умову

**A<sub>5</sub>**) для майже всіх  $(x, t) \in Q$  і будь-яких  $(s, \xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n a_i(x, t, s, \xi) \xi_i + a_0(x, t, s, \xi) s \\ & \geq q_1(x, t) \sum_{i=1}^k |\xi_i|^2 + q_2(x, t) |s|^2 + q_3^a(x, t) \sum_{i=k+1}^n |\xi_i|^{p_i(x)}, \end{aligned}$$

де  $q_3^a \in L_\infty(Q)$ ,  $\text{ess inf}_{x \in Q^m} q_3^a(x, t) > 0$  для кожного  $m \in \mathbb{N}$ .

Для кожного натурального  $m$  покладемо

$$\Lambda_m = \inf_{t,v} \left\{ \left[ \int_{\Omega^m} E_{k,\mu}(v) dx \right] \cdot \left[ \int_{\Omega^m} v^2 dx \right]^{-1} \right\}, \quad (2.7)$$

де інфімум береться по всіх функціях  $v$  з  $C^1(\overline{\Omega^m})$ , які рівні нулю на  $\Gamma_0^m$ , і всіх  $t \in [t_0(m), 0]$ .

Позначимо через  $\mathbb{F}_{\text{loc}}^*$  підмножину множини  $\mathbb{F}_{\text{loc}}$ , яка складається з тих функцій  $f$ , для яких існують сталі  $C_1 > 0$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$  такі, що

$$\iint_{Q^m} |f(x, t)|^2 e^{-2\mu t} dx dt \leq C_1 \Lambda_m e^{(1-\varepsilon)m}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

**Теорема 2.2 (існування розв'язку).** Припустимо, що  $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_p^2(b, g, q, \mu)$  та  $f \in \mathbb{F}_{loc}^*$ , тобто виконується нерівність (2.8) з деякими сталими  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,  $C_1 > 0$ . Тоді існує (єдиний) узагальнений розв'язок задачі (1.1), (1.2), (2.6) і він задовольняє оцінку

$$\langle u \rangle_m \leq C_2 e^{(1-\varepsilon)m/2}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (2.9)$$

де  $C_2 > 0$  — стала, яка залежить тільки від  $\varepsilon$  та  $C_1$ .

**Зауваження 2.2.** Розглянемо рівняння

$$(bu)_t - \sum_{i,j=1}^k (\hat{a}_{ij}(x, t) u_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=k+1}^n (\hat{a}_i(x, t) |u_{x_i}|^{p_i(x)-2} u_{x_i})_{x_i} + \hat{a}_0(x, t) u = f(x, t), \quad (x, t) \in Q.$$

Для цього рівняння правильні твердження теорем 2.1 і 2.2, якщо  $\hat{a}_{ij} \in L_{\infty, \text{loc}}(\overline{Q})$ ,  $\hat{a}_{ij} = \hat{a}_{ji}$ ,  $|\hat{a}_{ij}| \leq g_{1,i}$  ( $i, j = \overline{1, k}$ ) і для майже всіх  $(x, t) \in Q$

$$\sum_{i,j=1}^k \hat{a}_{ij}(x, t) \eta_i \eta_j \geq q_1(x, t) \sum_{i=1}^k |\eta_i|^2 \quad \forall \eta_i \in \mathbb{R} \quad (i = \overline{1, k}),$$

$$\hat{a}_0 \in L_{\infty, \text{loc}}(\overline{Q}), \quad \hat{a}_0 \geq q_2, \quad \hat{a}_i \in L_{\infty, \text{loc}}(\overline{Q}) \quad (i = \overline{k+1, n}),$$

$$\text{ess inf}_{(x,t) \in Q^m} \hat{a}_i(x, t) > 0$$

для кожного  $i \in \{k+1, \dots, n\}$  та  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathbb{F}_{loc}^*$ .

### 3. Допоміжні твердження

У цьому пункті ми сформулюємо і доведемо твердження, які відіграють важливу роль при доведенні теорем 2.1 і 2.2, але мають технічний характер.

**Лема 3.1 (аналог принципу Сен-Венана).** Нехай  $R > 0$  — деяке число і  $u_1, u_2$  — функції з  $\mathbb{U}_{p, \text{loc}}^b$ , які задовольняють рівність (2.1) для всіх  $v \in \mathbb{U}_{p, c}^*$ ,  $\text{supp } v \subset \overline{Q^R}$ . Тоді для будь-яких  $R_1, R_2$  таких, що  $0 < R_1 < R_2 \leq R$ , виконується оцінка

$$\langle u_1 - u_2 \rangle_{R_1} \leq e^{(R_1 - R_2)/2} \cdot \langle u_1 - u_2 \rangle_{R_2}. \quad (3.1)$$

**Зауваження 3.1.** Нерівність вигляду (3.1) отримано в [9] для узагальнених розв'язків із  $W_{2, \text{loc}}^{1,1}$  лінійних параболічних рівнянь у довільних областях, а в [16, 21, 22] для узагальнених розв'язків із  $W_{2, \text{loc}}^{1,0}$  лінійних і квазілінійних параболічних рівнянь в обмежених за часовою змінною областях. Така нерівність є аналогом відомого в теорії пружності принципу Сен-Венана.

**Зауваження 3.2.** Далі будуть потрібні усереднення за Стекловим і деякі властивості цих усереднень. Нагадаємо їх (див., наприклад, [11]). Нехай  $v \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ . Покладемо для кожного  $h > 0$

$$v_h(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t v(\theta) d\theta, \quad v_{\bar{h}}(r) = \frac{1}{h} \int_r^{r+h} v(\theta) d\theta, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Легко перевірити справедливість рівностей

$$\int_{a-h}^b v\varphi_{\bar{h}} dt = \int_a^b v_h\varphi dt, \quad \int_{a-h}^b v(\varphi_{\bar{h}})_t dt = - \int_a^b (v_h)_t\varphi dt \quad (3.2)$$

для будь-яких  $v, \varphi \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , якщо  $\varphi = 0$  поза  $[a, b]$ .

Якщо  $v \in L^2(a, b)$ , то під  $v_h$  і  $v_{\bar{h}}$  будемо розуміти відповідні усереднення за Стекловим продовження функції  $v$  нулем поза  $[a, b]$ .

*Доведення лема 3.1.* Доведення розіб'ємо на два етапи.

1 *етап.* Для будь-якого елемента  $x \in \mathbb{R}^n$  покладемо  $x = (x', x'')$ , де  $x' = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ , і побудуємо сім'ю зрізаючих функцій  $\psi_\delta(\cdot, \tau) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, \tau \in [1, +\infty), \delta \in (0, 1/2)$ , таких, що для кожних  $\delta \in (0, 1/2), \tau \in [0, \infty)$  функція  $x' \rightarrow \psi_\delta(x', \tau)$  належить простору  $C^\infty(\mathbb{R}^k)$  і задовольняє умови:  $0 \leq \psi_\delta(x', \tau) \leq 1$  для будь-якого  $x' \in \mathbb{R}^k, \psi_\delta(x', \tau) = 1$ , коли  $|x'| \leq \tau - 2\delta, \psi_\delta(x', \tau) = 0$ , коли  $|x'| \geq \tau, |\partial\psi_\delta(x', \tau)/\partial x_j| \leq C_3/\delta$  для будь-яких  $x' \in \mathbb{R}^k$  та  $j \in \{1, \dots, k\}$ , де  $C_3 > 0$  — стала, яка від  $\tau$  і  $\delta$  не залежить. Для цього розглянемо функцію (див. [9])

$$g_\delta(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\xi-\delta} \omega\left(\frac{\eta-\theta}{\delta}\right) \frac{d\theta}{\delta}, \quad (\xi, \eta) \in \text{Im } \mathbb{R}^2,$$

де  $\omega$  — функція з простору  $C^\infty(-\infty, +\infty)$  така, що  $\omega(\sigma) = 0$  при  $|\sigma| \geq 1, 0 < \omega(\sigma) \leq 1$  при  $|\sigma| < 1$  і  $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\sigma) d\sigma = 1$ . Очевидно, що  $g_\delta(\xi, \eta) = 1$  при  $\eta \leq \xi - 2\delta, g_\delta(\xi, \eta) = 0$  при  $\eta \geq \xi, 0 \leq g_\delta \leq 1$  при  $\xi - 2\delta \leq \eta \leq \xi$ . Прості обчислення дають оцінку:  $|\partial g_\delta(\xi, \eta)/\partial \eta| \leq \delta^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega'(\sigma)| d\sigma \equiv C_3/\delta$ , де  $C_3 > 0$  — стала, яка від  $\delta$  не залежить. Тоді для довільних  $\tau \in [0, +\infty), \delta \in (0, 1/2)$  покладемо  $\psi_\delta(x', \tau) = g_\delta(\tau, |x'|), x' \in \mathbb{R}^k$ .

Нехай  $\{u_{1m}\}_{m=1}^\infty, \{u_{2m}\}_{m=1}^\infty$  — послідовності функцій з  $C^{1,0}(\overline{Q}, \Sigma_0)$  такі, що для  $j \in \{0, 1\}$  маємо  $u_{jm} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u_j$  в топології простору  $\mathbb{U}_{p,\text{loc}}^b$ .

Позначимо  $w := u_1 - u_2, w_m := u_{1m} - u_{2m}, m \in \mathbb{N}$ . Тепер відніmemo від інтегральної тотожності (2.1), записаної для  $u_1$ , що ж тотожність, але записану для  $u_2$ . Візьмемо довільні  $\tau, t_0, 1 < \tau <$

$\tau(R)$ ,  $t_0(R) < t_0 < 0$ , і покладемо в здобуту (після віднімання) інтегральну тотожність  $v(x, t) = (\hat{w}_{mh}\chi)_{\bar{h}}(x, t)\psi_\delta(x', \tau)$ ,  $(x, t) \in \bar{Q}$ , де  $0 < h < t_0 - t_0(R)$ ,  $\hat{w}_{mh} = w_{mh}$  на  $Q_{\tau, t_0}$  і  $\hat{w}_{mh} = 0$  поза  $Q_{\tau, t_0}$ ,  $\delta$  — довільне число з проміжку  $(0, 1/2)$ ,  $\chi(t) = e^{-2\mu t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Тоді, враховуючи властивості усереднень (3.2), отримаємо

$$\begin{aligned} \iint_{Q_{\tau, t_0}} \left[ bw_{h,t}w_{mh}\psi_\delta + \sum_{i=1}^n (a_i(u_1) - a_i(u_2))_h w_{mh, x_i} \psi_\delta \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^k (a_i(u_1) - a_i(u_2))_h w_{mh} \psi_{\delta, x_i} \right. \\ \left. + (a_0(u_1) - a_0(u_2))_h w_{mh} \psi_\delta \right] e^{-2\mu t} dx dt = 0. \quad (3.3) \end{aligned}$$

Тут і далі використовується позначення

$$a_i(v)(x, t) := a_i(x, t, v(x, t), \nabla v(x, t)), \quad (x, t) \in Q, \quad i = \overline{0, n}. \quad (3.4)$$

Перепишемо рівність (3.3) так

$$\begin{aligned} \iint_{Q_{\tau, t_0}} \left[ bw_{mh,t}w_{mh} + \sum_{i=1}^n (a_i(u_{1mh}) - a_i(u_{2mh}))w_{mh, x_i} \right. \\ \left. + (a_0(u_{1mh}) - a_0(u_{2mh}))w_{mh} \right] e^{-2\mu t} dx dt \\ = \mathcal{E}_{mh\delta}(\tau, t_0) + \mathcal{G}_{mh\delta}(\tau, t_0), \quad (3.5) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{mh\delta}(\tau, t_0) := \iint_{Q_{\tau, t_0}} [bw_{mh,t}w_{mh} - bw_{h,t}w_{mh}\psi_\delta \\ + \sum_{i=1}^n (a_i(u_{1mh}) - a_i(u_{2mh}))w_{mh, x_i} - \sum_{i=1}^n (a_{ih}(u_1) - a_{ih}(u_2))w_{mh, x_i} \psi_\delta \\ + (a_0(u_{1mh}) - a_0(u_{2mh}))w_{mh} - (a_{0h}(u_1) - a_{0h}(u_2))w_{mh}\psi_\delta] e^{-2\mu t} dx dt, \\ \mathcal{G}_{mh\delta}(\tau, t_0) = - \iint_{Q_{\tau, t_0}} \sum_{i=1}^k (a_{ih}(u_1) - a_{ih}(u_2))w_{mh}\psi_{\delta, x_i} e^{-2\mu t} dx dt. \end{aligned}$$

Поклавши  $D_{\tau, t_0}^\delta = Q_{\tau, t_0} \setminus Q_{\tau-2\delta, t_0}$ , перетворимо  $\mathcal{G}_{mh\delta}(\tau, t_0)$  таким чином.

Покладемо

$$a_{i\rho}(u_{jmh})(x, t) = \iint_Q a_i(u_{jmh})(z, s) \omega_\rho(x - z, t - s) dz ds, \quad (x, t) \in \overline{Q}$$

( $i = 0, \dots, n, j = 1, 2$ ), де  $\{\omega_\rho, \rho > 0\}$  — ядра усереднень (див., наприклад, [11]), тобто для кожного  $\rho > 0$  маємо  $\omega_\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $\omega_\rho(x, t) = 0$ , коли  $|x|^2 + |t|^2 \geq \rho^2$ ,  $\omega_\rho(x, t) \geq 0$ , коли  $|x|^2 + |t|^2 < \rho^2$ ,  $\iint_{\mathbb{R}^{n+1}} \omega_\rho dx dt = 1$ . Тоді

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}_{mh\delta}(\tau, t_0) \\ &= \iint_{D_{\tau, t_0}^\delta} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \sum_{i=1}^k [a_{i\rho}(u_{jmh}) - a_{ih}(u_j)] w_{mh} \psi_{\delta, x_i} e^{-2\mu t} dx dt \\ & \quad + \iint_{D_{\tau, t_0}^\delta} \sum_{i=1}^k [(a_{i\rho}(u_{1mh}) - a_{i\rho}(u_{2mh})) w_{mh}]_{x_i} \psi_\delta e^{-2\mu t} dx dt \\ & \quad - \iint_{\Sigma_{1, \tau, t_0} \setminus \Sigma_{1, \tau - 2\delta, t_0}} \sum_{i=1}^k (a_{i\rho}(u_{1mh}) - a_{i\rho}(u_{2mh})) w_{mh} \nu_i \psi_\delta e^{-2\mu t} d\Gamma dt \\ & \quad + \iint_{\Sigma_{*, \tau - 2\delta, t_0}} \sum_{i=1}^k (a_{i\rho}(u_{1mh}) - a_{i\rho}(u_{2hm})) w_{mh} \nu_i e^{-2\mu t} d\Gamma dt \\ & \quad - \iint_{\Sigma_{*, \tau, t_0}} \sum_{i=1}^k (a_{i\rho}(u_{1mh}) - a_{i\rho}(u_{2mh})) w_{mh} \nu_i e^{-2\mu t} d\Gamma dt \\ & \quad + \iint_{\Sigma_{*, \tau, t_0}} \sum_{i=1}^k (a_{i\rho}(u_{1mh}) - a_{i\rho}(u_{2mh})) w_{mh} \nu_i e^{-2\mu t} d\Gamma dt \\ & \equiv \mathcal{G}_{mh\delta\rho}^*(\tau, t_0) + \iint_{\Sigma_{*, \tau, t_0}} \sum_{i=1}^k (a_{i\rho}(u_{1mh}) - a_{i\rho}(u_{2mh})) w_{mh} \nu_i e^{-2\mu t} d\Gamma dt, \end{aligned} \tag{3.6}$$

де  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  — одиничний вектор зовнішньої нормалі до  $\partial\Omega_\tau$ .

Тепер перетворимо ліву частину (3.5), інтегруючи частинами і використовуючи умову **A**<sub>4</sub>. У результаті, врахувавши (3.6), отримаємо

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} b w_{mh}^2|_{t=0} dx + \iint_{Q_{\tau, t_0}} E_{k, \mu}(w_{mh}) e^{-2\mu t} dx dt$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{\Sigma_{*,\tau,t_0}} \sum_{i=1}^k (a_{i\rho}(u_{1mh}) - a_{i\rho}(u_{2mh})) w_{mh} \nu_i e^{-2\mu t} d\Gamma dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} b w_{mh}^2|_{t=t_0} e^{-2\mu t_0} dx + \mathcal{E}_{mh\delta}(\tau, t_0) + \mathcal{G}_{mh\delta\rho}^*(\tau, t_0). \quad (3.7) \end{aligned}$$

Відмітимо, що в силу умови **A<sub>3</sub>** для кожних  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $(x, t) \in \overline{Q}$  маємо

$$\begin{aligned} &|a_{i\rho}(u_{1mh})(x, t) - a_{i\rho}(u_{2mh})(x, t)| \\ &= \left| \iint_Q [a_i(u_{1mh})(z, s) - a_i(u_{2mh})(z, s)] \omega_\rho(x - z, t - s) dz ds \right| \\ &\leq \iint_Q |a_i(z, s, u_{1mh}(z, s), \nabla u_{1mh}(z, s)) \\ &\quad - a_i(z, s, u_{2mh}(z, s), \nabla u_{2mh}(z, s))| \omega_\rho(x - z, t - s) dz ds \\ &\leq \iint_Q (g_{1,i}(z, s) |\nabla_k w_{mh}(z, s)| + g_{2,i}(z, s) |w_{mh}(z, s)|) \omega_\rho(x - z, t - s) dz ds \\ &\equiv (g_{1,i} |\nabla_k w_{mh}| + g_{2,i} |w_{mh}|)_\rho(x, t), \end{aligned}$$

де  $\nabla_k w_{mh} := (w_{mh,x_1}, \dots, w_{mh,x_k})$ . Звідси та з нерівності Коші–Буняковського випливає

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma_{*,\tau,t_0}} \sum_{i=1}^k (a_{i\rho}(u_{1mh}) - a_{i\rho}(u_{2mh})) w_{mh} \nu_i e^{-2\mu t} d\Gamma dt \\ &\leq \iint_{\Sigma_{*,\tau,t_0}} \sum_{i=1}^k |(g_{1,i} |\nabla_k w_{mh}| + g_{2,i} |w_{mh}|)_\rho \\ &\quad - (g_{1,i} |\nabla_k w_{mh}| + g_{2,i} |w_{mh}|)| |w_{mh}| |\nu_i| e^{-2\mu t} d\Gamma dt \\ &\quad + \iint_{\Sigma_{*,\tau,t_0}} \sum_{i=1}^k |(g_{1,i} |\nabla_k w_{mh}| + g_{2,i} |w_{mh}|)| |w_{mh}| |\nu_i| e^{-2\mu t} d\Gamma dt \\ &\leq \left( \iint_{\Sigma_{*,\tau,t_0}} \left( \sum_{i=1}^k g_{1,i}^2 \right) |\nabla_k w_{mh}|^2 e^{-2\mu t} d\Gamma dt \right)^{1/2} \left( \iint_{\Sigma_{*,\tau,t_0}} w_{mh}^2 e^{-2\mu t} d\Gamma dt \right)^{1/2} \\ &\quad + \iint_{\Sigma_{*,\tau,t_0}} \left( \sum_{i=1}^k g_{2,i}^2 \right)^{1/2} w_{mh}^2 e^{-2\mu t} d\Gamma dt + L_{\rho(mh)}(\tau, t_0), \quad (3.8) \end{aligned}$$

де

$$L_{\rho(mh)} := \iint_{\Sigma_{*,\tau,t_0}} b_{mh\rho} d\Gamma dt,$$

$$b_{mh\rho} := \sum_{i=1}^k |(g_{1,i}|\nabla_k w_{mh}| + g_{2,i}|w_{mh}|)_{\rho} - (g_{1,i}|\nabla_k w_{mh}| + g_{2,i}|w_{mh}|)| |w_{mh}| e^{-2\mu t}.$$

Отже, з (3.7) і (3.8), використовуюючи введені вище позначення, отримаємо

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_{\tau,t_0}} E_{k,\mu}(w_{mh}) e^{-2\mu t} dx dt \\ & \leq [d_1(\tau, t_0)\lambda^{-1/2}(\tau, t_0) + d_2(\tau, t_0)\lambda^{-1}(\tau, t_0)] \\ & \times \iint_{\Sigma_{*,\tau,t_0}} E_{k,\mu}(w_{mh}) e^{-2\mu t} d\Gamma dt + \frac{1}{2}\Theta^{-1}(\tau, t_0) \int_{\Omega_{\tau}} E_{k,\mu}(w_{mh}) \Big|_{t=t_0} e^{-2\mu t_0} dx \\ & + \mathcal{E}_{mh\delta}(\tau, t_0) + \mathcal{G}_{mh\delta\rho}^*(\tau, t_0) + L_{\rho(mh)}(\tau, t_0). \quad (3.9) \end{aligned}$$

Покладемо

$$F_{mh}(\tau, t_0) := \iint_{Q_{\tau,t_0}} E_{k,\mu}(w_{mh}) e^{-2\mu t} dx dt$$

для будь-яких  $(\tau, t_0) \in \Pi$ . Тоді з (3.9) на підставі (2.2)–(2.5) отримаємо

$$\begin{aligned} F_{mh}(\tau(\alpha), t_0(\alpha)) & \leq \frac{\partial F_{mh}}{\partial \tau} \frac{d\tau}{d\alpha} + \frac{\partial F_{mh}}{\partial t_0} \frac{dt_0}{d\alpha} \\ & + \mathcal{E}_{mh\delta}(\tau(\alpha), t_0(\alpha)) + \mathcal{G}_{mh\delta\rho}^*(\tau(\alpha), t_0(\alpha)) + L_{\rho(mh)}(\tau(\alpha), t_0(\alpha)), \end{aligned}$$

звідки

$$\begin{aligned} 0 & \leq -F_{mh}(\tau(\alpha), t_0(\alpha)) + \frac{dF_{mh}(\tau(\alpha), t_0(\alpha))}{d\alpha} + \mathcal{E}_{mh\delta}(\tau(\alpha), t_0(\alpha)) \\ & + \mathcal{G}_{mh\delta\rho}^*(\tau(\alpha), t_0(\alpha)) + L_{\rho(mh)}(\tau(\alpha), t_0(\alpha)). \quad (3.10) \end{aligned}$$

Помножимо (3.10) на  $e^{-\alpha}$  і проінтегруємо отриману нерівність по  $\alpha$  від  $R_1$  до  $R_2$ ,  $0 < R_1 < R_2 \leq R$ . У результаті після простих перетворень здобудемо

$$F_{mh}(\tau(R_1), t_0(R_1)) \leq e^{R_1 - R_2} F_{mh}(\tau(R_2), t_0(R_2)) + \int_{R_1}^{R_2} [\mathcal{E}_{mh\delta}(\tau, t_0) + \mathcal{G}_{mh\delta\rho}^*(\tau, t_0) + L_{\rho(mh)}(\tau, t_0)] e^{R_1 - \alpha} d\alpha. \quad (3.11)$$

2 *eman.* Покажемо, що другий член правої частини нерівності (3.11) можна зробити як завгодно малим за рахунок вибору достатньо малих значень  $h, \delta, \rho$  і великих  $m$ .

Перетворимо вираз  $\mathcal{E}_{mh\delta}(\tau, t_0)$ , поклавши  $\partial_i v = v_{x_i}$ , коли  $i \in \{1, \dots, n\}$ , і  $\partial_0 v = v$ , таким чином:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{mh\delta}(\tau, t_0) &= \iint_{Q_{\tau, t_0}} [bw_{h,t}w_{mh}(1 - \psi_\delta) + b(w_{mh,t} - w_{h,t})w_{mh} \\ &\quad + \sum_{i=0}^n (a_{ih}(u_1) - a_{ih}(u_2))(1 - \psi_\delta)\partial_i w_{mh} \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \sum_{i=0}^n \{(a_i(u_{jmh}) - a_i(u_{jh})) \\ &\quad + (a_i(u_{jh}) - a_i(u_j)) + (a_i(u_j) - a_{ih}(u_j))\} \partial_i w_{mh}] e^{-2\mu t} dx dt \\ &\equiv \mathcal{E}_h^{(m)}(\tau, t_0) + \mathcal{E}_{m(h)}(\tau, t_0) + \mathcal{E}_{\delta(mh)}(\tau, t_0), \quad (3.12) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h^{(m)}(\tau, t_0) &:= \iint_{Q_{\tau, t_0}} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \sum_{i=0}^n [(a_i(u_{jh}) - a_i(u_j)) \\ &\quad + (a_i(u_j) - a_{ih}(u_j))] \partial_i w_{mh} e^{-2\mu t} dx dt, \quad (3.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m(h)}(\tau, t_0) &:= \iint_{Q_{\tau, t_0}} b(w_{mh,t} - w_{h,t})w_{mh} e^{-2\mu t} dx dt \\ &\quad + \iint_{Q_{\tau, t_0}} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \sum_{i=0}^n (a_i(u_{jmh}) - a_i(u_{jh})) \partial_i w_{mh} e^{-2\mu t} dx dt, \quad (3.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\delta(m,h)}(\tau, t_0) &:= \iint_{Q_{\tau, t_0}} \left[ bw_{h,t}w_{mh} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^n (a_{ih}(u_1) - a_{ih}(u_2)) \partial_i w_{mh} \right] (1 - \psi_\delta) e^{-2\mu t} dx dt. \quad (3.15) \end{aligned}$$



Тепер перетворимо вираз  $\mathcal{G}_{mh\delta\rho}^*(\tau, t_0)$  так:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{mh\delta\rho}^*(\tau, t_0) &= \iint_{D_{\tau, t_0}^\delta} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \sum_{i=1}^k [(a_{i\rho}(u_{jmh}) - a_i(u_{jmh})) \\
 &\quad + (a_i(u_{jmh}) - a_i(u_{jh})) + (a_i(u_{jh}) - a_i(u_j)) \\
 &\quad + (a_i(u_j) - a_{ih}(u_j))] w_{mh} \psi_{\delta, x_i} e^{-2\mu t} dx dt \\
 &\quad + \iint_{D_{\tau, t_0}^\delta} \sum_{i=1}^k [(a_{i\rho}(u_{1mh}) - a_{i\rho}(u_{2mh})) w_{mh}]_{x_i} \psi_\delta e^{-2\mu t} dx dt \\
 &\quad - \iint_{\Sigma_{1, \tau, t_0} \setminus \Sigma_{1, \tau - 2\delta, t_0}} \sum_{i=1}^k (a_{i\rho}(u_{1mh}) - a_{i\rho}(u_{2mh})) w_{mh} \nu_i \psi_\delta e^{-2\mu t} d\Gamma dt \\
 &\quad + \iint_{\Sigma_{*, \tau - 2\delta, t_0}} \sum_{i=1}^k (a_{i\rho}(u_{1mh}) - a_{i\rho}(u_{2mh})) w_{mh} \nu_i e^{-2\mu t} d\Gamma dt \\
 &\quad - \iint_{\Sigma_{*, \tau, t_0}} \sum_{i=1}^k (a_{i\rho}(u_{1mh}) - a_{i\rho}(u_{2mh})) w_{mh} \nu_i e^{-2\mu t} d\Gamma dt \\
 &\equiv \mathcal{G}_h^{*(m\delta)}(\tau, t_0) + \mathcal{G}_{m(h)}^{*(\delta)}(\tau, t_0) + \mathcal{G}_{\rho(mh)}^{*(\delta)}(\tau, t_0) + \mathcal{G}_{\delta(mh\rho)}^*(\tau, t_0), \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_h^{*(m\delta)}(\tau, t_0) &= \iint_{D_{\tau, t_0}^\delta} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \sum_{i=1}^k [(a_i(u_{jh}) - a_i(u_j)) \\
 &\quad + (a_i(u_j) - a_{ih}(u_j))] w_{mh} \psi_{\delta, x_i} e^{-2\mu t} dx dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{m(h)}^{*(\delta)}(\tau, t_0) &= \iint_{D_{\tau, t_0}^\delta} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \sum_{i=1}^k (a_i(u_{jmh}) \\
 &\quad - a_i(u_{jh})) w_{mh} \psi_{\delta, x_i} e^{-2\mu t} dx dt, \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{\rho(mh)}^{*(\delta)}(\tau, t_0) &= \iint_{D_{\tau, t_0}^\delta} \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \sum_{i=1}^k (a_{i\rho}(u_{jmh}) \\
 &\quad - a_{i\rho}(u_{jmh})) w_{mh} \psi_{\delta, x_i} e^{-2\mu t} dx dt, \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\delta}^*(mh\rho)(\tau, t_0) &= \iint_{D_{\tau, t_0}^{\delta}} \sum_{i=1}^k [(a_{i\rho}(u_{1mh}) - a_{i\rho}(u_{2mh}))w_{mh}]_{x_i} \psi_{\delta} e^{-2\mu t} dx dt \\
&- \iint_{\Sigma_{1, \tau, t_0} \setminus \Sigma_{1, \tau-2\delta, t_0}} \sum_{i=1}^k (a_{i\rho}(u_{1mh}) - a_{i\rho}(u_{2mh}))w_{mh} \nu_i \psi_{\delta} e^{-2\mu t} d\Gamma dt \\
&+ \iint_{\Sigma_{*, \tau-2\delta, t_0}} \sum_{i=1}^k (a_{i\rho}(u_{1mh}) - a_{i\rho}(u_{2mh}))w_{mh} \nu_i e^{-2\mu t} d\Gamma dt \\
&- \iint_{\Sigma_{*, \tau, t_0}} \sum_{i=1}^k (a_{i\rho}(u_{1mh}) - a_{i\rho}(u_{2mh}))w_{mh} \nu_i e^{-2\mu t} d\Gamma dt. \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Далі нам будуть потрібні два допоміжні твердження.

**Твердження 3.1.** Для будь-яких фіксованих  $R_1$  та  $R_2$ ,  $0 < R_1 < R_2$ , маємо оцінку

$$\int_{R_1}^{R_2} |\psi_{\delta, x_i}(x', \tau(\alpha))| d\alpha \leq C_4, \quad i = \overline{1, k}, \quad (3.20)$$

де  $C_4 > 0$  — стала, яка не залежить від  $x' \in \mathbb{R}^k$  і  $\delta \in (0, 1/2)$ .

*Доведення.* Оцінка (3.20) практично встановлена в роботі [9], але для повноти картини наведемо тут її доведення.

Маємо

$$\begin{aligned}
\int_{R_1}^{R_2} |\psi_{\delta, x_i}(x', \tau(\alpha))| d\alpha &= \int_{R_1}^{R_2} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} g_{\delta}(\tau(\alpha), |x'|) \right| d\alpha \\
&\leq C_5 \int_{\tau(R_1)}^{\tau(R_2)} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} g_{\delta}(\xi, |x'|) \right| d\xi \leq C_5 \int_{\tau(R_1)}^{\tau(R_2)} \left| \frac{\partial}{\partial \eta} g_{\delta}(\xi, \eta) \right| d\xi \\
&\leq C_5 \int_{\eta}^{\eta+2\delta} \left| \frac{\partial}{\partial \eta} g_{\delta}(\xi, \eta) \right| d\xi, \quad i = \overline{1, k}, \quad (3.21)
\end{aligned}$$

де  $C_5 > 0$  — стала, яка не залежить від  $x'$  і  $\delta$ , а  $\eta = |x'|$ . Так як функція  $\frac{\partial}{\partial \eta} g_{\delta}(\xi, \eta)$  при фіксованому  $\eta$  рівна нулю поза відрізком  $[\eta, \eta + 2\delta]$  осі  $\xi$  і  $|\partial g_{\delta}(\xi, \eta)/\partial \eta| \leq C_3/\delta$ , де  $C_3 > 0$  — стала, яка не залежить від  $\delta$ , то останній інтеграл у нерівності (3.21) обмежений рівномірно відносно  $\delta \in (0, 1/2)$ . Твердження 3.1 доведено.  $\square$

**Твердження 3.2.** Нехай  $P \in L_{1,loc}(\overline{Q})$ ,  $P \geq 0$  на  $Q$ . Тоді для будь-яких  $R_1, R_2$ ,  $0 < R_1 < R_2$ ,

$$\int_{R_1}^{R_2} d\alpha \iint_{D_{\tau(\alpha), t_0(\alpha)}^\delta} P |\psi_{\delta, x_i}(x', \tau(\alpha))| dx dt \leq C_6 \iint_{Q^{R_2}} P dx dt, \quad i = \overline{1, k},$$

де  $C_6 > 0$  — стала, яка від  $\delta$  не залежить.

*Доведення.* Нехай  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Використовуючи твердження 3.1, маємо

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} d\alpha \iint_{D_{\tau(\alpha), t_0(\alpha)}^\delta} P |\psi_{\delta, x_i}(x', \tau(\alpha))| dx dt \\ \leq \int_{R_1}^{R_2} d\alpha \iint_{Q^{R_2}} P |\psi_{\delta, x_i}(x', \tau(\alpha))| dx dt \\ = \iint_{Q^{R_2}} P \left( \int_{R_1}^{R_2} |\psi_{\delta, x_i}(x', \tau(\alpha))| d\alpha \right) dx dt \leq C_6 \iint_{Q^{R_2}} P dx dt. \end{aligned}$$

Твердження 3.2 доведено. □

Зауважимо, що

$$\int_{R_1}^{R_2} L_{\rho(mh)}(\tau(\alpha), t_0(\alpha)) d\alpha \leq \int_{t_0(R_2)}^0 dt \int_{R_1}^{R_2} \int_{\Gamma_{*, \tau(\alpha)}} b_{mh\rho} d\Gamma d\alpha,$$

і зробимо в інтегралах  $\int_{R_1}^{R_2} \int_{\Gamma_{*, \tau(\alpha)}} b_{mh\rho} d\Gamma d\alpha$  заміну  $\tau = \tau(\alpha)$ . У результаті отримаємо

$$\int_{R_1}^{R_2} L_{\rho(mh)}(\tau(\alpha), t_0(\alpha)) d\alpha \leq C_7 \iint_{Q^{R_2}} b_{mh\rho} dx dt, \quad (3.22)$$

де  $C_7 > 0$  — стала, яка від  $m, h$  і  $\rho$  не залежить.

Легко переконатися, що існує стала  $C_7 > 0$  така, що

$$\sum_{i=0}^n \|\partial_i w_{mh}\|_{L_{p_i(\cdot)}(Q_R)} \leq C_7 \quad (3.23)$$

для всіх  $m \in \mathbb{N}$ ,  $h \in (0; h_0]$ , де  $h_0 = \frac{1}{2}(t_0(R_2) - t_0(R))$ .

Враховуючи (3.13)–(3.15), (3.17)–(3.19) і використовуючи оцінки (3.22), (3.23), твердження 3.2 та неперервність оператора Немацького (див. [23, Theorem 1.16, p. 435]), побудуємо послідовності  $\{h_j\}$ ,  $\{\rho_j\}$ ,  $\{\delta_j\}$ , які монотонно прямують до нуля, та монотонно зростаючу до  $+\infty$  послідовність  $\{m_j\}$  таким чином.

Нехай  $j$  — довільне натуральне число. Виберемо  $h_j \in (0; h_0]$  таким, щоб виконувалися нерівності

$$\sum_{i=0}^k \|\partial_i w_{h_j} - \partial_i w\|_{L_{p_i(\cdot)}(Q^R)} \leq \frac{1}{2j}, \quad (3.24)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} |\mathcal{E}_{h_j}^{(m)}(\tau(\alpha), t_0(\alpha))| d\alpha \leq \frac{1}{8j} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (3.25)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} |\mathcal{G}_{h_j}^{*(m\delta)}(\tau(\alpha), t_0(\alpha))| d\alpha \leq \frac{1}{8j} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall \delta \in (0, 1/2). \quad (3.26)$$

Тоді значення  $m_j$  вибираємо таким, щоб виконувалися нерівності

$$\sum_{i=0}^k \|\partial_i w_{m_j h_j} - \partial_i w_{h_j}\|_{L_{p_i(\cdot)}(Q^R)} \leq \frac{1}{2j}, \quad (3.27)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} |\mathcal{E}_{m_j(h_j)}(\tau(\alpha), t_0(\alpha))| d\alpha \leq \frac{1}{8j}, \quad (3.28)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} |\mathcal{G}_{m_j(h_j)}^{*(\delta)}(\tau(\alpha), t_0(\alpha))| d\alpha \leq \frac{1}{8j} \quad \forall \delta \in (0, 1/2). \quad (3.29)$$

Після цього вибираємо значення  $\rho_j$  таким, щоб виконувалися нерівності

$$\int_{R_1}^{R_2} |\mathcal{G}_{\rho_j(m_j h_j)}^{*(\delta)}(\tau(\alpha), t_0(\alpha))| d\alpha \leq \frac{1}{8j} \quad \forall \delta \in (0, 1/2), \quad (3.30)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} L_{\rho_j(m_j h_j)}(\tau(\alpha), t_0(\alpha)) d\alpha \leq \frac{1}{8j}, \quad (3.31)$$

а тоді значення  $\delta_j$  візьмемо таким, щоб виконувалися нерівності

$$\int_{R_1}^{R_2} |\mathcal{E}_{\delta_j(m_j h_j)}(\tau(\alpha), t_0(\alpha))| d\alpha \leq \frac{1}{8j}, \quad (3.32)$$

$$\int_{R_1}^{R_2} |\mathcal{G}_{\delta_j^*(m_j h_j \rho_j)}(\tau(\alpha), t_0(\alpha))| d\alpha \leq \frac{1}{8j}. \quad (3.33)$$

Очевидно, що  $h_j \rightarrow 0$ ,  $m_j \rightarrow \infty$ ,  $\rho_j \rightarrow 0$ ,  $\delta_j \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ .

Тепер покладемо в нерівності (3.11)  $h = h_j$ ,  $m = m_j$ ,  $\rho = \rho_j$ ,  $\delta = \delta_j$  і перейдемо до границі при  $j \rightarrow \infty$ . У результаті, враховуючи (3.12), (3.16), (3.23)–(3.33), отримаємо нерівність

$$F(\tau(R_1), t_0(R_1)) \leq e^{R_1 - R_2} F(\tau(R_2), t_0(R_2)),$$

що нам і потрібно. □

**Лема 3.2.** *Нехай  $R > 0$ ,  $\tau_1, \tau_2$  ( $\tau_1 < \tau_2$ ) – довільні фіксовані числа. Припустимо, що функція*

$$v \in ((\tau_1, \tau_2) \rightarrow W_{p(\cdot), loc}^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0)) \cap L_{p_0(\cdot), loc}(\overline{\Omega} \times (\tau_1, \tau_2)),$$

$$v_{x_i} \in L_{p_i(\cdot), loc}(\overline{\Omega} \times (\tau_1, \tau_2)) \quad (i = \overline{1, n}),$$

така, що для деяких функцій  $b \in L_{\infty, loc}(\overline{\Omega})$ ,  $b \geq 0$  на  $\Omega$ ,

$$g_0 \in L_{p_0^*(\cdot), loc}(\overline{\Omega} \times (\tau_1, \tau_2)),$$

$$g_i \in L_{p_i^*(\cdot), loc}(\overline{\Omega} \times (\tau_1, \tau_2)) \quad (i = \overline{1, n})$$

виконується рівність

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\Omega_R} \left\{ \sum_{i=1}^n g_i \psi_{x_i} \varphi + g_0 \psi \varphi - b v \psi \varphi' \right\} dx dt = 0 \quad (3.34)$$

для всіх  $\varphi \in C_0^1(\tau_1, \tau_2)$ ,  $\psi \in W_{p(\cdot), c}^1(\overline{\Omega}, \Gamma_0)$ ,  $\text{supp } \psi \subset \overline{\Omega}_R$ .

Тоді  $b^{1/2}v \in C([\tau_1, \tau_2]; L_2(\Omega_{R'}))$  для кожного  $R' \in (0, R)$ . Крім того, для довільних функцій  $\theta \in C^1([\tau_1, \tau_2])$ ,  $w \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $\text{supp } w \subset \overline{\Omega}_R$ ,  $w \geq 0$  і будь-яких чисел  $t_1, t_2$  таких, що  $\tau_1 \leq t_1 < t_2 \leq \tau_2$ , виконується рівність

$$\begin{aligned} \theta(t) \int_{\Omega_R} b(x) |v(x, t)|^2 w(x) dx \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_R} b |v|^2 w \theta' dx dt \\ + 2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_R} \left\{ \sum_{i=1}^n g_i (vw)_{x_i} + g_0 v w \right\} \theta dx dt = 0. \quad (3.35) \end{aligned}$$

Якщо ж додатково відомо, що  $v|_{\Gamma_{*,R} \times (\tau_1, \tau_2)} = 0$ , то  $b^{1/2}v \in C([\tau_1, \tau_2]; L_2(\Omega_R))$  і в рівності (3.35) можна взяти  $w = 1$ .

Дане твердження доводиться аналогічно, як лема 1 роботи [2].

#### 4. Доведення основних результатів

*Доведення теореми 2.1.* Доводимо від супротивного. Нехай  $u_1, u_2$  — (різні) узагальнені розв'язки даної задачі. Тоді з умови (2.6) і того, що для довільного  $R > 0$  функціонал  $\langle \cdot \rangle_R$  є півнормою в просторі  $\mathbb{U}_{p, \text{loc}}^b$ , маємо  $\langle u_1 - u_2 \rangle_R \leq \langle u_1 \rangle_R + \langle u_2 \rangle_R = \beta(R)e^{R/2}$ , де  $\beta(R) \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow +\infty$ . Звідси та з леми 3.1 (див. (3.1)) маємо для довільних  $R_1$  і  $R_2$ ,  $R_1 < R_2$ , оцінку

$$\langle u_1 - u_2 \rangle_{R_1} \leq e^{(R_1 - R_2)/2} \langle u_1 - u_2 \rangle_{R_2} = e^{R_1/2} \beta(R_2). \quad (4.1)$$

Фіксуємо  $R_1$  і спрямуємо  $R_2$  до  $+\infty$ , з (4.1) отримаємо  $\langle u_1 - u_2 \rangle_{R_1} = 0$ , тобто  $u_1 = u_2$  майже всюди на  $Q_{R_1}$ . В силу довільності значення  $R_1$  маємо  $u_1 = u_2$  майже всюди на  $Q$ .  $\square$

*Доведення теореми 2.2.* Доведення проведемо в три етапи.

1 *етап (наближення розв'язку).* Нехай  $\alpha > 0$  — довільне число. Позначимо  $\tilde{\Gamma}_0^\alpha := \partial\Omega^\alpha \setminus \Gamma_1^\alpha$ ,  $\tilde{\Sigma}_0^\alpha := \tilde{\Gamma}_0^\alpha \times [t_0(\alpha), 0]$ . Під  $W_{p(\cdot)}^1(\Omega^\alpha, \tilde{\Gamma}_0^\alpha)$  розумітимемо замикання простору  $C^1(\overline{\Omega^\alpha}, \tilde{\Gamma}_0^\alpha) := \{v \in C^1(\overline{\Omega^\alpha}) \mid v = 0 \text{ в околі } \tilde{\Gamma}_0^\alpha\}$  за нормою  $\|v\|_{W_{p(\cdot)}^1(\Omega^\alpha)} := \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega^\alpha)} + \|v\|_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega^\alpha)}$ .

Введемо в розгляд також простір  $\mathbb{U}_p^{b, \alpha}$ , здобутий замиканням простору  $C^{1,0}(\overline{Q^\alpha}, \tilde{\Sigma}_0^\alpha) := \{v \in C(\overline{Q^\alpha}) \mid v_{x_i} \in C(\overline{Q^\alpha}) \ (i = \overline{1, n}), \ v = 0 \text{ в околі } \tilde{\Sigma}_0^\alpha\}$  за нормою  $\|w\|_{\mathbb{U}_p^{b, \alpha}} := \sum_{i=1}^n \|w_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(Q^\alpha)} + \|w\|_{L_{p_0(\cdot)}(Q^\alpha)} + \max_{t \in [t_0(\alpha), 0]} \|b^{1/2}(\cdot)w(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega^\alpha)}$ .

Тепер для кожного  $l \in \mathbb{N}$  розглянемо задачу: знайти функцію  $u_l \in \mathbb{U}_p^{b, l}$ , яка задовольняє початкову умову  $(bu)|_{t=t_0(l)} = 0$  та інтегральну рівність

$$\iint_{Q^l} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, t, u_l, \nabla u_l) v_{x_i} + a_0(x, t, u_l, \nabla u_l) v - b u_l v_t \right\} dx dt = \iint_{Q^l} f v dx dt \quad (4.2)$$

для будь-яких  $v \in \mathbb{U}_{p,c}^*$ ,  $\text{supp } v \subset Q^l$ .

Доведення існування розв'язку  $u_l \in \mathbb{U}_p^{b,l}$  цієї задачі проводиться методом Гальоркіна з використанням методу параболічної регуляризації (див., наприклад, [12, 14]). Єдиність розв'язку  $u_l$  легко довести, використовуючи умову **A<sub>3</sub>**.

2 етап (збіжність послідовності наближень розв'язку). Для кожного  $l \in \mathbb{N}$  функцію  $u_l$  продовжимо нулем на  $Q$ , залишивши за цим продовженням позначення  $u_l$ . Очевидно, що  $u_l \in \mathbb{U}_{p,\text{loc}}^b$ . Покажемо, що послідовність  $\{u_l\}_{l=1}^\infty$  містить підпослідовність, яка збігається в певному сенсі до узагальненого розв'язку задачі (1.1), (1.2), (2.6). При цьому будемо використовувати відповідну методу роботи [16].

Спочатку оцінимо  $\langle u_l \rangle_l$  для довільного фіксованого  $l \in \mathbb{N}$ . З інтегральної тотожності (4.2) на підставі леми 3.2 з  $\Omega^l$  замість  $\Omega$ ,  $t_1 = t_0(l)$ ,  $t_2 = 0$ ,  $\theta(t) = e^{-2\mu t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , та  $w = 1$ , використовуючи позначення (3.4), отримаємо

$$\int_{\Omega^l} b |u_l|^2|_{t=0} dx + \iint_{Q^l} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(u_l) u_{l,x_i} + a_0(u_l) u_l + \mu b |u_l|^2 \right\} e^{-2\mu t} dx dt = \iint_{Q^l} f u_l e^{-2\mu t} dx dt.$$

Звідси на підставі умови **A<sub>5</sub>** і нерівності Коші–Буняковського матимемо

$$\begin{aligned} \iint_{Q^l} \left\{ q_1 \sum_{i=1}^k |u_{l,x_i}|^2 + (q_2 + \mu b) |u_l|^2 + q_3^a \sum_{i=k+1}^n |u_{l,x_i}|^{p_i(x)} \right\} e^{-2\mu t} dx dt \\ \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \iint_{Q^l} |u_l|^2 e^{-2\mu t} dx dt + \frac{1}{2\varepsilon_1} \iint_{Q^l} |f|^2 e^{-2\mu t} dx dt, \end{aligned}$$

де  $\varepsilon_1$  — довільна додатна стала.

Поклавши в цій нерівності  $\varepsilon_1 = \Lambda_l$ , де  $\Lambda_l$  визначено в (2.7), здобуємо

$$\iint_{Q^l} E_{k,\mu}(u_l) e^{-2\mu t} dx dt \leq \Lambda_l^{-1} \iint_{Q^l} |f|^2 e^{-2\mu t} dx dt.$$

Звідси та нерівності (2.8) випливає оцінка

$$\langle u_l \rangle_l \leq C_1 e^{(1-\varepsilon)l/2}. \quad (4.3)$$

Нехай  $m \in \mathbb{N}$  — фіксоване число, а  $l, r$  — довільні натуральні числа, причому  $l \geq m$ . Маємо

$$\langle u_{l+r} - u_l \rangle_m \leq \sum_{i=0}^{r-1} \langle u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_m. \quad (4.4)$$

З леми 3.1 при  $R = l + i$  для функцій  $u_{l+i+1}, u_{l+i}$  випливає оцінка

$$\begin{aligned} \langle u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_m &\leq e^{-1/2} \langle u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_{m+1} \leq \dots \\ &\leq e^{-(l+i-m)/2} \langle u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_{l+i}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

З (4.3) отримаємо

$$\langle u_{l+i+1} - u_{l+i} \rangle_{l+i} \leq \langle u_{l+i+1} \rangle_{l+i+1} + \langle u_{l+i} \rangle_{l+i} \leq C_8 e^{(1-\varepsilon)(l+i)/2}, \quad (4.6)$$

де  $C_8 > 0$  — стала, яка залежить тільки від  $C_1$  та  $\varepsilon$ . На основі (4.4)–(4.6) здобудемо

$$\langle u_{l+r} - u_l \rangle_m \leq C_8 e^{(m-\varepsilon l)/2} \sum_{i=0}^{r-1} (e^{-\varepsilon/2})^i \leq C_9 e^{(m-\varepsilon l)/2}, \quad (4.7)$$

де  $C_9 > 0$  — стала, яка залежить тільки від  $C_3$  та  $\varepsilon$ .

З (4.7) випливає, що  $\langle u_{l+r} - u_l \rangle_m \rightarrow 0$  при  $l \rightarrow \infty$  для будь-яких  $r \in \mathbb{N}$ , тобто послідовності  $\{u_l\}, \{u_{l,x_i}\}$  ( $i = \overline{1, k}$ ) є фундаментальними в просторі  $L_2(Q^m)$  для кожного  $m \in \mathbb{N}$ . Тому існує функція  $u \in L_{2, \text{loc}}(\overline{Q})$ , така, що  $u_{x_i} \in L_{2, \text{loc}}(\overline{Q})$  ( $i = \overline{1, k}$ ) і

$$u_l \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} u \quad \text{сильно в } L_{2, \text{loc}}(\overline{Q}), \quad (4.8)$$

$$u_{l,x_i} \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} u_{x_i} \quad \text{сильно в } L_{2, \text{loc}}(\overline{Q}), \quad i = \overline{1, k}. \quad (4.9)$$

На підставі умови **A3** з (4.8), (4.9) маємо

$$a_i(u_l) \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{} a_i(u) \quad \text{сильно в } L_{2, \text{loc}}(\overline{Q}), \quad i = \overline{1, k}. \quad (4.10)$$

Нехай  $m \in \mathbb{N}$  — довільне число,  $\delta := \min\{\tau(m+1) - \tau(m), t_0(m+1) - t_0(m)\}$ ,  $w(x) = \psi_\delta(x', m+1)$ ,  $x \in \Omega$ , де функція  $x' \rightarrow \psi_\delta(x', \tau)$  визначена в доведенні леми 3.1,  $\theta$  — функція з простору  $C^1(\mathbb{R})$ , яка задовольняє умови:  $\theta(t) = 1$ , коли  $t \geq t_0(m)$ ,  $\theta(t) = 0$ , якщо  $t \leq$



$t_0(m+1)$ , і  $0 \leq \theta'(t) \leq 2/\delta$ ,  $\theta'(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . З інтегральної тотожності (4.2) для  $u_l$  при  $l \geq m+1$  на підставі леми 3.2 ( $R = \tau(m+1)$ ,  $t_1 = t_0(m+1)$ ,  $t_2 = 0$ ) після простих перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{m+1}} (b|u_l|^2 w \theta)|_{t=0} dx + \iint_{Q^{m+1}} \left[ \sum_{i=1}^n a_i(u_l) u_{l,x_i} + a_0(u_l) u_l \right] w \theta dx dt \\ &= \iint_{Q^{m+1}} f u_l w \theta dx dt - \iint_{Q^{m+1}} \sum_{i=1}^k a_i(u_l) u_l w_{x_i} \theta dx dt + \iint_{Q^{m+1}} b|u_l|^2 w \theta' dx dt. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Оцінимо доданки рівності (4.11), використовуючи умови **A<sub>3</sub>** і **A<sub>5</sub>**, нерівності Коші–Буняковського та Юнга. У результаті, врахувавши, що  $|\nabla w|$  обмежена на  $\mathbb{R}^k$ , матимемо

$$\begin{aligned} & \iint_{Q^{m+1}} \left[ q_1 \sum_{i=1}^k |u_{l,x_i}|^2 + q_2 |u_l|^2 + q_3^a \sum_{i=k+1}^n |u_{l,x_i}|^{p_i(x)} \right] w \theta dx dt \\ & \leq C_{10}(m) \iint_{Q^{m+1}} \left[ |u_l|^2 + \sum_{i=1}^k |u_{l,x_i}|^2 \right] dx dt + \iint_{Q^{m+1}} |f|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (4.12)$$

де  $C_{10}(m) > 0$  — стала, яка не залежить від  $l > m$ .

На підставі (4.8)–(4.10) з (4.12) одержимо

$$\iint_{Q^m} \sum_{i=k+1}^n |u_{l,x_i}|^{p_i(x)} dx dt \leq C_{11}(m), \quad (4.13)$$

де  $C_{11}(m) > 0$  — стала, яка від  $l$  не залежить. Згідно з умовою **A<sub>2</sub>** та на підставі (4.8), (4.9) і (4.13) для кожного  $i = 0, k+1, \dots, n$  маємо

$$\begin{aligned} & \iint_{Q^m} |a_i(u_l)|^{p_i^*(x)} dx dt \\ & \leq C_{12}(m) \iint_{Q^m} \left\{ \sum_{j=1}^k |u_{l,x_j}|^2 + \sum_{j=k+1}^n |u_{l,x_j}|^{p_j(x)} + |u_l|^2 \right\} dx dt \\ & \quad + C_{13}(m) \leq C_{14}(m), \end{aligned} \quad (4.14)$$

де  $C_{12}(m), C_{13}(m), C_{14}(m) > 0$  — сталі, які від  $l$  не залежать (але можуть залежати від  $m$ ).

З (4.8), (4.9), (4.13), (4.14), врахувавши рефлексивність просторів  $L_{p_i(\cdot)}(Q^R)$ ,  $L_{p_i^*(\cdot)}(Q^R)$  ( $i = \overline{k+1, n}$ ,  $R > 0$ ), отримаємо існування підпослідовності послідовності  $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$  (за якою залишимо те ж саме позначення) та функцій  $\chi_0 \in L_{2, \text{loc}}(\overline{Q})$ ,  $\chi_i \in L_{p_i^*(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q})$  ( $i = k+1, \dots, n$ ) таких, що

$$u_{l, x_i} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} u_{x_i} \quad \text{слабко в } L_{p_i(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q}), \quad i = \overline{k+1, n}, \quad (4.15)$$

$$a_0(u_l) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \chi_0 \quad \text{слабко в } L_{2, \text{loc}}(\overline{Q}), \quad (4.16)$$

$$a_i(u_l) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \chi_i \quad \text{слабко в } L_{p_i^*(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q}), \quad i = k+1, \dots, n. \quad (4.17)$$

Тепер треба показати, що

$$\chi_0 = a_0(u), \quad (4.18)$$

$$\chi_i = a_i(u), \quad i = k+1, \dots, n. \quad (4.19)$$

Зробимо це трохи пізніше, а зараз припустимо, що вказані рівності правильні. Нехай  $v \in \mathbb{U}_{p, c}^*$ . Для кожного  $l \geq \nu$ , де  $\nu \in \mathbb{N}$  таке, що  $\text{supp } v \subset \overline{Q}^\nu$ , з означення  $u_l$  маємо рівність (4.2). Перейдемо в ній до границі при  $l \rightarrow +\infty$ , врахувавши (4.8), (4.10), (4.16)–(4.19). У результаті отримаємо рівність (2.1) для заданої функції  $v$ . Оскільки  $v$  — довільна, то ми маємо інтегральну тотожність (2.1) для функції  $u$ . Звідси на підставі леми 3.2 отримаємо, що  $b^{1/2}u \in C(S; L_{2, \text{loc}}(\overline{\Omega}))$ . Отже, функція  $u$  належить  $\mathbb{U}_{p, \text{loc}}^b$  і задовольняє інтегральну тотожність (2.1), тобто  $u$  є узагальненим розв'язком рівняння (1.1), що задовольняє умови (1.2). Оцінка (2.9) одержується з (4.3) і (4.7) таким чином:

$$\langle u \rangle_m \leq \langle u - u_m \rangle_m + \langle u_m \rangle_m = \lim_{l \rightarrow \infty} \langle u_l - u_m \rangle_m + \langle u_m \rangle_m \leq C_2 e^{(1-\varepsilon)m/2}.$$

Тепер легко переконатися, що функція  $u$  задовольняє умову (2.6). Справді, нехай  $R > 0$  — довільне число і  $m$  — натуральне число таке, що  $m - 1 < R \leq m$ . Отож, на підставі (2.9) маємо

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_R &\leq \langle u \rangle_m \leq C_2 e^{(1-\varepsilon)m/2} = C_2 e^{(1-\varepsilon)(m-R)/2} e^{(1-\varepsilon)R/2} \\ &\leq C_2 e^{(1-\varepsilon)/2} e^{-\varepsilon R/2} e^{R/2} = o(1) e^{R/2} \quad \text{при } R \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Отже, ми довели, що  $u$  — узагальнений розв'язок задачі (1.1), (1.2), (2.6) і для нього виконується оцінка (2.9).

З етап (правильність рівностей (4.18), (4.19)). Для перевірки правильності рівностей (4.18), (4.19) використаємо метод монотонності [12]. Нехай  $v \in L_{p_0(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q})$  — довільна функція така, що  $v_{x_i} \in$

$L_{p_i(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q})$  ( $i = \overline{1, n}$ ), а  $w(x')$ ,  $x' = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ , — невід'ємна, неперервно диференційовна функція з обмеженим носієм і  $\theta \in C_0^1(-\infty, 0)$ ,  $\theta \geq 0$ .

На підставі умови **A<sub>4</sub>** для всіх  $l \in \mathbb{N}$  маємо

$$\iint_Q \left[ \sum_{i=1}^n (a_i(u_l) - a_i(v))(u_{l,x_i} - v_{x_i}) + (a_0(u_l) - a_0(v))(u_l - v) + \mu b(u_l - v)^2 \right] w \theta e^{-2\mu t} dx dt \geq 0, \quad (4.20)$$

де тут і далі використовується позначення (3.4).

Тоді

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left[ \sum_{i=1}^n a_i(u_l) u_{l,x_i} + a_0(u_l) u_l \right] w \theta e^{-2\mu t} dx dt \\ & - \iint_Q \left[ \sum_{i=1}^n (a_i(u_l) v_{x_i} + a_i(v)(u_{l,x_i} - v_{x_i})) + a_0(u_l) v + a_0(v)(u_l - v) + \mu b(u_l - v)^2 \right] w \theta e^{-2\mu t} dx dt \geq 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

для всіх  $l \in \mathbb{N}$ .

Нагадаємо, що за означенням функції  $u_l$  ( $l \in \mathbb{N}$ ) (див. (4.2)) маємо тотожність

$$\iint_Q \left[ \sum_{i=1}^n a_i(u_l) \psi_{x_i} \varphi + (a_0(u_l) - f) \psi \varphi - b u_l \psi \varphi' \right] dx dt = 0 \quad (4.22)$$

для довільних  $\psi \in W_{p(\cdot), c}^1(\Omega, \Gamma_0)$ ,  $\text{supp } \psi \subset \overline{\Omega}^l$ ,  $\varphi \in C_0^1(-\infty, 0)$ ,  $\text{supp } \varphi \subset [t_0(l), 0]$ .

Нехай  $m$  таке, що  $\text{supp } w \subset \{x' \mid |x'| \leq \tau(m)\}$ ,  $\text{supp } \theta \subset [t_0(m), 0]$ . На підставі леми 3.2 з тотожності (4.22) при  $l \geq m$  отримаємо

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left[ \sum_{i=1}^n a_i(u_l) u_{l,x_i} + a_0(u_l) u_l \right] w \theta e^{-2\mu t} dx dt \\ & = \iint_Q b |u_l|^2 w (\theta'/2 - \mu \theta) e^{-2\mu t} dx dt \\ & - \iint_Q \left[ \sum_{i=1}^k a_i(u_l) u_l w_{x_i} - f u_l w \right] \theta e^{-2\mu t} dx dt. \end{aligned} \quad (4.23)$$

З (4.21) та (4.23) здобудемо

$$\begin{aligned}
& \iint_Q b|u_l|^2 w(\theta'/2 - \mu\theta) e^{-2\mu t} dx dt \\
& - \iint_Q \left[ \sum_{i=1}^k a_i(u_l) u_l w_{x_i} - f u_l w \right] \theta e^{-2\mu t} dx dt \\
& - \iint_Q \left[ \sum_{i=1}^n (a_i(u_l) v_{x_i} + a_i(v)(u_{l,x_i} - v_{x_i})) + a_0(u_l) v \right. \\
& \quad \left. + a_0(v)(u_l - v) + \mu b(u_l - v)^2 \right] w \theta e^{-2\mu t} dx dt \geq 0. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Перейдемо в (4.24) до границі при  $l \rightarrow \infty$ . На підставі (4.8)–(4.10), (4.15)–(4.17), прийнявши для зручності записів

$$\chi_i := a_i(u), \quad i = \overline{1, k},$$

отримаємо

$$\begin{aligned}
& \iint_Q b|u|^2 w(\theta'/2 - \mu\theta) e^{-2\mu t} dx dt \\
& - \iint_Q \left[ \sum_{i=1}^k \chi_i u w_{x_i} - f u w \right] e^{-2\mu t} dx dt \\
& - \iint_Q \left[ \sum_{i=1}^n (\chi_i v_{x_i} + a_i(v)(u_{x_i} - v_{x_i})) + \chi_0 v \right. \\
& \quad \left. + a_0(v)(u - v) + \mu b(u - v)^2 \right] w \theta e^{-2\mu t} dx dt \geq 0. \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Тепер в (4.22) перейдемо до границі при  $l \rightarrow \infty$ . У результаті на підставі (4.8), (4.10), (4.16), (4.17) отримаємо

$$\iint_Q \left[ \sum_{i=1}^n \chi_i \psi_{x_i} \varphi + (\chi_0 - f) \psi \varphi - b u \psi \varphi' \right] dx dt = 0 \quad (4.26)$$

для довільних  $\psi \in W_{p(\cdot),c}^1(\Omega, \Gamma_0)$ ,  $\varphi \in C_0^1(-\infty, 0)$ .

Звідси на підставі леми 3.2 одержуємо

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left[ \sum_{i=1}^n \chi_i u_{x_i} + \chi_0 u \right] w \theta e^{-2\mu t} dx dt \\ &= \iint_Q b|u|^2 w (\theta'/2 - \mu\theta) e^{-2\mu t} dx dt \\ & \quad - \iint_Q \left[ \sum_{i=1}^k \chi_i u w_{x_i} - f u w \right] \theta e^{-2\mu t} dx dt. \quad (4.27) \end{aligned}$$

З (4.25) та (4.27) здобудемо

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left[ \sum_{i=1}^n \chi_i u_{x_i} + \chi_0 u \right] w \theta e^{-2\mu t} dx dt \\ & \quad - \iint_Q \left[ \sum_{i=1}^n (\chi_i v_{x_i} + a_i(v)(u_{x_i} - v_{x_i})) + \chi_0 v \right. \\ & \quad \left. + a_0(v)(u - v) + \mu b(u - v)^2 \right] w \theta e^{-2\mu t} dx dt \geq 0, \end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left[ \sum_{i=1}^n (\chi_i - a_i(v))(u_{x_i} - v_{x_i}) + (\chi_0 - a_0(v))(u - v) \right. \\ & \quad \left. + \mu b(u - v)^2 \right] w \theta e^{-2\mu t} dx dt \geq 0. \quad (4.28) \end{aligned}$$

Візьмемо в (4.28)  $v = u - \lambda g$ , де  $\lambda > 0$  — довільне число,  $g \in L_{p_0(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q})$  — будь-яка функція така, що  $g_{x_i} \in L_{p_i(\cdot), \text{loc}}(\overline{Q})$  ( $i = \overline{1, n}$ ). У результаті після ділення на  $\lambda$  і врахування довільності функції  $g$  здобудемо

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left[ \sum_{i=1}^n (\chi_i - a_i(u - \lambda g)) g_{x_i} + (\chi_0 - a_0(u - \lambda g)) g \right. \\ & \quad \left. + \lambda \mu b g^2 \right] w \theta e^{-2\mu t} dx dt = 0. \end{aligned}$$

У цій рівності спрямуємо  $\lambda$  до 0. У результаті отримаємо

$$\iint_Q \left\{ \sum_{i=1}^n (a_i(u) - \chi_i) g_{x_i} + (a_0(u) - \chi_0) g \right\} w \theta e^{-2\mu t} dx dt = 0. \quad (4.29)$$

Тепер покладемо в (4.29) спочатку  $g(x, t) = 1$ , а потім  $g(x, t) = x_i$  для кожного  $i \in \{k + 1, \dots, n\}$ . У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \iint_Q (a_0(u) - \chi_0) w \theta e^{-2\mu t} dx dt &= 0, \\ \iint_Q (a_i(u) - \chi_i) w \theta e^{-2\mu t} dx dt &= 0, \quad i = \overline{k + 1, n}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Оскільки рівності (4.30) виконуються для довільних неперервно-диференційованих невід'ємних фінітних функцій  $w, \theta$ , то правильними є рівності (4.18), (4.19)).  $\square$

### Література

- [1] Н. М. Бокало, *Энергетические оценки решений и однозначная разрешимость задачи Фурье для линейных и квазилинейных параболических уравнений* // Дифференц. уравнения, **30** (1994), No. 8, 1325–1334.
- [2] М. М. Бокало, І. Б. Паучок, *Про коректність задачі Фур'є для нелінійних параболических рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності* // Математичні студії, **24** (2006), No. 1, 25–48.
- [3] М. Bokalo, O. Domanska, *On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces* // Математичні студії, **28** (2007), No. 1, 77–91.
- [4] M. Bokalo and A. Lorenzi, *Linear evolution first-order problems without initial conditions* // Milan Journal of Mathematics, **77** (2009), 437–494.
- [5] O. M. Buhrii, R. A. Mashiyev, *Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity* // Nonlinear Analysis, **70** (2009), 2325–2331.
- [6] О. В. Доманська, *Нелінійні еліптичні рівняння в квазіциліндричних областях* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат., (2007), вип. 67, 104–118.
- [7] А. В. Иванов, *Квазилинейные вырождающиеся и неравномерно эллиптические и параболические уравнения второго порядка* // Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **160** (1982), 3–285.
- [8] С. Д. Ивасишен, *О параболических граничных задачах без начальных условий* // Укр. мат. ж., **34** (1982), No. 5, 547–552.
- [9] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, *Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений* // Успехи мат. наук, **31** (1976), No. 6, 142–166.
- [10] А. С. Калашников, *Задача без начальных условий в классах растущих функций для некоторых линейных вырождающихся параболических систем второго порядка* // Вестник МГУ. Сер. матем., **I** (1971), No. 2, 42–48; **II**, No. 3, 3–8.
- [11] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, В. А. Солонников, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М.: Наука, 1967.

- 
- [12] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, М.: Мир, 1972, 608 с.
- [13] І. Медвідь, *Задачі для нелінійних еліптичних і параболічних рівнянь в анізотропних просторах* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат., (2005), вип. 64, 149–166.
- [14] В. Н. Самохин, *Об одном классе уравнений, обобщающих уравнения поли-тропной фильтрации* // Дифференц. уравнения, **32** (1996), No. 5, 643–651.
- [15] А. Н. Тихонов, *Теоремы единственности для уравнения теплопроводности* // Мат. сб., (1935), No, 2, 199–216.
- [16] А. Е. Шишков, *Разрешимость граничных задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях в классах функций, растущих на бесконечности* // Укр. мат. журн., **47** (1995), No. 2, 277–289.
- [17] С.Д. Эйдельман, *О некоторых свойствах решений параболических уравнений* // Укр. мат. журн., **8** (1956), No. 2, 191–207.
- [18] L. Vercardo, T. Gallouët, J. L. Vázquez, *Nonlinear elliptic equations in  $\mathbb{R}^n$  without growth restrictions on the data* // J. Differential Equations, **105** (1993), No. 2, 334–363.
- [19] H. Brézis, *Semilinear equations in  $\mathbb{R}^N$  without condition at infinity* // Appl. Math. Optim., **12** (1984), No. 3, 271–282.
- [20] F. Bernis, *Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity* // Arch. Rational Mech. Anal., **106** (1989), No. 3, 217–241.
- [21] V. A. Galactionov, A. E. Shishkov, *Saint-Venant's principle in blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations* // Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A, Math., **133** (2003), No. 5, 1075–1119.
- [22] V. A. Galactionov, A. E. Shishkov, *Structure of boundary blow-up for higher-order quasilinear parabolic equations* // Proc. R. Soc. Lond. A., **460** (2004), 1–27.
- [23] X. Fan, D. Zhao, *On the space  $L^{p(x)}(\Omega)$  and  $W^{m,p(x)}(\Omega)$*  // Journal of Mathematical Analysis and Applications, **263** (2001), 424–446.
- [24] O. Kováčik, J. Rákosník, *On spaces  $L^{p(x)}(Q)$  and  $W^{1,p(x)}$*  // Czechosl. Math. J., **41** (1991), No. 4, 592–618.
- [25] Yu. V. Namlyeyeva, A. E. Shishkov, I. I. Skrypnik, *Isolated singularities of solutions of quasilinear anisotropic elliptic equations* // Advanced Nonlinear Studies, **6** (2006), 617–641.
- [26] Yu. V. Namlyeyeva, A. E. Shishkov, I. I. Skrypnik, *Removable isolated singularities for solutions of doubly nonlinear anisotropic parabolic equations* // Applicable Analysis, **89** (2010), No. 10, 1559–1574.
- [27] M. Růžička, *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory*, Berlin: Springer-Verlag, 2000, 168 p.
- [28] A. E. Shishkov, *Quasilinear divergence elliptic equations in unbounded domains* // Differ. Equations, **24** (1988), No. 8, 924–933.
- [29] R. E. Showalter, *Singular nonlinear evolution equations* // Rocky Mountain J. Math., **10** (1980), No. 3, 499–507.
- [30] R. E. Showalter, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, Amer. Math. Soc., Vol. 49, Providence, 1997, 282 p.

## ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Микола  
Михайлович  
Бокало**

Механіко-математичний факультет,  
Львівський національний університет  
імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1,  
Львів, 79000, Україна  
*E-Mail:* mm.bokalo@gmail.com