Український математичний вісник
Том 7 **(2010)**, № 3, 384 – 399

УМВ

Про розв'язки квазілінійної диференціальної системи другого порядку, зображувані рядами Фур'є з повільно змінними параметрами в деяких критичних випадках

С. А. Щоголев

(*Представлена М. О. Перестюком*)

Анотація. Для квазілінійної диференціальної системи другого порядку, коефіцієнти якої зображувані у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотою, отримано умови існування часткового розв'язку аналогічної структури у випадку, коли матриця лінійної частини системи має тотожно нульові власні значення.

2010 MSC. 34C10, 34C25.

Ключові слова та фрази. Квазілінійні системи, часткові розв'язки.

1. Вступ

Стаття присвячена квазілінійним диференціальним системам з повільно змінними параметрами [1, 2] і продовжує дослідження [3–5] щодо існування в таких систем часткових розв'язків, зображуваних абсолютно та рівномірно збіжними рядами Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами та частотами.

Введемо необхідні означення. Нехай

$$G = \left\{t, \varepsilon : \ t \in \mathbb{R}, \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \ \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+\right\}.$$

Означення 1.1 ([3]). *Скажемо, що функція $f(t, \varepsilon)$ належить до класу S_m, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, якщо виконуються умови:*

1) $f : G \in \mathbb{C}$, *де* $G = \{t, \varepsilon : \ t \in \mathbb{R}, \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \ \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+\}$,

2) $f \in C^m(\mathbb{R})$ *за* t,

Стаття надійшла в редакцію 9.09.2009

3) $d^k f/dt^k = \varepsilon^k f_k^*(t,\varepsilon),\ \sup_G |f_k^*| < +\infty\ (0 \le k \le m)$.

Прикладами функцій класу S_m можуть бути обмежені разом зі своїми похідними до m-го порядку включно функції, які залежать від "повільного часу" $\tau = \varepsilon t$: $\sin \varepsilon t$, $\operatorname{arctg} \varepsilon t$, $\frac{\varepsilon t}{1+(\varepsilon t)^2}$ тощо. Також класу S_m належатимуть функції вигляду $\varepsilon^m f(t)$, де $f(t)$ — обмежена разом зі своїми похідними до m-го порядку включно, наприклад $\varepsilon^m \sin t$. Сталі функції, очевидно, також є функції класу S_m.

Означення 1.2 ([3]). *Домовимось писати, що функція $f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon))$ належить до класу B_m, якщо*

$$f(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t,\varepsilon)\exp(in\,\theta(t,\varepsilon)),$$

де

1) $f_n \in S_m,\ d^k f_n/dt^k = \varepsilon^k f_{nk}(t,\varepsilon)\ (n \in \mathbb{Z},\ 0 \le k \le m)$,

2) $\|f\|_{B_m} \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_G |f_{nk}| < +\infty$,

3) $\theta(t,\varepsilon) = \int_0^t \varphi(\tau,\varepsilon)\, d\tau,\ \varphi : G \to \mathbb{R}^+,\ \inf_G \varphi > 0,\ \varphi \in S_m$.

Зокрема при $\varepsilon = 0:\ \varphi = \mathrm{const},\ \theta = \varphi t,\ f_n = \mathrm{const}$, функції класу B_m перетворюються на $2\pi/\varphi$-періодичні функції змінної t

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\varphi t},$$

такі, що

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n| < +\infty.$$

Функції класу S_m, очевидно, також є частковим випадком функцій класу B_m $(f_n \equiv 0\ \forall\, n \ne 0)$.

Легко бачити, що множина функцій класу B_m утворює лінійний простір, який перетворюється на повний нормований простір введенням норми $\|\cdot\|_{B_m}$. Нехай задано дві функції класу B_m:

$$u(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)),$$

$$v(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(t,\varepsilon)\exp(in\theta(t,\varepsilon)).$$

Добуток цих функцій визначимо формулою [6]

$$uv = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} u_{n-s}(t,\varepsilon)v_s(t,\varepsilon)\right)\exp(in\theta(t,\varepsilon)).$$

Очевидно, що цей добуток також належить класу B_m. Сформулюємо деякі властивості норми $\|\cdot\|_{B_m}$. Нехай $u, v \in B_m,\ k = \mathrm{const}$. Тоді:

1) $\|ku\|_{B_m} = |k|\|u\|_{B_m}$,

2) $\|u+v\|_{B_m} \le \|u\|_{B_m} + \|v\|_{B_m}$,

3) $\|u\|_{B_m} = \sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{1}{\varepsilon^k}\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right\|_{B_0}$.

4) $\|uv\|_{B_m} \le 2^m\|u\|_{B_m}\cdot\|v\|_{B_m}$.

Остання властивість вимагає доведення. Дійсно, для $m=0$ справджується

$$\|uv\|_{B_0} \le \|u\|_{B_0}\cdot\|v\|_{B_0}.$$

Далі на підставі властивості 3)

$$\|uv\|_{B_m} = \sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{1}{\varepsilon^k}\frac{\partial^k uv}{\partial t^k}\right\|_{B_0} \le \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{\varepsilon^k}\sum_{j=0}^{k}C_k^j\left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right\|_{B_0}\cdot\left\|\frac{\partial^{k-j}v}{\partial t^{k-j}}\right\|_{B_0}$$
$$\le 2^m\left[\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{\varepsilon^j}\left\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right\|_{B_0}\right]\cdot\left[\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{\varepsilon^j}\left\|\frac{\partial^j v}{\partial t^j}\right\|_{B_0}\right] = 2^m\|u\|_{B_m}\cdot\|v\|_{B_m},$$

і властивість 4) доведено.

На підставі властивості 4) можна стверджувати, що простір B_m утворює банахову алгебру [7].

Позначимо $\forall\, f \in B_m$

$$\Gamma_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t,\varepsilon,\theta)\exp(-in\theta)\,d\theta, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Нехай задано вектор $x(t,\varepsilon,\theta) = \mathrm{colon}(x_1(t,\varepsilon,\theta),\dots,x_n(t,\varepsilon,\theta))$ і матриця $P(t,\varepsilon,\theta) = (p_{jk}(t,\varepsilon,\theta))_{j,k=\overline{1,n}}$, елементи яких належать класу B_m. Під символом $(P)_{jk}$ будемо розуміти елемент p_{jk} матриці P.

Під векторною нормою $\|x\|^*_{B_m}$ і матричною нормою $\|P\|^*_{B_m}$ будемо розуміти

$$\|x\|^*_{B_m} = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_{B_m}; \quad \|P\|^*_{B_m} = \max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{n} \|(P)_{jk}\|_{B_m}.$$

2. Постановка задачі

Розглянемо наступну квазілінійну систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{k=1}^{2} a_{jk}(t,\varepsilon)x_k + f_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon)) + \mu X_j(t,\varepsilon,\theta(t,\varepsilon),x_1,x_2),\ j=1,2, \tag{2.1}$$

$a_{jk} \in S_m$, $f_j \in B_m$, $(x_1,x_2) \in D$, D — деяка замкнена обмежена область, функції X_1, X_2 належать класу B_m відносно t,ε,θ і мають в D неперервні частинні похідні за x_1, x_2 до деякого порядку $2q+1$ ($q \ge 1$) включно, причому, якщо $x_1, x_2 \in B_m$, то ці частинні похідні також з класу B_m, $\mu \in]0,1[$.

Зауваження. Останньою умовою охоплюється досить широкий клас нелінійностей, зокрема, що зустрічаються у багатьох рівняннях нелінійної механіки. Має місце, наприклад, наступне твердження.

Нехай $u \in B_m$, а функція $f(t,\varepsilon,\theta,u)$ належить B_m відносно t,ε,θ і аналітична по u при $|u| < r$, тобто

$$f(t,\varepsilon,\theta,u) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t,\varepsilon,\theta)u^k,$$

де $f_k(t,\varepsilon,\theta) \in B_m$. Тоді якщо

$$2^m \cdot \|u\|_{B_m} \le r_0 < r,$$

то $f(t,\varepsilon,\theta,u) \in B_m$, причому

$$\|f(t,\varepsilon,\theta,u)\|_{B_m} \le \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{B_m} r_0^k.$$

Дійсно, на підставі властивості 4) маємо

$$\|f(t,\varepsilon,\theta,u)\|_{B_m} = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t,\varepsilon,\theta)u^k \right\|_{B_m}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^m \|f_k\|_{B_m} \cdot \|u^k\|_{B_m} \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^m \|f_k\|_{B_m} \cdot 2^{m(k-1)} \|u\|^k_{B_m}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{B_m} [2^m \|u\|_{B_m}]^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_{B_m} r_0^k.$$

Зокрема, всі поліноми від u з коефіцієнтами з B_m, функції $\exp u$, $\sin u$, $\cos u$ належать B_m. Для функції $\exp u$ маємо

$$\|\exp u\|_{B_m} \leq 2^{-m} \exp\left(2^m \|u\|_{B_m}\right),$$

зокрема,

$$\|\exp u\|_{B_0} \leq \exp(\|u\|_{B_0}).$$

Аналогічно можна довести твердження.

Нехай функції $u_1, u_2, \ldots, u_n \in B_m$, *а функція* $f(t, \varepsilon, \theta, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ *належить класу* B_m *відносно* t, ε, θ *і аналітична відносно* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *при* $|u_j| < r$ $(j = \overline{1, n})$, *тобто*

$$f(t, \varepsilon, \theta, u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n = 0}^{\infty} f_{k_1 k_2 \cdots k_n}(t, \varepsilon, \theta) u_1^{k_1} u_2^{k_2} \cdots u_n^{k_n},$$

де $f_{k_1 k_2 \cdots k_n}(t, \varepsilon, \theta) \in B_m$.

Тоді, якщо $2^m \|u_j\|_{B_m} \leq r_0 < r$ $(j = \overline{1, n})$, *то функція* $f(t, \varepsilon, \theta, u_1, u_2, \ldots, u_n) \in B_m$, *причому*

$$\|f(t, \varepsilon, \theta, u_1, u_2, \ldots, u_n)\|_{B_m} \leq \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n = 0}^{\infty} \|f_{k_1 k_2 \cdots k_n}\|_{B_m} r_0^{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}.$$

Деякі інші ознаки належності функції $f(t, \varepsilon, \theta, u(t, \varepsilon, \theta))$ класу B_m можна отримати певним звуженням класу функцій, що досліджуються, і використанням відомих достатніх умов абсолютної та рівномірної збіжності тригонометричних рядів [6].

Метою статті буде встановлення ознак існування в системи (3.7) часткових розв'язків класів B_k $(0 \leq k \leq m)$. У роботі [3] досліджувався випадок, коли власні значення матриці $A(t, \varepsilon) = (a_{jk}(t, \varepsilon))_{j,k=1,2}$ мають відокремлені від нуля дійсні частини. В роботах [4,5] встановлено ознаки існування розв'язків вказаного типу у випадку суто уявних, але відокремлених від нуля власних значень матриці $A(t, \varepsilon)$ у нерезонансному [4] та у резонансному [5] випадках. У даній статті припускається наявність тотожно нульових коренів рівняння $\det(A(t, \varepsilon) - \lambda E) = 0$. Для скорочення викладення припустимо , що це рівняння має тотожно нульовий корінь другої кратності, якому відповідає елементарний дільник також другої кратності.

У цьому випадку матриця $A(t,\varepsilon)$ має вигляд:

$$A(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} a(t,\varepsilon) & a_{12}(t,\varepsilon)\\ a_{21}(t,\varepsilon) & -a(t,\varepsilon)\end{pmatrix},$$

причому $a_{12}(t,\varepsilon)a_{21}(t,\varepsilon)=-a^2(t,\varepsilon)$. Зокрема, $a(t,\varepsilon), a_{12}(t,\varepsilon)$ можуть бути тотожними нулями. Якщо це не так, то припустимо, що

$$\inf_G |a(t,\varepsilon)|>0, \quad \inf_G |a_{12}(t,\varepsilon)|>0.$$

Побудуємо матрицю

$$L(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} -a_{12}(t,\varepsilon) & -a(t,\varepsilon)a_{12}(t,\varepsilon)\\ 0 & a^2(t,\varepsilon)\end{pmatrix}$$

($|\det L(t,\varepsilon)|=|a^2(t,\varepsilon)a_{12}(t,\varepsilon)|>0$) і перетворенням

$$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}0=L(t,\varepsilon)\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

приведемо систему (2.1) до вигляду

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt}&=-\frac{da_{12}/dt}{a_{12}}\,y_1+a_{12}\frac{d}{dt}\Big(\frac{a}{a_{12}}\Big)y_2+g_1(t,\varepsilon,\theta)+\mu Y_1(t,\varepsilon,\theta,y_1,y_2),\\ \frac{dy_2}{dt}&=y_1-2\frac{da/dt}{a}\,y_2+g_2(t,\varepsilon,\theta)+\mu Y_2(t,\varepsilon,\theta,y_1,y_2),\end{aligned} \tag{2.2}$$

$g_j\in B_m$ $(j=1,2)$. Далі перетворенням

$$y_1=\frac{a_{12}(0,\varepsilon)}{a_{12}(t,\varepsilon)}\,z_1, \quad y_2=\frac{a^2(0,\varepsilon)}{a^2(t,\varepsilon)}\,z_2$$

зведемо систему (2.2) до вигляду

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt}&=\varepsilon\alpha(t,\varepsilon)z_2+h_1(t,\varepsilon,\theta)+\mu Z_1(t,\varepsilon,\theta,z_1,z_2),\\ \frac{dz_2}{dt}&=b(t,\varepsilon)z_1+h_2(t,\varepsilon,\theta)+\mu Z_2(t,\varepsilon,\theta,z_1,z_2),\end{aligned} \tag{2.3}$$

$\alpha\in S_{m-1},\ b\in S_m,\ h_1,h_2\in B_m,\ \inf_G|b|>0.$

Тому будемо вважати, що система (2.1) має вигляд (2.3).

3. Деякі допоміжні твердження

Лема 3.1. *Нехай задано лінійну однорідну систему 2-го порядку*

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = \left(\Lambda(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} P_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)x,\\ x = \operatorname{col}(x_1, x_2), \quad \Lambda(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b(t,\varepsilon) & 0 \end{pmatrix}, \quad \inf_G |b(t,\varepsilon)| > 0,\end{gathered} \tag{3.1}$$

елементи двовимірних матриць P_l $(l = \overline{1,q})$ належать класу B_m.

Тоді для достатньо малих значень μ існує невироджене перетворення вигляду

$$x = \left(E + \sum_{l=1}^{q} \Psi_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)y, \tag{3.2}$$

$y = \operatorname{col}(y_1, y_2)$, де елементи двовимірних матриць $\Psi_l(t,\varepsilon,\theta)$ $(l = \overline{1,q})$ належать класу B_m, яке зводить систему (3.1) до вигляду

$$\frac{dy}{dt} = \left(\Lambda(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} U_l(t,\varepsilon)\mu^l + \varepsilon\sum_{l=1}^{q} V_l(t,\varepsilon,\theta)\mu^l + \mu^{q+1}W(t,\varepsilon,\theta,\mu)\right)y, \tag{3.3}$$

де U_l — матриці з елементами класу S_m, V_l, W — матриці з елементами класу B_{m-1}.

Доведення. Підставимо вираз (3.2) до системи (3.1) і вимагатимемо, щоб перетворена система мала вигляд (3.3). Тоді одержимо наступні матричні рівняння для визначення $\Psi_1, \ldots, \Psi_q$:

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = \Lambda(t,\varepsilon)\Psi_1 - \Phi_1\Lambda(t,\varepsilon) + P_1(t,\varepsilon,\theta) - U_1(t,\varepsilon) - \varepsilon V_1(t,\varepsilon,\theta),$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Psi_l}{dt} = {} & \Lambda(t,\varepsilon)\Phi_l - \Phi_l\Lambda(t,\varepsilon)\\ & + P_l(t,\varepsilon,\theta) + \sum_{\nu=1}^{l-1} P_\nu(t,\varepsilon,\theta)\Psi_{l-\nu} - \sum_{\nu=1}^{l-1} \Psi_\nu U_{l-\nu}(t,\varepsilon)\\ & - \varepsilon\sum_{\nu=1}^{l-1} \Psi_\nu V_{l-\nu}(t,\varepsilon,\theta) - U_l(t,\varepsilon) - \varepsilon V_l(t,\varepsilon,\theta), \quad l = \overline{2,q}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

При цьому матриця W визначиться з рівняння:

$$\Big(E+\sum_{l=1}^{q}\Psi_l\mu^l\Big)W=\sum_{s=0}^{q-1}\Big[\sum_{\sigma+\delta=s+q+1}(P_\sigma\Psi_\delta-\Psi_\sigma U_\delta)\Big]\mu^s - \varepsilon\sum_{s=0}^{q-1}\Big(\sum_{\sigma+\delta=s+q+1}\Psi_\sigma V_\delta\Big)\mu^s. \quad (3.5)$$

Виходячи з цих рівнянь, покладемо

$$(\Psi_l)_{12}=\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n((T_l)_{12})}{in\varphi}\exp(in\theta),$$

$$(\Psi_l)_{22}=-b\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n((T_l)_{12})}{n^2\varphi^2}\exp(in\theta)+\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n((T_l)_{22})}{in\varphi}\exp(in\theta),$$

$$(\Psi_l)_{11}=b\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n((T_l)_{12})}{n^2\varphi^2}\exp(in\theta)+\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n((T_l)_{11})}{in\varphi}\exp(in\theta),$$

$$(\Psi_l)_{21}=2b^2\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n((T_l)_{12})}{in^3\varphi^3}\exp(in\theta) - b\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n((T_l)_{11}-(T_l)_{22})}{n^2\varphi^2}\exp(in\theta) + \sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq0)}}^{\infty}\frac{\Gamma_n((T_l)_{21})}{in\varphi}\exp(in\theta),$$

$$(U_l)_{jk}=\Gamma_0((T_l)_{jk}),$$

$$(V_l)_{12}=-\Big(\sum_{s=1}^{l-1}\Psi_sV_{l-s}\Big)_{12}-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq0)}}^{\infty}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\Gamma_n((T_l)_{12})}{in\varphi}\Big)\exp(in\theta),$$

$$(V_l)_{11}=-\Big(\sum_{s=1}^{l-1}\Psi_sV_{l-s}\Big)_{11}-\frac{1}{\varepsilon}\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq0)}}^{\infty}\frac{d}{dt}\Big(\frac{b\Gamma_n((T_l)_{12})}{n^2\varphi^2}\Big)\exp(in\theta) - \frac{1}{\varepsilon}\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq0)}}^{\infty}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\Gamma_n((T_l)_{11})}{in\varphi}\Big)\exp(in\theta),$$

$$(V_l)_{22} = -\Bigg(\sum_{s=1}^{l-1} \Psi_s V_{l-s}\Bigg)_{22} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{b\Gamma_n((T_l)_{12})}{n^2\varphi^2}\right)\exp(in\theta)$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n((T_l)_{22})}{in\varphi}\right)\exp(in\theta),$$

$$(V_l)_{21} = -\Bigg(\sum_{s=1}^{l-1} \Psi_s V_{l-s}\Bigg)_{21}$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{2b^2\Gamma_n((T_l)_{12})}{in^3\varphi^3}\right)\exp(in\theta)$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{b\Gamma_n((T_l)_{11} - (T_l)_{22})}{n^2\varphi^2}\right)\ \exp(in\theta)$$

$$- \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma_n((T_l)_{21})}{in\varphi}\right)\exp(in\theta),$$

де

$$T_l = P_l + \sum_{s=1}^{l-1} (P_{l-s}\Psi_s - \Psi_s U_{l-s}), \quad l = \overline{1,q}$$

(при $l = 1$ сума $\sum_{s=1}^{l-1}$ вважається нулем).

Матриця W при достатньо малих значеннях μ визначатиметься з рівняння (3.5).

Лему 3.1 доведено. $\square$

Повернемось до системи (2.3). Введемо функції:

$$\xi_{10}(t,\varepsilon,\theta) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(h_1(t,\varepsilon,\theta))}{in\varphi}\ \exp(in\theta) - \frac{\Gamma_0(h_2(t,\varepsilon,\theta))}{b(t,\varepsilon)}, \qquad (3.6)$$

$$\xi_{20}(t,\varepsilon,\theta) = -b(t,\varepsilon) \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(h_1(t,\varepsilon,\theta))}{n^2\varphi^2}\ \exp(in\theta)$$

$$+ \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{\Gamma_n(h_2(t,\varepsilon,\theta))}{in\varphi}\ \exp(in\theta) + N_0(t,\varepsilon), \quad (3.7)$$

де функція $N_0(t,\varepsilon)$ визначається з рівняння

$$Q(t,\varepsilon,N_0)=0, \tag{3.8}$$

де

$$\begin{aligned}Q(t,\varepsilon,N_0)&=\Gamma_0(Z_1(t,\varepsilon,\theta,z_{10},z_{20}))\\&=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}Z_1(t,\varepsilon,\theta,z_{10}(t,\varepsilon,\theta),z_{20}(t,\varepsilon,\theta))\,d\theta.\end{aligned}$$

Лема 3.2. *Нехай система* (2.3) *задовольняє наступні умови:*

1) $\Gamma_0(h_1(t,\varepsilon,\theta))=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}h_1(t,\varepsilon,\theta)\,d\theta\equiv 0\quad\forall\, t,\varepsilon\in G,$

2) *рівняння* (3.8) *має корінь* $N_0(t,\varepsilon)$*, який задовольняє умову*

$$\inf_G\left|\frac{dQ(t,\varepsilon,N_0)}{dN_0}\right|>0, \tag{3.9}$$

3) *функції* Z_1,Z_2 *мають неперервні частинні похідні за* z_1,z_2 *до порядку* $2q+1$ *включно, і якщо* $z_1,z_2\in B_m$*, то ці частинні похідні також з класу* B_m*.*

Тоді для достатньо малих значень μ *існує перетворення вигляду*

$$z_j=\xi_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\sum_{k=1}^{2}\psi_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{z}_k,\quad j=1,2, \tag{3.10}$$

де $\xi_j,\psi_{jk}\in B_m$ $(j,k=1,2)$*, яке систему* (2.3) *зводить до вигляду*

$$\begin{aligned}\frac{d\widetilde{z}_j}{dt}&=(j-1)b(t,\varepsilon)\widetilde{z}_j+\sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{l=1}^{q}a_{jkl}(t,\varepsilon)\mu^l\right)\widetilde{z}_k\\&\quad+\varepsilon c_j(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\mu^{2q}(t,\varepsilon,\theta,\mu)+\varepsilon\sum_{k=1}^{2}r_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{z}_k\\&\quad+\mu^{q+1}\sum_{k=1}^{2}w_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{z}_k+\mu\widetilde{Z}_j(t,\varepsilon,\theta,\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2,\mu),\quad j=1,2,\end{aligned} \tag{3.11}$$

де $a_{jkl}\in S_m$*,* c_j*,* d_j*,* r_{jk}*,* $w_{jk}\in B_{m-1}$*,* $\widetilde{Z}_j$ *містять доданки не нижче 2-го порядку відносно* $\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2$*.*

Доведення. Поряд з системою (2.3) розглянемо допоміжну систему

$$\begin{aligned}
\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_1}{d\theta} &= h_1(t,\varepsilon,\theta) + \mu Z_1(t,\varepsilon,\theta,\xi_1,\xi_2),\\
\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_2}{d\theta} &= b(t,\varepsilon)\xi_1 + h_2(t,\varepsilon,\theta) + \mu Z_2(t,\varepsilon,\theta,\xi_1,\xi_2),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

у якій t, φ розглядаються як сталі.

Побудуємо часткову суму розвинення в ряд за степенями μ 2π-періодичного розв'язку системи (3.12)

$$\xi_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) = \sum_{k=0}^{2q-1} \xi_{jk}(t,\varepsilon,\theta)\mu^k, \quad j = 1,2. \tag{3.13}$$

Коефіцієнти ξ_{jk} визначатимуться з наступного ланцюжка лінійних систем:

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_{j0}}{d\theta} = (j-1)b(t,\varepsilon)\xi_{10} + h_j(t,\varepsilon,\theta)), \quad j = 1,2, \tag{3.14}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_{j1}}{d\theta} = (j-1)b(t,\varepsilon)\xi_{11} + Z_j(t,\varepsilon,\theta,\xi_{10},\xi_{20}), \quad j = 1,2, \tag{3.15}$$

$$\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_{j2}}{d\theta} = (j-1)b(t,\varepsilon)\xi_{12} + \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial Z_j(t,\varepsilon,\theta,\xi_{10},\xi_{20})}{\partial \xi_k}\,\xi_{k1}, \quad j = 1,2, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(t,\varepsilon)\frac{d\xi_{js}}{d\theta} = (j-1)b(t,\varepsilon)\xi_{1s} &+ \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial Z_j(t,\varepsilon,\theta,\xi_{10},\xi_{20})}{\partial \xi_k}\,\xi_{k,s-1}\\
&+ F_{js}(t,\varepsilon,\theta,\xi_{10},\xi_{20},\ldots,\xi_{1,s-2},\xi_{2,s-2}),\\
&\qquad j = 1,2;\ s = \overline{3, 2q-1}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Умова 1) леми забезпечує існування 2π-періодичного розв'язку $\xi_{j0}(t,\varepsilon,\theta)$ $(j = 1,2)$ породжуючої системи (3.14), який визначається формулами (3.6), (3.7). Умова 2) леми забезпечує існування 2π-періодичного розв'язку кожної з систем (3.15)–(3.17). Всі ці розв'язки, очевидно, являються функціями класу B_m.

У системі (2.3) здійснимо підстановку

$$z_j = \xi_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \eta_j, \quad j = 1,2, \tag{3.18}$$

де η_1, η_2 — нові невідомі функції, відносно яких одержимо систему

$$\frac{d\eta_j}{dt} = (j-1)b(t,\varepsilon)\eta_1 + (2-j)\varepsilon\alpha(t,\varepsilon)\eta_2$$
$$+ \varepsilon\widetilde{h}_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \mu^{2q}k_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{l=1}^{q} b_{jkl}(t,\varepsilon,\theta)\mu^l\right)\eta_k$$
$$+ \mu^{q+1}\sum_{k=1}^{2} q_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\eta_k + \mu H_j(t,\varepsilon,\theta,\eta_1,\eta_2,\mu), \quad j=1,2 \quad (3.19)$$

На підставі леми 3.1 систему (3.19) зводимо тепер до вигляду (3.11).

Лему 3.2 доведено. □

4. Формулювання результатів

Введемо матрицю

$$A^*(t,\varepsilon,\mu) = J(t,\varepsilon) + \sum_{l=1}^{q} A_l(t,\varepsilon)\mu^l,$$

де

$$J(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b(t,\varepsilon) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_l(t,\varepsilon) = (a_{jkl}(t,\varepsilon))_{j,k=1,2}$$

(a_{jkl} визначені в лемі 3.2).

Теорема 4.1. *Нехай система* (3.11) *задовольняє умови:*

1) *власні значення* λ_j^* $(j=1,2)$ *матриці* $A^*(t,\varepsilon,\mu)$ *такі, що*

$$\inf_G |\operatorname{Re}\lambda_j^*(t,\varepsilon,\mu)| \geq \gamma_0\mu^{q_0} \quad (\gamma_0 > 0,\ 0 < q_0 \leq q),$$

2) *для матриці* $A^*(t,\varepsilon,\mu)$ *існує матриця* $U(t,\varepsilon,\mu)$ *така, що*

   а) $\inf_G |\det U(t,\varepsilon,\mu)| > 0$,
   б) $U^{-1}A^*U = \Lambda(t,\varepsilon,\mu)$ *— діагональна матриця.*

Тоді для достатньо малих значень μ, ε/μ^{2q_0-1} *система* (3.11) *має частковий розв'язок класу* B_{m-1}.

Доведення. Здійснимо в системі (3.11) підстановку

$$\widetilde{z}_j = \frac{\varepsilon + \mu^{2q}}{\mu^{q_0}}\,\widetilde{y}_j, \quad j=1,2, \tag{4.1}$$

де $\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2$ — нові невідомі функції. Одержимо

$$
\begin{aligned}
\frac{d\widetilde{y}_j}{dt} &= (j-1)b(t,\varepsilon)\widetilde{y}_j + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ c_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) \\
&\quad + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ d_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \sum_{k=1}^{2}\Bigl(\sum_{l=1}^{q} a_{jkl}(t,\varepsilon)\mu^l\Bigr)\widetilde{y}_k \\
&\quad + \varepsilon\sum_{k=1}^{2} r_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{y}_k + \mu^{q+1}\sum_{k=1}^{2} w_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{y}_k \\
&\quad + \frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}}\widetilde{Y}_j(t,\varepsilon,\theta,\widetilde{y}_1,\widetilde{y}_2,\mu), \quad j=1,2 \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Розглянемо відповідну лінійну неоднорідну систему

$$
\begin{aligned}
\frac{d\widetilde{y}_{j0}}{dt} &= (j-1)b(t,\varepsilon)\widetilde{y}_{j0} + \sum_{k=1}^{2}\Bigl(\sum_{l=1}^{q} a_{jkl}(t,\varepsilon)\mu^l\Bigr)\widetilde{y}_{k0} \\
&\quad + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ c_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ d_j(t,\varepsilon,\theta,\mu), \quad j=1,2. \qquad (4.3)
\end{aligned}
$$

На підставі результатів роботи [3] і внаслідок умов теореми можемо стверджувати, що система (4.3) має єдиний частковий розв'язок $\widetilde{y}_{j0}(t,\varepsilon,\theta,\mu)$ $(j=1,2)$ класу B_{m-1}, причому $\exists\, K\in]0,+\infty[$ таке, що

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2}\|\widetilde{y}_{j0}\|_{B_{m-1}} &\le \frac{K}{\gamma\mu^{q_0}}\Bigl(\frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\sum_{k=1}^{2}\|c_j\|_{B_{m-1}} + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\sum_{k=1}^{2}\|d_j\|_{B_{m-1}}\Bigr) \\
&< \frac{K}{\gamma}\Bigl(\sum_{k=1}^{2}\|c_j\|_{B_{m-1}} + \sum_{k=1}^{2}\|d_j\|_{B_{m-1}}\Bigr).
\end{aligned}
$$

Розв'язок класу B_{m-1} системи (4.2) шукатимемо методом послідовних наближень, обираючи в якості початкового $\widetilde{y}_{j0}$ $(j=1,2)$, а подальші — обираючи як розв'язки класу B_{m-1} лінійних систем

$$
\begin{aligned}
\frac{d\widetilde{y}_{j,s+1}}{dt} &= (j-1)b(t,\varepsilon)\widetilde{y}_{j,s+1} + \frac{\varepsilon\mu^{q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ c_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) \\
&\quad + \frac{\mu^{2q+q_0}}{\varepsilon+\mu^{2q}}\ d_j(t,\varepsilon,\theta,\mu) + \sum_{k=1}^{2}\Bigl(\sum_{l=1}^{q} a_{jkl}(t,\varepsilon)\mu^l\Bigr)\widetilde{y}_{k,s+1} \\
&\quad + \varepsilon\sum_{k=1}^{2} r_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{y}_{ks} + \mu^{q+1}\sum_{k=1}^{2} w_{jk}(t,\varepsilon,\theta,\mu)\widetilde{y}_{ks} \\
&\quad + \frac{\varepsilon+\mu^{2q}}{\mu^{q_0-1}}\widetilde{Y}_j(t,\varepsilon,\theta,\widetilde{y}_{1s},\widetilde{y}_{2s},\mu), \quad j=1,2,\ s=0,1,\ldots \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

Визначимо область

$$\Omega = \left\{ \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2 \in B_{m-1} : \ \sum_{j=1}^{2} \|\widetilde{y}_j - \widetilde{y}_{j0}\|_{B_{m-1}} \le d \right\}.$$

Позначимо

$$R = \max_{j,k} \|r_{jk}\|_{B_{m-1}}, \quad W = \max_{j,k} \|w_{jk}\|_{B_{m-1}},$$

$$M(d) = \sum_{j=1}^{2} \sup_{y_1, y_2 \in \Omega} \|\widetilde{Y}_j(t, \varepsilon, \theta, y_1, y_2, \mu)\|_{B_{m-1}}.$$

Внаслідок властивостей функцій X_1, X_2 існує $L(d) \in]0, +\infty[$ таке, що $\forall\, (y_1, y_2),\ (z_1, z_2) \in \Omega$ виконано

$$\sum_{j=1}^{2} \|\widetilde{Y}_j(t, \varepsilon, \theta, y_1, y_2, \mu) - \widetilde{Y}_j(t, \varepsilon, \theta, z_1, z_2, \mu)\|_{B_{m-1}} \le L(d) \sum_{j=1}^{2} \|y_j - z_j\|_{B_{m-1}}.$$

Використовуючи звичайну методику принципу стискуючих відображень [7], легко показати, що при умові

$$\frac{K}{\gamma \mu^{q_0}} \left[2^m (R\varepsilon + W\mu^{q+1}) \left(d + \sum_{j=1}^{2} \|\widetilde{y}_{j0}\|_{B_{m-1}} \right) + \frac{\varepsilon + \mu^{2q}}{\mu^{q_0 - 1}}\ M(d) \right] \le d_0 < d \tag{4.5}$$

всі наближення $\widetilde{y}_{js}$ $(j = 1, 2;\ s = 1, 2, \ldots)$ залишаються всередині області Ω. При виконанні умови

$$\frac{K}{\gamma \mu^{q_0}} \left[2^m (R\varepsilon + W\mu^{q+1}) + \frac{\varepsilon + \mu^{2q}}{\mu^{q_0 - 1}}\ L(d) \right] < 1 \tag{4.6}$$

послідовність $\{\widetilde{y}_{js}\}_{s=0,1,2\ldots}$ $(j = 1, 2)$ збігається за нормою $\|\cdot\|_{B_{m-1}}$ до розв'язку класу B_{m-1} системи (4.2). Нерівності (4.5) та (4.6) виконуються при достатньо малих μ, ε/μ^{q_0}, ε/μ^{2q_0-1}. Оскільки $0 < \mu < 1$, то $\varepsilon/\mu^{q_0} \le \varepsilon/\mu^{2q_0-1}$, отже достатньо вимагати малість μ і відношення ε/μ^{2q_0-1}.

Враховуючи (4.1), отримуємо твердження теореми. □

З леми 3.2 та теореми 4.1 випливає

Теорема 4.2. *Нехай система* (2.3) *така, що*

1) *виконано умови леми* 3.2,

2) *система* (3.11), *яка отримується з системи* (2.3) *за допомогою підстановки* (3.10), *задовольняє умови теореми* 4.1.

Тоді для достатньо малих значень μ, ε/μ^{2q_0-1} *система* (2.3) *має частковий розв'язок класу* B_{m-1}.

Приклад. Розглянемо систему, яка відповідає рівнянню

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t,\varepsilon)\sin\theta(t,\varepsilon) + \mu x^3. \tag{4.7}$$

Система має вигляд:

$$\frac{dx_1}{dt} = f(t,\varepsilon)\sin\theta(t,\varepsilon) + \mu x_2^3, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1. \tag{4.8}$$

Обчислення дають

$$Q(t,\varepsilon,N_0) = N_0^3 + \frac{3f^2(t,\varepsilon)}{2\varphi^4(t,\varepsilon)}N_0.$$

Рівняння $Q(t,\varepsilon,N_0)=0$ має корені: $N_{01}\equiv 0$, $N_{02}=-N_{03}=-i\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{f(t,\varepsilon)}{\varphi^2(t,\varepsilon)}$. Маємо $\frac{\partial Q}{\partial N_0} = 3N_0^2 + \frac{3f^2(t,\varepsilon)}{2\varphi^4(t,\varepsilon)}$.

Обмежимось випадком $q = 1$. Тоді $A^*(t,\varepsilon,\mu) = J(t,\varepsilon) + \mu A_1(t,\varepsilon)$, де в даному випадку:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_0(3x_{20}^2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$x_{10} = -\frac{f(t,\varepsilon)}{\varphi(t,\varepsilon)}\cos\theta$, $x_{20}(t,\varepsilon,\theta) = -\frac{f(t,\varepsilon)}{\varphi^2(t,\varepsilon)}\sin\theta + N_0$.

Якщо обрати $N_0 = N_{01} = 0$, то власні значення матриці $A^*(t,\varepsilon,\mu)$ дорівнюють

$$\lambda_{1,2}^*(t,\varepsilon) = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{f(t,\varepsilon)}{\varphi^2(t,\varepsilon)}\sqrt{\mu},$$

і таким чином вони задовольняють умову 1) теореми 4.1 з показником $q_0 = 1/2$ (звернемо увагу на те, що в даному випадку цей показник може бути дробовим).

Якщо обрати $N_0 = N_{02} = N_{03}$, то

$$\lambda_{1,2}(t,\varepsilon) = \pm i\sqrt{3}\frac{f(t,\varepsilon)}{\varphi^2(t,\varepsilon)}\sqrt{\mu},$$

і таким чином умова 1) теореми 4.1 не виконується.

Література

[1] А. М. Самойленко, Р. І. Петришин, *Математичні аспекти теорії нелінійних коливань*, К.: Наук. думка, 2004, 474 с.

[2] М. Р. Меркин, В. М. Фридман, *Проекционный метод решения задачи о вынужденных колебаниях в нелинейных системах с медленно меняющимися коэффициентами* // Прикл. матем. и механ., **45** (1981), вып. 1, 71–76.

[3] А. В. Костин, С. А. Щёголев, *Об устойчивости колебаний, представимых рядами Фурье с медленно меняющимися параметрами* // Дифференц. уравн., **44** (2008), N 1, 45–51.

[4] А. В. Костин, С. А. Щёголев, *О решениях квазилинейной дифференциальной системы второго порядка, представимых рядами Фурье, содержащими медленно меняющиеся параметры* // Укр. матем. журн., **50** (1998), N 5, 654–664.

[5] С. А. Щёголев, *Резонансный случай существования решений квазилинейной дифференциальной системы второго порядка, представимых рядами Фурье, содержащими медленно меняющиеся параметры* // Укр. матем. журн., **51** (1999), N 2, 285–288.

[6] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, М.: Физматгиз, 1961, 935 с.

[7] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, М.: Наука, 1972, 496 с.

Відомості про авторів

Сергій Авенірович Щоголев

Одеський національний університет
ім. І. І. Мечникова
вул. Дворянська, 2,
Одеса, 65082
Україна
E-Mail: shchogolevs@rambler.ru