Український математичний вісник
Том 7 **(2010)**, № 3, 369 – 383

Оценка носителей решений некоторых классов эволюционных систем и уравнений

Тариел А. Саникидзе, Анатолий Ф. Тедеев

(*Представлена А. Е. Шишковым*)

Аннотация. В работе изучается свойство финитности носителя для системы эволюционных уравнений и для уравнений нестационарного p-лапласиана с конвективными слагаемыми. Получены новые оценки размеров носителя, учитывающие вид конвективных членов.

2010 MSC. 35K65, 35B45, 35Q60, 35K45.

Ключевые слова и фразы. эволюционная система, модель Бина, финитность решения, конвективное слагаемое.

1. Введение

В работе изучаются задача Коши для вырождающейся квазилинейной эволюционной системы уравнений вида

$$\mathbf{H}_t + \nabla \times [|\nabla \times \mathbf{H}|^{p-2} \nabla \times \mathbf{H}] + \frac{2\alpha x}{1+|x|^2} \times [| \bigtriangledown \mathbf{H}|^{p-2} \nabla \times \mathbf{H}] = 0,$$
$$(x,t) \in Q_T = \mathbb{R}^3 \times (0,T), \quad \alpha > 0,\ T > 0,\ p > 2, \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{H}(x,0) = \mathbf{H}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \tag{1.3}$$

и задача Коши для вырождающегося параболического уравнения

$$u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + p \nabla \Theta \cdot \bigtriangledown u | \bigtriangledown u|^{p-2}, \tag{1.4}$$

$$(x,t) \in Q_T = \mathbb{R}^N \times (0,T), \quad N \geq 1,\ p > 2,\ \Theta(x) = |x|^\gamma,\ \gamma > 1$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.5}$$

Статья поступила в редакцию 27.05.2010

ISSN 1810 – 3200.

Здесь $\mathbf{H}(x,t) = (H_1(x,t), H_2(x,t), H_3(x,t))$ (здесь и далее векторные величины выделяются жирным шрифтом), $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{H}_t$ — производная по времени. $\mathbf{H}_0(x) = (H_{01}(x), H_{02}(x), H_{03}(x))$ — заданный вектор. Символ $\nabla \times \mathbf{A}$ означает $\operatorname{rot} \mathbf{A}$, то есть векторное произведение векторов $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3},)$ и $\mathbf{A}(x)$; символ $\nabla \cdot \mathbf{A}$ — скалярное произведение векторов ∇ и $\mathbf{A}$, то есть $\nabla \cdot \mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{A}$; $|\mathbf{A}|$ — длина вектора $\mathbf{A}$. Если в (1.1) положить $\alpha = 0$, то (1.1)–(1.3) используется как приближение к модели Бина для сверхпроводимости типа II (см. [1,2] и имеющуюся там литературу). Вектор имеет смысл напряженности магнитного поля. Уравнение (1.4) можно рассматривать как нестационарный p-лапласиан с конвективным членом.

Целью данной работы является установление свойства компактности носителя задачи (1.1)–(1.3) и (1.4), (1.5) и оценки радиуса носителя при условии, что начальные данные $\mathbf{H}_0$ и u_0 имеют компактные носители. Отметим, что финитность решения (1.1)–(1.3) при $\alpha = 0$ в двумерном случае было установлено в работе [1], а в трехмерном случае — в [3]. Основной идеей доказательства свойства финитности носителя является сведение (1.1) и (1.4), соответственно, к видам:

$$(1 + |x|^2)^\alpha \mathbf{H}_t + \nabla \times [(1 + |x|^2)^\alpha |\nabla \times \mathbf{H}|^{p-2} \cdot \nabla \times \mathbf{H}] = 0 \tag{1.6}$$

и

$$\omega(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\omega(x) |\nabla u|^{p-2} \nabla u)), \tag{1.7}$$

где $\omega(x) = \exp(p\Theta(x))$. Отметим также, что уравнение (1.4) с источником изучалось также в работе [4], где на базе построения суб- и суперрешений была установлена теорема типа Фуджиты. В работе [4] $\Theta(x) = |x|^\alpha,\ \alpha > 0$ и связь (1.4) с (1.7) не учитывалась. Наш подход основан на введение специальных весовых пространств и весовых энергетических оценках и может служить альтернативным к [4] подходом для изучения качественных свойств для уравнений с конвекцией.

Отметим, что (1.4) является частным случаем уравнения

$$u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \nabla \Theta \nabla u |\nabla u|^{q-2},$$

где $1 < q \le p$, изучение которого представляет независимый интерес. В частности, интересно было установить свойство финитности решения и дать точные оценки радиуса носителя. Поскольку, если $q \ne p$, то представление типа (1.7) невозможно, и значит подходов данной работы недостаточно для этих целей.

Обозначим через $W^1_{p,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ весовое пространство С. Л. Соболева с конечной нормой

$$||f||_{W^1_{p,\alpha}(\mathbb{R}^3)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} (1+|x|^2)^\alpha (|f|^p + |\nabla f|^p)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $\mathbf{H}_0(x)$ — измеримая финитная вектор-функция, удовлетворяющая условиям:

$$\nabla \mathbf{H}_0(x) = 0, \quad (1+|x|^2)^\alpha |\nabla \times \mathbf{H}_0(x)| \in L_p(\mathbb{R}^3),$$
$$|\nabla \times [(1+|x|^2)^\alpha |\nabla \times \mathbf{H}_0|^{p-2} \nabla \times \mathbf{H}_0]| \in L_2(\mathbb{R}^3). \qquad (1.8)$$

Под слабым решением задачи (1.1)–(1.3) будем понимать вектор-функцию $\mathbf{H}(x,t) \in L_2(0,T; W^1_{p,\alpha}(\mathbb{R}^3))$ $\forall T > 0$ такую, что $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ почти всюду в Q_T и выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} [-(1+|x|^2)^\alpha \mathbf{H}\mathbf{\Phi}_t + (1+|x|^2)^\alpha |\nabla \times \mathbf{H}|^{p-2} (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot (\nabla \times \mathbf{\Phi})]\,dx\,dt$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} (1+|x|^2)^\alpha \mathbf{H}_0(x)\mathbf{\Phi}(x,0)\,dx$$

для любой финитной по x вектор-функции $\mathbf{\Phi}(x,t) \in W^1_2(0,T; W^1_p(\mathbb{R}^3))$ такой, что $\nabla \times \mathbf{\Phi}(x,t) = 0$ почти всюду и $\mathbf{\Phi}(x,T) = 0$ в $\mathbb{R}^3$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *При сделанных предположениях о данных задачи* (1.1)–(1.3) *существует единственное слабое решение* $\mathbf{H}(x,t)$, *причем* $\mathbf{H}_t(1+|x|^2)^\alpha \in L_2(Q_T)$ $\forall T > 0$ *и справедливы оценки:*

$$\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\mathbb{R}^3} (1+|x|^2)^\alpha |\mathbf{H}(x,T)|^2\,dx + \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} (1+|x|^2)^\alpha |\nabla \times \mathbf{H}|^p\,dx\,d\tau$$
$$\le c \int\limits_{\mathbb{R}^3} (1+|x|^2)^\alpha |\mathbf{H}_0|^2\,dx, \quad (1.9)$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^3} (1+|x|^2)^\alpha |\mathbf{H}_t|^2\,dx\,d\tau + \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\nabla \times \mathbf{H}|^p\,dx$$
$$\le c \int\limits_{\mathbb{R}^3} (1+|x|^2)^\alpha |\nabla \times \mathbf{H}_0|^p\,dx. \quad (1.10)$$

Замечание 1.1. Заметим, что из оценки (1.10) следует, что $\mathbf{H}(x,t)$ можно понимать не только в слабом смысле, но и поточечно, то есть почти всюду. Это означает, что $\mathbf{H}$ на самом деле сильное решение (1.1)–(1.3).

Доказательство теоремы в основном такое же, как в случае $\alpha = 0$. Неравенство (1.9) и (1.10) легко доказываются умножением на $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}_t$ скалярно (1.6) и интегрированием по частям по Q_T.

Теорема 1.2. *Пусть* $\operatorname{supp}\mathbf{H} \subset B_{R_0} = \{|x| < R_0\}$ *и выполнены условия* (1.8) *на* $\mathbf{H}_0(x)$. *Тогда сильное решение* $\mathbf{H}(x,t)$ *задачи* (1.1)–(1.3) *в* Q_∞ *финитно при всех* $t > 0$ *и имеет место следующая оценка размера носителя:*

$$\operatorname{supp}\mathbf{H}(x,t) \subset B_{\bar{R}(t)} = \{|x| < \bar{R}(t)\}, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \tag{1.11}$$

где

$$\overline{R}(t) = 4R_0 + c\left[\int\limits_{\mathbb{R}^3} (1+|x|^2)^\alpha |\mathbf{H}_0|^2\,dx\right]^{(p-2)/k} t^{2/k},$$

$$k = (3+2\alpha)(p-2) + 2p.$$

Замечание 1.2. Оценка (1.11) при $\alpha = 0$ совпадает с соответствующей оценкой носителя работы [3]. Очевидно, что при $\alpha > 0$ оценка (1.11) в определенном смысле сильнее и при $\alpha \to \infty$, $2/k \to 0$. Таким образом, система (1.1) “конвективная добавка” играет роль демпфирования.

Далее обозначим через $W^1_{p,\omega(x)}(\mathbb{R}^N)$ пространство измеримых функций, имеющих обобщенные производные в смысле С. Л. Соболева, для которых конечна норма

$$\|f\|_{W^1_{p,\omega(x)}(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L_{p,\omega(x)}(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla f\|_{L_{p,\omega(x)}(\mathbb{R}^N)},$$

где

$$\|f\|_{L_{p,\omega(x)}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega(x)|f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|\nabla f\|_{L_{p,\omega(x)}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega(x)|\nabla f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $u_0(x)$ — неотрицательная измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$u_0 \in W^1_{p,\omega(x)}(\mathbb{R}^N). \tag{1.12}$$

Под слабым решением задачи (1.4), (1.5) будем понимать неотрицательную функцию $u_0 \in L_2(0,T;W^1_{p,\omega(x)}(\mathbb{R}^N))$ $\forall T > 0$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} (-\omega(x)u\varphi_t + \omega(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi)\,dx\,dt = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega(x)u_0(x)\varphi(x,0)\,dx$$

для любой финитной по x функции $\varphi(x,t) \in W^1_2(0,T;W^1_p(\mathbb{R}^N))$ и $\varphi(x,T) = 0$ в $\mathbb{R}^N$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. *Пусть выполнено условие* (1.12). *Тогда существует единственное слабое решение* $u(x,t)$, *причем* $u_t\omega(x) \in L_2(Q_T), Q_T = \mathbb{R}^N \times (0,T)$ $\forall T > 0$, *и справедлива оценка*

$$\sup_{0<t<T} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega(x)u^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega(x)|\nabla u|^p\,dx\,d\tau \le c \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega(x)u_0^2\,dx, \tag{1.13}$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega(x)u_t^2\,dx\,d\tau + \sup_{0<\tau<T} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega(x)|\nabla u|^p\,dx \le c \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega(x)|\nabla u_0|^p\,dx. \tag{1.14}$$

Замечание 1.3. Из оценки (1.14) следует, что $u(x,t)$ на самом деле сильное решение, то есть $u_t \in L_2(\mathbb{R}^N)$ и, следовательно, (1.4) можно понимать почти всюду.

Доказательство теоремы опускаем.

Теорема 1.4. *Пусть* $\operatorname{supp} u_0 \in B_{R_0}$ *и выполнено условие* (1.12). *Тогда сильное решение* $u(x,t)$ *задачи* (1.4), (1.5) *в* Q_∞ *финитно при всех* $t > 0$ *и при достаточно больших* $t > t_0(\|u_0\omega\|_{L_2(\mathbb{R}^N)})$ *имеет место оценка*

$$\operatorname{supp} u(x,t) \subset B_{\bar{R}(t)} = \{|x| < \bar{R}(t)\}, \quad x = (x_1, \dots, x_N), \tag{1.15}$$

где $\bar{R}(t) = [ln\ t]^{\frac{1}{\gamma}}$.

Замечание 1.4. Из оценки (1.15) видно, что оценка носителя сильнее, чем в случае $\Theta = 0$ (в последнем случае см., например, [5]).

Отметим также работу [6], где исследовались асимпточеские свойства носителей для квазилинейных параболических уравнений высокого порядка с конвекцией. В основе доказательств теорем 1.2 и 1.4 лежат энергетические подходы работ [3, 7–9].

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$-область с достаточно гладкой границей. Тогда непосредственно можно проверить, что для любых гладких векторных полей $\mathbf{A}(x)$ и $\mathbf{B}(x)$ таких, что $\mathbf{A}(x),\ \mathbf{B}(x),\ \nabla\times\mathbf{A}(x),\ \nabla\times\mathbf{B}(x) \in L_2(\Omega)$ и либо $\mathbf{B}(x)$, либо $\mathbf{A}(x)$, равно нулю на $\partial\Omega$, справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega \mathbf{A}(x)\cdot(\nabla\times\mathbf{B}(x))\,dx = \int\limits_\Omega \nabla\times\mathbf{A}(x)\cdot\mathbf{B}(x)\,dx. \tag{2.1}$$

Далее, для достаточно гладких $\mathbf{A}(x)$ и скалярной функции $a(x)$ имеют место формулы:

$$\nabla\times(a(x)\mathbf{A}(x)) = a(x)\nabla\times\mathbf{A}(x) + (\nabla a(x))\times\mathbf{A}(x), \tag{2.2}$$

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}(x) = -\nabla\mathbf{A}(x) + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}(x)). \tag{2.3}$$

Из (2.3) при условии, что $\mathbf{A}(x)=0$ при $x\in\partial\Omega,\ \nabla\cdot\mathbf{A}(x),\ \nabla\times\mathbf{A}(x)\in L_p(\Omega)$, следует, что

$$\|D\mathbf{A}(x)\|_{L_{p(\Omega)}} \le c\left(\|\nabla\times\mathbf{A}(x)\|_{L_{p(\Omega)}} + \|\nabla\cdot\mathbf{A}(x)\|_{L_{p(\Omega)}}\right). \tag{2.4}$$

Здесь и далее через C и c обозначаются различные положительные постоянные, зависящие лишь от данных задачи, $D\mathbf{A}(x) = \{\frac{\partial A_i(x)}{\partial x_j},\ i,j=1,\ldots,3\}$. Обозначим

$$\|\mathbf{A}(x)\|_{L_{p(\Omega)}} = \left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^3 |A_i(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|D\mathbf{A}(x)\|_{L_{p(\Omega)}} = \left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^3 |\nabla A_i(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $|D\mathbf{A}(x)|^p = \sum_{i,j=1}^3 |\frac{\partial A_i(x)}{\partial x_j}|^p$. Для вектор-функции $\mathbf{U}(x)$ такой, что $\mathbf{U}(x)=0$ на $\partial\Omega$ и

$$\int\limits_\Omega |x|^\beta|\mathbf{U}|^\varepsilon\,dx, \quad \int\limits_\Omega |x|^\beta|D\mathbf{U}|^p\,dx < \infty, \quad \beta>0,$$

то для $q>\varepsilon>0,\ p\ge 1$,

$$\left(\int\limits_\Omega |x|^\beta|\mathbf{U}|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \le c\left(\int\limits_\Omega |x|^\beta|D\mathbf{U}|^p\,dx\right)^{\frac{a}{p}}\left(\int\limits_\Omega |x|^\beta|\mathbf{U}|^\varepsilon\,dx\right)^{\frac{1-a}{\varepsilon}}, \tag{2.5}$$

где постоянная $0 \le a \le 1$ находится по размерности

$$\frac{3+\beta}{q} = \frac{(3+\beta-p)a}{p} + \frac{(3+\beta)(1-a)}{\varepsilon}$$

и $C = C(\beta, q, \varepsilon)$. Отметим, что (2.5) справедливо и в случае $\Omega = \mathbb{R}^3$. Доказательство (2.5) можно найти в [10].

Далее, пусть $\nabla f(x)\omega^{\frac{1}{p}} \in L_p(\mathbb{R}^N)$. Тогда справедливо следующее неравенство Пуанкаре:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla\Theta|^p \omega |f|^p \, dx \le c(P, N) \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega |\nabla f|^p \, dx. \tag{2.6}$$

Напомним, что $\omega(x) = \exp(p\Theta(x))$, $\Theta(x) = |x|^\gamma$, $\gamma > 1$. Доказательство (2.6) можно найти в [11]. На самом деле, в [11] (2.6) установлено для более общего класса функций $\Theta(x)$. Неравенство (2.6) позволяет доказать следующее мультипликативное неравенство:

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega^{\frac{q}{p}} |f|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \le c\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega |\nabla f|^p \, dx\right)^{\frac{a}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega^{\frac{\varepsilon}{p}} |f|^\varepsilon \, dx\right)^{\frac{1-a}{\varepsilon}}, \tag{2.7}$$

где $q > \varepsilon$, $p \ge 1$ и $0 < a < 1$ определяется так:

$$\frac{N}{q} = \frac{(N-p)a}{p} + \frac{N(1-a)}{\varepsilon}.$$

Докажем (2.7). Возьмем в классическом неравенстве Ниренберга–Гальярдо

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |v|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \le c\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p \, dx\right)^{\frac{a}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} v^\varepsilon \, dx\right)^{\frac{1-a}{\varepsilon}},$$

$v = \omega^{\frac{1}{p}} f$. Тогда

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega^{\frac{q}{p}} |f|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le c\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} (\omega|\nabla f|^p + |\nabla\Theta|^p \omega |f|^p) \, dx\right)^{\frac{a}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega^{\frac{\varepsilon}{p}} |f|^\varepsilon \, dx\right)^{\frac{1-a}{\varepsilon}}.$$

Применяя (2.6), приходим к (2.7).

3. Доказательство теоремы 1.2

Пусть $D_1 \subset D_2$ — два открытых множества с достаточно гладкой границей, причем $D_2 \cap B_{R_0} = \varnothing$. Пусть $\zeta(x)$ — гладкая срезающая функция множества D_2 и такая, что $\zeta(x) = 1$ на D_1, $\zeta(x) = 0$ вне D_2. Умножим обе части (1.6) скалярно на $\mathbf{H}(x,t)\zeta^s(x)$, где $s \geq p$ достаточно велико. Интегрируя по частям по Q_t, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_2}(1+|x|^2)^\alpha\zeta^s|\mathbf{H}(x,t)|^2\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_{D_2}(1+|x|^2)^\alpha|\nabla\times\mathbf{H}|^{p-2}\nabla\times\mathbf{H}\cdot\nabla\times(\mathbf{H}\zeta^s)\,dx\,d\tau = 0. \quad (3.1)$$

Пользуясь (2.2), перепишем (3.1) в виде

$$\frac{1}{2}\int\limits_{D_2}(1+|x|^2)^\alpha\zeta^s|\mathbf{H}|^2\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_{D_2}(1+|x|^2)^\alpha\zeta^s|\nabla\times\mathbf{H}|^p\,dx\,d\tau = -\int\limits_0^t\int\limits_{D_2}|\nabla\times\mathbf{H}|^{p-2}(1+|x|^2)^\alpha\nabla\zeta^s\times\mathbf{H}\,dx\,d\tau. \quad (3.2)$$

Поскольку $|\nabla\zeta\times\mathbf{H}| \leq c|\nabla\zeta||\mathbf{H}|$, то применяя неравенство Юнга, оценим правую часть (3.2) через

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{D_2}(1+|x|^2)^\alpha\zeta^s|\nabla\times\mathbf{H}|^p\,dx\,d\tau + c\int\limits_0^t\int\limits_{D_2}(1+|x|^2)^\alpha\zeta^{s-p}|\nabla\zeta|^p|\mathbf{H}|^p\,dx\,d\tau.$$

Это даст

$$\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{D_2}(1+|x|^2)^\alpha\zeta^s|\mathbf{H}|^2\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_{D_2}(1+|x|^2)^\alpha\zeta^s|\nabla\times\mathbf{H}|^p\,dx\,d\tau \leq c\int\limits_0^t\int\limits_{D_2}(1+|x|^2)^\alpha\zeta^{s-p}|\nabla\zeta|^p|\mathbf{H}|^p\,dx\,d\tau. \quad (3.3)$$

В силу того, что $\nabla\cdot\mathbf{H} = 0$

$$\nabla\cdot(\zeta^s\mathbf{H}(x,t)) = \zeta^s\nabla\mathbf{H} + s\zeta^{s-1}\nabla\zeta\cdot\mathbf{H} = s\zeta^{s-1}\nabla\zeta\cdot\mathbf{H}.$$

Таким образом,

$$(1+|x|^2)^{\alpha}|\nabla\zeta^s\mathbf{H}|^p \le c(1+|x|^2)^{\alpha}\zeta^{p(s-1)}|\nabla\zeta|^p|\mathbf{H}|^p. \tag{3.4}$$

Более того,

$$\nabla\times(\zeta^s\mathbf{H}) = \zeta^s\nabla\times\mathbf{H} + s\zeta^{s-1}\nabla\zeta\times\mathbf{H}.$$

Значит,

$$|\nabla\times(\zeta^s\mathbf{H})|^p \le c(\zeta^{sp}|\nabla\times\mathbf{H}|^p + \zeta^{ps-p}|\nabla\zeta|^p|\mathbf{H}|^p). \tag{3.5}$$

Поскольку $p > 2$ и $0 \le \zeta \le 1$, то $\zeta^{ps} \le \zeta^s$, $\zeta^{ps-p} \le \zeta^{s-p}$, $\zeta^{2s} \le \zeta^s$, следовательно, из (3.3)–(3.5) получим

$$\begin{gathered}\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{D_2}(1+|x|^2)^{\alpha}(\zeta^s\mathbf{H}(x,t))^2\,dx \\ +\int\limits_0^t\int\limits_{D_2}(1+|x|^2)^{\alpha}|\nabla\times\zeta^s\mathbf{H}|^p\,dx\,d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_{D_2}(1+|x|^2)^{\alpha}|\nabla\cdot\zeta^s\mathbf{H}|^p\,dx\,d\tau \\ \le c\int\limits_0^t\int\limits_{D_2}(1+|x|^2)^{\alpha}\zeta^{s-p}|\nabla\zeta|^p|\mathbf{H}|^p\,dx\,d\tau. \end{gathered}\tag{3.6}$$

Если теперь взять в неравенстве (2.4), $\mathbf{A} = (1+|x|^2)^{\alpha}|\nabla\zeta^s\mathbf{H}$, то из (3.6) получим

$$\begin{gathered}\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{D_2}(1+|x|^2)^{\alpha}|\zeta^s\mathbf{H}(x,t)|^2\,dx \\ +\int\limits_0^t\int\limits_{D_2}(1+|x|^2)^{\alpha}|D(\zeta^s\mathbf{H}|^p\,dx\,d\tau \le c\int\limits_0^t\int\limits_{D_2}(1+|x|^2)^{\alpha}\zeta^{s-p}|\nabla\zeta|^p|\mathbf{H}|^p\,dx\,d\tau \\ + c\int\limits_0^t\int\limits_{D_2}(1+|x|^2)^{\alpha-p}|x|^p\zeta^{s-p}|\mathbf{H}|^p\,dx\,d\tau. \end{gathered}\tag{3.7}$$

Рассмотрим последовательность $R_n = R(1+2^{-n-1})$ и $r_n = \frac{R(1-2^{-n-1})}{2}$, $R \ge 4R_0$, $n = 0,1,2,\ldots$ Пусть $\Omega_n = \{x\in\mathbb{R}^3 : r_n|x| < R_n\}$. Пусть $\zeta_n(x)$ — последовательность гладких срезающих функций таких, что $\zeta_n(x) = 1$, $x\in\Omega_{n-1}$; $\zeta_n(x) = 0$, $x\in\mathbb{R}^3\backslash\Omega_n$; $|\nabla\zeta_n| \le \frac{c2^n}{R}$.

Очевидно, что при $R > 4R_0$ носители ζ_n не пересекаются с носителем $\mathbf{H}_0(x)$. Из (3.7) при $D_1 = \Omega_{n-1},\ D_2 = \Omega_n\ (n \geq 1)$ и $\zeta = \zeta_n$ имеем

$$\sup_{0<\tau<t} \int_{\Omega_n} (1+|x|^2)^\alpha (\zeta_n^s \mathbf{H}(x,\tau))^2\,dx + \int_0^t \int_{\Omega_n} (1+|x|^2)^\alpha |D(\zeta_n^s \mathbf{H})|^p\,dx\,d\tau$$
$$\leq \frac{c2^n p}{R^p} \int_0^t \int_{\Omega_{n-1}} (1+|x|^2)^\alpha |\zeta_{n-1}^s \mathbf{H}|^p\,dx\,d\tau. \quad (3.8)$$

Не ограничивая общности, можем считать, что $R_0 > 1$, и, значит, в кольцах $\Omega_n : (1+|x|^2)^\alpha \sim |x|^{2\alpha}$ и мы можем применить мультипликативное неравенство (2.5) с $\beta = 2\alpha,\ q = p$ и $\mathbf{U} = \mathbf{V}_{n-1} = \zeta_{n-1}^s \mathbf{H}$. Имеем

$$\int_{\Omega_{n-1}} |x|^{2\alpha} |\mathbf{V}_{n-1}|^p\,dx$$
$$\leq c\left(\int_{\Omega_{n-1}} |x|^{2\alpha} |D\mathbf{V}_{n-1}|^p\,dx\right)^a \left(\int_{\Omega_{n-1}} |x|^{2\alpha} |\mathbf{V}_{n-1}|^2\,dx\right)^{\frac{p(1-a)}{2}}, \quad (3.9)$$

где $a = \frac{3(p-2)}{k},\ k = (3+2\alpha)(p-2)+2p$. Интегрируя (3.9) по времени, получим

$$\int_0^t \int_{\Omega_{n-1}} |x|^{2\alpha} |\mathbf{V}_{n-1}|^p\,dx\,d\tau \leq ct^{1-a}\left(\int_0^t \int_{\Omega_{n-1}} |x|^{2\alpha} |D\mathbf{V}_{n-1}|^p\,dx\,d\tau\right)^a$$
$$\times \left(\sup_{0<\tau<t} \int_{\Omega_{n-1}} |x|^{2\alpha} |\mathbf{V}_{n-1}|^2\,dx\right)^{\frac{p(1-a)}{2}}. \quad (3.10)$$

Обозначая

$$Y_n = \sup_{0<\tau<t} \int_{\Omega_n} |x|^{2\alpha} |\mathbf{V}_n(x,\tau)|^2\,dx + \int_0^t \int_{\Omega_n} |x|^{2\alpha} |D\mathbf{V}_n(x,t)|^p\,dx\,d\tau$$

и учитывая $(1+|x|^2)^\alpha \sim |x|^{2\alpha}$, из (3.8) и (3.10), находим

$$Y_n \leq \frac{c2^{np} t^{1-a}}{R^p} Y_{n-1}^{1+\frac{(1-a)(p-2)p}{k}}.$$

Из итеративной леммы 5.6 [11] следует, что $Y_n \to 0$ при $n \to \infty$, если

$$\frac{ct^{\frac{2}{k}} Y_0^{\frac{p-2}{k}}}{R} \le \varepsilon_0(\alpha, p), \tag{3.11}$$

где ε достаточно малый параметр. Осталось доказать, что

$$Y_0 \le \bar{Y}_0 = c \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\frac{R}{4}<|x|<\frac{3}{2}R} |x|^{2\alpha} |\mathbf{H}|^2 \, dx + c \int\limits_0^t \int\limits_{\frac{R}{4}<|x|<\frac{3}{2}R} |x|^{2\alpha} |D\mathbf{H}|^p \, dx \, d\tau \le cR^{-\frac{k}{2}} t E_0^{\frac{p-2}{2}}, \tag{3.12}$$

где $E_0 = \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |x|^2)^\alpha |\mathbf{H}_0|^2 \, dx$.

Для доказательства (3.12) рассмотрим последовательность колец $\Omega^{(n)} : \Omega^{(n)} \subset \Omega^{(n+1)}$ таких, что $\Omega^{(n)} = \{r^{(n)} < |x| < R^{(n)}\}$, где $r^{(n)} = \frac{R}{8}(1 + 2^{-n})$, $R^{(n)} = \frac{3}{2}R(2 - 2^{-n})$. Рассмотрим также последовательность срезающих функций $\zeta^{(n)}(x)$ таких, что: $\zeta^{(n)}(x) = 1$ для $x \in \Omega^{(n)}$ и $\zeta^{(n)}(x) = 0$ вне $\Omega^{(n+1)}$. Пусть $V^{(n)}(x,t) = [\zeta^{(n)}(x)]^s \mathbf{H}(x,t)$. Тогда как и ранее приходим к неравенству

$$J_n = \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\Omega^{(n)}} |x|^{2\alpha} ([\zeta^{(n)}(x)]^s \mathbf{H}(x,\tau))^2 \, dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega^{(n)}} |x|^{2\alpha} |D[\zeta^{(n)}(x)]^s \mathbf{H}(x,\tau)|^p \, dx \, d\tau \le b_1^n R^{-p} \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega^{(n+1)}} |x|^{2\alpha} |[\zeta^{(n+1)}(x)]^s \mathbf{H}(x,\tau)|^p \, dx \, d\tau. \tag{3.13}$$

Применяя к функции $V^{(n)}(x,t)$ снова мультипликативное неравенство и неравенство Юнга, получим из (3.13)

$$J_n \le \delta J_{n+1} + c(\delta) R^{-\frac{p}{1-a}} t \left[\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\Omega^{(\infty)}} |x|^{2\alpha} [V^{(\infty)}(x,\tau)]^2 \, dx \right]^{\frac{p}{2}}. \tag{3.14}$$

В силу теоремы 1.1

$$\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\Omega^{(\infty)}} |x|^{2\alpha} [V^{(\infty)}(x,\tau)]^2 \, dx \le \int\limits_{\mathbb{R}^N} (1 + |x|^2)^\alpha |\mathbf{H}_0(x)|^2 \, dx.$$

Следовательно, итерируя (3.14) по параметру n, мы приходим к требуемому неравенству (3.12). Подставляя теперь оценку (3.12) в (3.11), приходим к выводу, что $\mathbf{H}(x,t) \equiv 0$ п.в. $x \in \mathbb{R}^3$, если $R \ge 4R_0 + cR(\bar{t})$.

Теорема 1.2 доказана.

4. Доказательство теоремы 1.4

Пусть Ω_1 и Ω_2 — два открытых множества с достаточно гладкой границей, причем $\Omega_2 \cap \{\operatorname{supp} u_0(x)\} = \varnothing$ и пусть $\zeta(x)$ — гладкая срезающая функция множества $\Omega_2 : \zeta(x) = 1$ на Ω_1, $\zeta(x) = 0$ вне Ω_2. Умножим обе части (1.7) на $u(x,t)\zeta^s(x)$, где $s \ge p$ достаточно велико. Интегрируя по частям по $Q_t = \mathbb{R}^N \times (0,t)$, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_2} \omega(x)\zeta^s(x,t)u^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_2} \omega(x)\zeta^s(x)|\nabla u|^p\,dx\,d\tau$$
$$= -s\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_2} \omega(x)\zeta^{s-1}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\zeta\,dx\,d\tau. \quad (4.1)$$

По неравенству Юнга имеем

$$\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_2} \omega(x)\zeta^{s-1}|\nabla u|^{p-1}|\nabla\zeta|\,dx\,d\tau \le \frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_2} \omega(x)\zeta^s|\nabla u|^p\,dx\,d\tau$$
$$+ c\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_2} \omega(x)\zeta^{s-p}|\nabla\zeta|^p u^p\,dx\,d\tau.$$

Следовательно, из (4.1) получим

$$\sup_{0<\tau<t}\int\limits_{\Omega_2} \omega(x)\zeta^s u^2(x,\tau)\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_2} \omega(x)\zeta^s|\nabla u|^p\,dx\,d\tau$$
$$\le c\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_2} \omega(x)\zeta^{s-p}|\nabla\zeta|^p u^p\,dx\,d\tau. \quad (4.2)$$

Рассмотрим последовательности $R_{(n)} = R(1 + 2^{-n-1})$ и $r_{(n)} = R(1 - 2^{-n-1})/2$, $R \ge 4R_0$, $n = 0,1,2,\ldots$ Пусть $\Omega_{(n)} = \{x \in \mathbb{R}^N;\ r_{(n)} < |x| < R_{(n)}\}$ и $\zeta_n(x)$ — последовательности гладких срезающих функций таких, что $\zeta_{(n)}(x) = 1;\ x \in \Omega_{(n+1)},\ \zeta_{(n)}(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^N\backslash\Omega_n,\ |\nabla\zeta_n(x)| \le$

$\frac{c2^n}{R}$. Тогда из (4.2) при $\Omega_1 = \Omega_{(n+1)},\ \Omega_2 = \Omega_{(n)}$ $(n \geq 1)$ и $\zeta(x) = \zeta_n(x)$ получаем

$$\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\Omega_n} \omega(x)(\zeta_n^s u)^2\, dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_n} \omega|\nabla(\zeta_n^s u)|^p\, dx\, d\tau \leq \frac{c2^{np}}{R^p} \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_{n-1}} \omega(\zeta_{n-1}^s u)^p\, dx\, d\tau. \quad (4.3)$$

Далее, применим неравенство (2.7) с $q = p,\ \varepsilon = 2,\ f = v_{n-1} = \zeta_{n-1}^s u$. Это даст

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega v_{n-1}^p\, dx \leq c\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega|\nabla v_{n-1}|^p\, dx\Bigg)^a \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega^{\frac{2}{p}} v_{n-1}^2\, dx\Bigg)^{\frac{p(1-a)}{2}}.$$

Следовательно, интегрируя это неравенство по времени, находим

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_{n-1}} \omega v_{n-1}^p\, dx\, d\tau \leq c\Bigg(\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_{n-1}} \omega|\nabla v_{n-1}|^p\, dx\, d\tau\Bigg)^a \times \Bigg(\int\limits_0^t \Bigg(\int\limits_{\Omega_{n-1}} \omega^{\frac{2}{p}} v_{n-1}^2\, dx\Bigg)^{\frac{p}{2}} d\tau\Bigg)^{1-a}. \quad (4.4)$$

Далее, поскольку $\omega^{\frac{2}{p}} = \omega\omega^{-\frac{p-2}{p}}$, то очевидно, что

$$\int\limits_{\Omega_{n-1}} \omega^{\frac{2}{p}} v_{n-1}^2\, dx \leq c \exp(-(p-2)(\frac{R}{4})^\gamma) \int\limits_{\Omega_{n-1}} \omega v_{n-1}^2\, dx.$$

Значит, из (4.4) получим

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_{n-1}} \omega v_{n-1}^p\, dx\, d\tau \leq ct^{1-a}\Bigg[\int\limits_0^t \int\limits_{\Omega_{n-1}} \omega|v_{n-1}|^p\, dx\, d\tau\Bigg]^a \times \exp\Big(-(p-2)\frac{p}{2}(1-a)\Big(\frac{R}{4}\Big)^\gamma\Big)\Bigg[\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\Omega_{n-1}} \omega v_{n-1}^2\, dx\Bigg]^{\frac{(1-a)p}{2}}. \quad (4.5)$$

Наконец, объединяя (4.3) и (4.5) и обозначая

$$I_n = \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega v_n^2 \, dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega |v_n|^p \, dx \, d\tau,$$

приходим к неравенству

$$I_n \leq \frac{c2^{np}}{R^p} \frac{t^{1-a}}{\omega_1(R)} I_{n-1}^{1+\frac{(1-a)(p-2)}{2}}, \tag{4.6}$$

где $\omega_1(R) = \exp(-(p-2)\frac{p}{2}(1-a)(\frac{R}{4})^\gamma)$. Из (4.6) следует, что, если

$$\frac{I_0^{\frac{(1-a)(p-2)}{2}} t^{1-a}}{R^p \omega_1(R)} \leq \varepsilon_1(p, N), \tag{4.7}$$

где $\varepsilon_1(p, N)$ достаточно мало, то $I_n \to 0, \ n \to \infty$. Это означает, что, если выполнено(4.7), то $\int_{\frac{R}{2}<|x|<R} \omega u^2 \, dx = 0$, то есть $u = 0$ почти всюду в $\frac{R}{2} < |x| < R$. Найдем условие, при котором выполнено (4.7). В силу теоремы 1.3.

$$I_0 \leq c \int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega u_0^2 \, dx,$$

(4.7) выполнено, если

$$\omega_1(R) \geq c \left[\int\limits_{\mathbb{R}^N} \omega u_0^2 \, dx \right]^{\frac{(1-a)(p-2)}{2}} t^{1-a}.$$

Последнее эквивалентно утверждению теоремы. Теорема 1.4 доказана.

Литература

[1] Hong-Ming Yin, *On a p-Laplacian type of evolution system and applications to the Bean model in the type-II superconductivity theory* // Quart. Appl. Math., **59** (2001), N 1, 47–66.

[2] Hong-Ming Yin, *A degenerate evolution system modelling Bean's critical-state type-II superconductors*// Discrete and Continuous Dynamical Systems, **8** (2002), N 3, 781–794.

[3] С. П. Дегтярев, Т. А. Саникидзе, А. Ф. Тедеев, *О компактности носителя решения одной эволюционной системы, возникающей из модели Бина в теории сверхпроводимости* // Доповiдi НАНУ, (2007), N 3, 7–13.

[4] S. Zheng and C. Wang, *Large time behaviour of solutions to a class of quasilinear parabolic equations whis convection terms* // Nonlinearity, (2008), N 21, 2179–2200.

[5] S. N. Antontsev, J. I. Dias and S. I. Shmarev, *Energy methods for the free boundary problems, Applications to nonlinear PDEs abd fluid mechanics*, Boston: Birhauser, 2002.

[6] D. A. Sapronov, A. E. Shishkov, *Asymptotic behaviour of solutions of quasilinear many-dimensional parabolic equations of non-stationary diffusion-convection type* // Mathematics, **197:5** (2006), 753–790.

[7] D. Andreucci, A. F. Tedeev, *A Fujita type result for degenerate Neumann problem in domains with noncompact boundary* // J. Math. Analys. and Appl., **231** (1999), 543–567.

[8] D. Andreucci, A. F. Tedeev, *Sharp estimates and finite speed of propagation for a Neumann problem in domains narrowing at infiniry* // Advances in Differential Equations Mathematics, **5** (2000), 833–860.

[9] D. Andreucci, A. F. Tedeev, *Finite speed of propagation for thin film equations and other higher order parabolic equations with general nonlinearity* // Intertaces and Free Boundaries, **3** (2001), N 3, 233–264.

[10] L. Caffarelli, R. Kohn and L. Nirenberg, *First order interpolation inequalities with weights* // Composito Mathematica Mathematics, **53** (1984), 259–275.

[11] H. Ohya, *Existence results for some quasilinean elliptic equations involving critical Sobolev exponents* // Advances in Differential Equations, **9** (2004), N 11–12, 1339–1368.

[12] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, М.: Наука, 1967.

Сведения об авторах

Тариел Автондилович Саникидзе, Анатолий Федорович Тедеев

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины,
ул. Розы Люксембург 74,
340114 Донецк,
Украина
E-Mail: `sanikidze_tariel@mail.ru`,
`tedeev@iamm.ac.donetsk.ua`