Український математичний вісник
Том 7 **(2010)**, № 3, 355 – 368

Динамика неавтомодельных решений уравнения Доусона

Сергей А. Мельник

(*Представлена С. Я. Махно*)

Аннотация. В данной работе изучена динамика неавтомодельных решений задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения Ито в частных производных параболического типа с линейной главной частью и коэффициентом диффузии, являющимся степенной функцией с показателем степени большим нуля, но меньшим единицы. Такого типа уравнения называют уравнениями Доусона. Доказано, что с течением времени решение, порождённое финитной начальной функцией не автомодельного вида, ведёт себя аналогично автомодельному решению.

2010 MSC. 60F10, 62F05.

Ключевые слова и фразы. СДУЧП, динамика решения, задача Коши.

1. Определения и обозначения

На полном вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, \mathbf{P})$ рассмотрим задачу Коши

$$du(t,x) = au_{xx}(t,x)\,dt + bu^{\gamma}(t,x)\,dw(t), \qquad t \in [0;T],\ x \in \mathbb{R}^1,\ u(0,x) = u_0(x). \quad (1.1)$$

Здесь: $a > 0$, $b > 0$, $\gamma \in (0;1)$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $w(t)$ — стандартный винеровский процесс. Начальная функция $u_0(x)$ является неслучайной неотрицательной финитной функцией.

Определение 1.1. *Случайный процесс $u(t,x)$ называется решением задачи* (1.1), *если он согласован с винеровским процессом и с*

Статья поступила в редакцию 21.05.2010

вероятностью 1 *при каждом* $t \in [0;T]$ *и произвольной функции* $g \in W_2^1(\mathbb{R}^1)$ *удовлетворяет равенству*

$$\int u(t,x)g(x)\,dx = \int u_0(x)g(x)\,dx - a\int_0^t \int u_x(s,x)g_x(x)\,dx\,ds + b\int_0^t \int u^\gamma(s,x)g(x)\,dx\,dw(s).$$

Здесь $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ — *пространство С. Л. Соболева.*

Замечание 1.1. Если $u_0(x)$ — финитная непрерывная неотрицательная функция, то согласно [2, Remark 1.3] решение задачи (1.1) существует. Согласно [8, Theorem 1.6, Remark 1.7] при $\gamma \in [0.5;1)$ решение единственно.

Замечание 1.2. Определение 1.1 предполагает, что $u \in L_1(\Omega; C([0;T]; L_2(\mathbb{R}^1))) \bigcap L_2([0;T] \times \Omega; W_2^1(\mathbb{R}^1))$. В силу теоремы вложения пространство $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ компактно вложено в $C(\mathbb{R}^1)$. Таким образом, каждая функция из $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ почти при всех $x \in \mathbb{R}^1$ эквивалентна некоторой непрерывной функции. Именно этот непрерывный по x вариант решения задачи (1.1) мы и будем рассматривать.

В работе будут использоваться следующие обозначения.
Буквой C с индексами будут обозначаться различные константы. Там, где это важно, будем указывать от каких параметров зависит константа C. A и B — некоторые действительные числа. $\mathbf{E}$ — символ математического ожидания.

$$\mu = \frac{(\gamma+1)^2 B^2(\gamma-3)}{b^2(2A-(\gamma-2)B^2)}, \quad M = \frac{(\gamma+1)(3-\gamma)B}{2b},$$

$$Q(\beta,\alpha) = \int_0^1 \frac{h^\beta}{\sqrt{\alpha(1-h^{\gamma+1}) - \alpha^2(1-h^2)}}\,dh,$$

α — корень уравнения $Q(\gamma+1,\alpha) = 2\alpha Q(2,\alpha)$, лежащий в интервале $(0; 0.5(\gamma+1))$.

$$\varphi(x) = 0.5\lambda e^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^1,\ \lambda > 0,$$

$$\|v\|_\varphi^2 = \int v^2(y)\varphi(y)\,dy,$$

$$L_2^\varphi(\mathbb{R}^1) = \{v(y) : \|v\|_\varphi^2 < +\infty\}.$$

$$\|v\|^2 = \int v^2(y)\,dy, \quad |||v|||^{\gamma+1} = \int v^{\gamma+1}(y)\,dy,$$

$$\varrho = \frac{|||v|||^{\gamma+1}}{\|v\|^2}, \quad \text{если } \|v\| \neq 0.$$

2. Предварительные сведения

В работе [1] для задачи (1.1) построены так называемые автомодельные решения и изучено их поведение с течением времени. Автомодельные решения возникают лишь в случае, если начальная функция имеет специальный вид. В теории детерминированных уравнений нелинейной теплопроводности автомодельные решения играют важную роль, так как поведение неавтомодельных решений с течением времени становится близким к поведению автомодельных решений. Аналогичный факт устанавливается в данной работе для решений стохастической задачи (1.1). Если начальная функция u_0 не имеет автомодельной структуры, но может быть ограничена сверху и снизу двумя функциями автомодельного вида, то неавтомодельное решение остаётся ограниченным сверху и снизу двумя автомодельными решениями в течение всего времени жизни и его поведение определяется поведением автомодельных ограничителей. Типичным инструментом доказательства подобных фактов являются теоремы сравнения. Однако, известные автору теоремы сравнения для СДУЧП (см. [2–5]) требуют от коэффициентов уравнения выполнения условия Липшица. Поскольку, при $\gamma \in (0;1)$ функция u^γ не является липшицевой, возникает необходимость доказать теорему сравнения для задачи (1.1). В разделе 4 данной работы сформулирована теорема 3.1 — теорема сравнения решений задачи (1.1), порождённых различными начальными условиями. Теорема 3.2 описывает динамику неавтомодельных решений задачи (1.1). В разделе 6 приводятся доказательства этих теорем.

Приведём результаты, опубликованные в работе [1], которые поясняют структуру и динамику автомодельных решений задачи (1.1).

Теорема 2.1 ([1, Theorem 1]). *Пусть выполнены следующие условия:*

1. $2A < (\gamma-2)B^2$, $B > 0$.

2. $r(t)$ *является решением задачи*

$$r(t) = r_0 + \int\limits_0^{t\wedge\tau} A r^{2\gamma-1}(s)\,ds + B\int\limits_0^{t\wedge\tau} r^\gamma(s)\,dw(s), \quad t \in [0;T], \tag{2.1}$$

где $r_0 > 0$, τ *— момент достижения процессом* $r(t)$ *значения* 0.

3. $v(y)$ *является неотрицательным решением задачи*

$$\begin{gathered} a\mu v_{yy} + 2(\gamma+1)\varrho v^{\gamma} - 2\varrho^2 v = 0, \\ y \in \mathbb{R}^1, \quad v(y) \geq 0, \quad v(y) = v(-y), \\ v(0) = v_0 > 0, \quad v_y(0) = 0, \quad v(+\infty) = 0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

4. $$u_0(x) = \frac{r_0}{v_0} M (2\alpha)^{1/(1-\gamma)} v\Big(\frac{x}{2\alpha}\Big(\frac{v_0}{r_0 M}\Big)^{1-\gamma}\Big). \tag{2.3}$$

Тогда, решение задачи (1.1) *имеет следующий вид*

$$u(t,x) = \frac{r(t)}{v_0} M (2\alpha)^{1/(1-\gamma)} v\Big(\frac{x}{2\alpha}\Big(\frac{v_0}{r(t) M}\Big)^{1-\gamma}\Big). \tag{2.4}$$

Решения такого вида принято называть автомодельными, так как с течением времени они сохраняют пространственную форму начальной функции. Процесс $r(t)$ называют амплитудой автомодельного решения. Его поведение описывает следующая лемма.

Лемма 2.1 ([1, Remark 3]). *Пусть* $2A < (\gamma-2)B^2$, $B > 0$. *Тогда,* $\forall\, T > 0$ *существует единственное неотрицательное решение задачи* (2.1) *и это решение обладает следующими свойствами:*

1. $\boldsymbol{P}\big\{\lim\limits_{t\to+\infty} r(t) = 0\big\} = 1$.
2. *Момент достижения процессом* $r(t)$ *значения* 0 *с вероятностью* 1 *конечен.*

Замечание 2.1. Поскольку при $\gamma \in (0; 0.5]$ коэффициент дрейфа в уравнении (2.1) не определён в точке $r = 0$, то утверждения теоремы 2.1 и леммы 2.1 требуют дополнительного пояснения. Поскольку $r_0 > 0$, то $r(t) > 0$ с вероятностью 1 до момента достижения процессом $r(t)$ значения 0 и до этого момента амплитуда автомодельного решения задачи (1.1) совпадает с положительным решением задачи (2.1). Начиная с момента достижения нуля и после него полагаем амплитуду и решение задачи (1.1) тождественно равными нулю.

Функцию $v(y)$ называют пространственной формой автомодельного решения. Её свойства описывает следующая лемма.

Лемма 2.2 ([1, Lemma 7]). *Пусть* $2A < (\gamma-2)B^2$, $B > 0$. *Тогда, существует такое* $v_0 > 0$, *что задача* (2.2) *имеет единственное решение и это решение обладает следующими свойствами:*

1. *Число* $y_0 = 0.5\sqrt{0.5a\mu}v_0^{1-\gamma}Q(0,\alpha)$ *является точкой фронта функции* $v(y)$.

2. *Функция* $v(y)$ *выпукла вверх при* $y \in (-y_0; y_0)$ *и равна нулю за пределами этого интервала.*

Следствие 2.1. *Если выполнены условия теоремы* 2.1, *то*

$$\boldsymbol{P}\Big\{\lim_{t\to+\infty} u(t,x) = 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^1\Big\} = 1.$$

Таким образом, приведенные результаты свидетельствуют, что автомодельное решение задачи (1.1) за конечное, с вероятностью 1, время стягивается в точку ноль.

Для доказательства теоремы сравнения потребуются некоторые известные усредняющие и срезывающие функции [6, с. 37]. Определим срезывающую функцию следующим равенством

$$\zeta(u,h) = \begin{cases} 0, & 0 \le u \le 0.5h, \\ k\int_{3-4uh^{-1}}^{1} \exp(-\frac{1}{1-r^2})\,dr, & 0.5h < u \le h, \\ 1, & h < u. \end{cases}$$

Здесь $k = (\int_{-1}^{1} \exp(-\frac{1}{1-r^2})\,dr)^{-1}$. Функция $\zeta(u,h)$ обладает следующими свойствами:

1. $0 \le \zeta(u,h) \le 1$.

2. $\zeta(u,h)$ бесконечно дифференцируема по u при каждом $h > 0$, причем $|\zeta_u(u,h)| \le 4k(eh)^{-1}$. Это означает, что функция липшицева по переменной u.

3. $\lim\limits_{h\to 0} \zeta(u,h) = \begin{cases} 0, & u = 0, \\ 1, & u > 0. \end{cases}$

Определим срезанную функцию $\sigma(u,h) = \zeta(u,h)u^\gamma,\ u \ge 0,\ h > 0$. Функция $\sigma(u,h)$ обладает следующими свойствами.

1. $0 \le \sigma(u,h) \le u^\gamma$.

2. $0 \le \sigma(u,h) \le K(1+u),\ K = \gamma^\gamma(1-\gamma)^{1-\gamma}$, т.е. функция линейно ограничена по u.

3. Функция $\sigma(u,h)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной u с константой $L(h) = h^{\gamma-1}(\gamma 2^{1-\gamma} + 4Ke^{-1})$.

4. $\sigma(u,h)$ непрерывно дифференцируема по $u \in (0;+\infty)$ при каждом $h > 0$.

3. Основные результаты

Теорема 3.1. *Пусть* $u^{(i)}(t,x),\ i = 1,2$ *— единственные решения задачи* (1.1)*, соответствующие начальным функциям* $u_0^{(i)}(x),\ i = 1,2$. *Если начальные функции таковы, что* $u_0^{(i)} \in L_2(\mathbb{R}^1),\ i = 1,2$ *и* $0 \le u_0^{(1)}(x) \le u_0^{(2)}(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^1$*, то*

$$\boldsymbol{P}\{0 \le u^{(1)}(t,x) \le u^{(2)}(t,x),\ \forall\, t \in [0;T],\ x \in \mathbb{R}^1\} = 1.$$

Следствие 3.1. *Неотрицательное решение задачи* (1.1)*, описанное в замечании* 2.1*, единственно.*

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1, а также следующие условия:*

1. $u^{(i)}(t,x),\ i = 1,2$ *имеют вид* (2.4) *и соответствуют начальным функциям* $u_0^{(i)}(x),\ i = 1,2$ *вида*(2.3)*.*
2. $u_0(x)$ *— непрерывная финитная функция такая, что* $u_0^{(1)}(x) \le u_0(x) \le u_0^{(2)}(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^1$ *и* $u(t,x)$ *— соответствующее ей решение задачи* (1.1)*.*

Тогда

$$\boldsymbol{P}\{0 \le u^{(1)}(t,x) \le u(t,x) \le u^{(2)}(t,x),\ \forall\, t \in [0;T],\ x \in \mathbb{R}^1\} = 1$$

и

$$\boldsymbol{P}\big\{\lim_{t\to+\infty} u(t,x) = 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^1\big\} = 1.$$

4. Вспомогательные результаты

Обозначим $u(t,x,h)$ решение следующей задачи

$$du(t,x,h) = au_{xx}(t,x,h)\,dt + b\sigma(u(t,x,h),h)\,dw(t),$$
$$t \in [0;T],\ x \in \mathbb{R}^1,\ u(0,x,h) = u_0(x). \quad (4.1)$$

Целью данного раздела является: доказать возможность предельного перехода в уравнении (4.1) при $h \to 0$. Для достижения этой цели нам потребуются априорные оценки решения задачи (4.1) в некоторых функциональных пространствах.

Замечание 4.1. Поскольку функция $\sigma(u,h)$ линейно ограничена и удовлетворяет условию Липшица по переменной u, то согласно [7, с. 93, теорема 2.1] при любой $u_0 \in L_2(\mathbb{R}^1)$ существует единственное сильное решение задачи (4.1), которое с вероятностью 1 непрерывно по $(t,x) \in (0;+\infty) \times \mathbb{R}^1$. Непрерывность по x следует из упомянутой в замечании 3.1 теоремы вложения.

Лемма 4.1. *Если* $\|u_0\| < +\infty$, *то*

$$\boldsymbol{E} \sup_{0 \le t \le T} \|u(t,\cdot,h)\|_\varphi^2 \le C_1(K,\lambda,a,b,T,\|u_0\|_\varphi),$$

$$\boldsymbol{E} \int_0^T \|u_x(s,\cdot,h)\|_\varphi^2 \, ds \le C_2.$$

Доказательство. Применив формулу Ито, получаем равенство

$$\begin{aligned} \|u(t,\cdot,h)\|_\varphi^2 - \|u_0\|_\varphi^2 = 2a\Bigg[&-\int_0^t \|u_x(s,\cdot,h)\|_\varphi^2 \, ds \\ &+ \lambda \int_0^t \int \operatorname{sign}(x)\varphi(x)u(s,x,h)u_x(s,x,h)\,dx\,ds \Bigg] \\ &+ b^2 \int_0^t \int \varphi(x)\sigma^2(u(s,x,h),h)\,dx\,ds \\ &+ 2b \int_0^t \int \varphi(x)u(s,x,h)\sigma(u(s,x,h),h)\,dx\,dw(s) \\ &= 2aJ_1 + b^2 J_2 + 2bJ_3. \end{aligned}$$

С помощью неравенства Гёльдера и неравенства Юнга получаем

$$\begin{aligned} &\left| \int \operatorname{sign}(x)\varphi(x)u(s,x,h)u_x(s,x,h)\,dx \right| \\ &\qquad \le 0.5\delta^{-1}\|u(s,\cdot,h)\|_\varphi^2 + 0.5\delta\|u_x(s,\cdot,h)\|_\varphi^2, \quad 0 < \delta < 2/\lambda. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$J_1 \le (0.5\delta\lambda - 1) \int_0^t \|u_x(s,\cdot,h)\|_\varphi^2 \, ds + 0.5\lambda\delta^{-1} \int_0^t \|u(s,\cdot,h)\|_\varphi^2 \, ds.$$

Так как $\sigma^2(u,h) \le K(1+u^2)$, то

$$J_2 \le K\biggl(t + \int\limits_0^t \|u(s,\cdot,h)\|_\varphi^2\,ds\biggr).$$

Тогда

$$\|u(t,\cdot,h)\|_\varphi^2 + a(2-\delta\lambda)\int\limits_0^t \|u_x(s,\cdot,h)\|_\varphi^2\,ds$$
$$\le \|u_0\|_\varphi^2 + \Bigl(\frac{a\lambda}{\delta} + Kb^2\Bigr)\int\limits_0^t \|u(s,\cdot,h)\|_\varphi^2\,ds + Kb^2 t + 2bJ_3.$$

Так как $2-\delta\lambda > 0$, то

$$\mathbf{E}\sup_{0\le t\le T}\|u(t,\cdot,h)\|_\varphi^2 \le$$
$$\|u_0\|_\varphi^2 + \Bigl(\frac{a\lambda}{\delta} + Kb^2\Bigr)\int\limits_0^T \mathbf{E}\sup_{0\le s\le t}\|u(s,\cdot,h)\|_\varphi^2\,ds$$
$$+ Kb^2 T + 2b\mathbf{E}\sup_{0\le t\le T}|J_3|. \quad (4.2)$$

Оценим последнее слагаемое с помощью неравенства Буркхольдера:

$$\mathbf{E}\sup_{0\le t\le T}\biggl|\int\limits_0^t\int \varphi(x)u(s,x,h)\sigma(u(s,x,h),h)\,dx\,dw(s)\biggr|$$
$$\le 3\mathbf{E}\Biggl(\int\limits_0^T\biggl(\int \varphi(x)u(s,x,h)\sigma(u(s,x,h),h)\,dx\biggr)^2 ds\Biggr)^{0.5}$$
$$\le 3\mathbf{E}\Biggl(\int\limits_0^T \|u(s,\cdot,h)\|_\varphi^2\int \varphi(x)\sigma^2(u(s,x,h),h)\,dx\,ds\Biggr)^{0.5}$$
$$\le 3\mathbf{E}\Biggl[\bigl(\sup_{0\le t\le T}\|u(t,\cdot,h)\|_\varphi^2\bigr)^{0.5}\cdot\Biggl(\int\limits_0^T\int \varphi(x)\sigma^2(u(s,x,h),h)\,dx\,ds\Biggr)^{0.5}\Biggr]$$
$$\le \frac{3\delta}{2}\mathbf{E}\sup_{0\le t\le T}\|u(t,\cdot,h)\|_\varphi^2 + \frac{3}{2\delta}\mathbf{E}\int\limits_0^T\int \varphi(x)\sigma^2(u(s,x,h),h)\,dx\,ds$$

$$\leq \frac{3\delta}{2}\mathbf{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t,\cdot,h)\|_\varphi^2 + \frac{3K}{2\delta}T + \frac{3K}{2\delta}\int_0^T \mathbf{E}\sup_{0\leq s\leq t}\|u(s,\cdot,h)\|_\varphi^2\,dt,$$

где $0<\delta<\min\{(3b)^{-1}, 2\lambda^{-1}\}$. Подставив в (4.2), получаем

$$(1-3b\delta)\mathbf{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t,\cdot,h)\|_\varphi^2 \leq \|u_0\|_\varphi^2 + \Big(b^2+\frac{3b}{\delta}\Big)KT$$
$$+\Big(\frac{a\lambda}{\delta}+Kb^2+\frac{3b}{\delta}K\Big)\int_0^T \mathbf{E}\sup_{0\leq s\leq t}\|u(s,\cdot,h)\|_\varphi^2\,dt.$$

Применение леммы Гронуолла даёт необходимую оценку

$$\mathbf{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|u(t,\cdot,h)\|_\varphi^2 \leq C_1.$$

Вторая оценка вытекает из положительности числа $a(2-\delta\lambda)$ и полученной выше оценки. Лемма 4.1 доказана. □

Лемма 4.2. *Если* $\|u_0\|<+\infty$ *и* $\sup_{x\in\mathbb{R}^1} u_0(x)<+\infty$, *то*

$$\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{x\in\mathbb{R}^1}\boldsymbol{E}|u(t,x,h)|^2 \leq C_3\big(K,b,T,\sup_{x\in\mathbb{R}^1}u_0(x)\big),$$

$$\sup_{0\leq t\leq T}\sup_{x\in\mathbb{R}^1}\boldsymbol{E}|u(t,x,h)|^{2\gamma} \leq C_4\big(K,a,b,T,\sup_{x\in\mathbb{R}^1}u_0(x)\big).$$

Доказательство. Обозначим $p(t,z)=\frac{1}{\sqrt{4\pi at}}\exp(-\frac{z^2}{4at}),\ t>0,\ z\in\mathbb{R}^1$. Согласно [2, с. 337, Proposition 3.2], уравнение (4.1) можно записать в такой форме

$$u(t,x,h)=\int p(t,x-y)u_0(y)\,dy$$
$$+\,b\int_0^t\int p(t-s,x-y)\sigma(u(s,y,h),h)\,dy\,dw(s). \quad (4.3)$$

Это равенство имеет место при всех $t\in[0;T],\ x\in\mathbb{R}^1$ с вероятностью 1. Тогда,

$$\mathbf{E}u^2(t,x,h)\leq\Big(\int p(t,x-y)u_0(y)\,dy\Big)^2$$
$$+\,2K^2b^2\bigg(t+\int_0^t\mathbf{E}\Big(\int p(t-s,x-y)u(s,y,h)\,dy\Big)^2ds\bigg).$$

Оценим первое слагаемое

$$\int p(t,x-y)u_0(y)\,dy \le \sup_{x\in\mathbb{R}^1} u_0(x) \int p(t,x-y)\,dy = \sup_{x\in\mathbb{R}^1} u_0(x).$$

Оценим второе слагаемое

$$\mathbf{E}\left(\int p(t-s,x-y)u(s,y,h)\,dy\right)^2$$
$$\le \int\int p(t-s,x-y)p(t-s,x-z)\left[\mathbf{E}u^2(s,y,h)+\mathbf{E}u^2(s,z,h)\right]\,dy\,dz$$
$$\le \sup_{x\in\mathbb{R}^1} \mathbf{E}u^2(s,x,h).$$

Тогда

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^1} \mathbf{E}u^2(t,x,h) \le \big(\sup_{x\in\mathbb{R}^1} u_0(x)\big)^2$$
$$+ 2K^2b^2t + 2K^2b^2 \int_0^t \sup_{x\in\mathbb{R}^1} \mathbf{E}u^2(s,x,h)\,ds.$$

По лемме Гронуолла получаем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^1} \mathbf{E}u^2(t,x,h) \le \big[\big(\sup_{x\in\mathbb{R}^1} u_0(x)\big)^2 + 2K^2b^2t\big]\exp(2K^2b^2t)$$

и

$$\sup_{t\in[0;T]}\sup_{x\in\mathbb{R}^1} \mathbf{E}u^2(t,x,h) \le \big[\big(\sup_{x\in\mathbb{R}^1} u_0(x)\big)^2 + 2K^2b^2T\big]\exp(2K^2b^2T)$$
$$= C_3\big(K,b,T,\sup_{x\in\mathbb{R}^1} u_0(x)\big).$$

Поскольку $u^{2\gamma} \le K(1+u^2)$, то

$$\sup_{t\in[0;T]}\sup_{x\in\mathbb{R}^1} \mathbf{E}u^{2\gamma}(t,x,h) \le K\big(1+\sup_{t\in[0;T]}\sup_{x\in\mathbb{R}^1} \mathbf{E}u^2(t,x,h)\big)$$
$$\le K(1+C_3) = C_4.$$

Лемма 4.2 доказана. □

Полученные в лемме 4.2 оценки не будут нами использоваться далее и представлены здесь как самостоятельный результат.

Лемма 4.3. *Если выполнены условия леммы* 4.1*, то*

$$\sup_{|t_2-t_1|\le\varepsilon} \boldsymbol{E}\|u(t_2,\cdot,h)-u(t_1,\cdot,h)\|_\varphi^2 \le C_5\varepsilon, \quad C_5 = a\lambda\delta^{-1}C_1+Kb^2(C_1+1).$$

Доказательство. Применив формулу Ито, получаем

$$\mathbf{E}\|u(t_2,\cdot,h)-u(t_1,\cdot,h)\|_\varphi^2 = 2a\bigg[-\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{E}\|u_x(s,\cdot,h)\|_\varphi^2\,ds$$

$$+\lambda\mathbf{E}\int_{t_1}^{t_2}\int \operatorname{sign}(x)\varphi(x)u(s,x,h)u_x(s,x,h)\,dx\,ds\bigg]$$

$$+b^2\mathbf{E}\int_{t_1}^{t_2}\int \varphi(x)\sigma^2(u(s,x,h),h)\,dx\,ds.$$

Оценивая слагаемые как в доказательстве леммы 4.1, получаем неравенство

$$\mathbf{E}\|u(t_2,\cdot,h)-u(t_1,\cdot,h)\|_\varphi^2$$

$$\leq (a\lambda\delta^{-1}+Kb^2)\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{E}\|u(s,\cdot,h)\|_\varphi^2\,ds + Kb^2(t_2-t_1).$$

Применив оценку из леммы 4.1, окончательно получаем

$$\sup_{|t_2-t_1|\leq\varepsilon}\mathbf{E}\|u(t_2,\cdot,h)-u(t_1,\cdot,h)\|_\varphi^2 \leq C_5\varepsilon.$$

Лемма 4.3 доказана. □

Следствие 4.1. *Если выполнены условия леммы* 4.1, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{h\to 0}\sup_{|t_2-t_1|\leq\varepsilon}\boldsymbol{P}\left\{\|u(t_2,\cdot,h)-u(t_1,\cdot,h)\|_\varphi^2>\epsilon\right\}=0$$

при любом $\epsilon>0$.

Справедливость утверждения следствия 4.1 вытекает из неравенства Чебышева и леммы 4.3.

Полученные оценки позволяют перейти к пределу в уравнении (4.1) и показать, что предельный процесс является слабым (в стохастическом смысле) решением задачи (1.1).

Лемма 4.4. *Пусть* $\|u_0\|<+\infty$ *и* $u(t,x,h)$ *является решением задачи* (4.1). *Тогда, существует подпоследовательность значений переменной* $h\to 0$ (*вновь обозначаемая* h) *такая, что* $u(t,x,h)$ *при всех* $t\in[0;T]$ *и всех* $x\in\mathbb{R}^1$ *с вероятностью* 1 *сходится к слабому* (*в стохастическом смысле*) *решению задачи* (1.1).

Доказательство. Из оценок, полученных в лемме 4.1, следует, что последовательность функций $\sqrt{\varphi(x)}u(t,x,h)$ при $h \to 0$ слабо компактна в пространстве $L_1\left(\Omega, C\left([0;T]; L_2(\mathbb{R}^1)\right)\right) \cap L_2\left(\Omega \times [0;T]; W_2^1(\mathbb{R}^1)\right)$. Выделим из неё подпоследовательность (которую снова будем обозначать $\sqrt{\varphi(x)}u(t,x,h)$), слабо сходящуюся в указанном пространстве. Теперь используем известный результат А. В. Скорохода о предельном переходе [9, с. 13 теорема, с. 17 замечание 2]. Из доказанной выше леммы 4.1 следует:

$$\sup_{h\geq 0}\sup_{0\leq t\leq T}\mathbf{P}\left\{\|u(t,\cdot,h)\|_{\varphi}^2 > \varepsilon\right\} \leq C_1\varepsilon^{-1}.$$

Значит,

$$\lim_{\varepsilon\to+\infty}\sup_{h\geq 0}\sup_{0\leq t\leq T}\mathbf{P}\left\{\|u(t,\cdot,h)\|_{\varphi}^2 > \varepsilon\right\} = 0$$

и выполнено условие (6.2) [9, с. 17]. Утверждение леммы 4.3 означает, что выполнено условие (6.1) [9, с. 13]. Тогда, согласно упомянутой теореме А. В. Скорохода существует подпоследовательность значений переменной h и вероятностное пространство $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Im}, \tilde{\mathbf{P}})$ с винеровским процессом $\tilde{w}(t)$ такие, что последовательность $\sqrt{\varphi(x)}\tilde{u}(t,x,h)$ при каждом $t \in [0;T]$, $\tilde{\mathbf{P}}$ — почти наверное слабо сходится в пространстве $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ к некоторому пределу $\sqrt{\varphi(x)}\tilde{u}(t,x)$. При этом, процессы $\tilde{u}(t,x,h)$ и $u(t,x,h)$ имеют одинаковые конечномерные распределения. Согласно упомянутой в замечании 2.1 теореме вложения, пространство $W_2^1(\mathbb{R}^1)$ компактно вложено в пространство $C(\mathbb{R}^1)$. Значит, построенная подпоследовательность $\tilde{u}(t,x,h)$ сходится к $\tilde{u}(t,x)$ при всех $t \in [0;T]$, $x \in \mathbb{R}^1$, $\tilde{\mathbf{P}}$ — почти наверное.

Полученные результаты позволяют нам перейти к пределу в уравнении (4.3). Поскольку функция $\sigma(u,h)$ непрерывна по (u,h), то $\lim_{h\to 0}\sigma(\tilde{u}(t,x,h),h) = \tilde{u}^{\gamma}(t,x)$ при всех $t \in [0;T]$, $x \in \mathbb{R}^1$ с вероятностью 1. Обоснуем возможность предельного перехода под знаком стохастического интеграла в уравнении (4.3).

Обозначим

$$I = \int \varphi(x)\left(\int\limits_0^t \int p(t-s,x,y)\left(\sigma(\tilde{u}(s,y,h),h) - \tilde{u}^{\gamma}(s,y)\right)dy\,d\tilde{w}(s)\right)^2 dx,$$

$$U = \sup_{h\geq 0}\sup_{0\leq s\leq T}\|\tilde{u}(s,\cdot,h)\|_{\varphi}^2.$$

Для любых $\epsilon > 0$, $N > 0$ имеет место неравенство

$$\tilde{\mathbf{P}}\{I > \epsilon\} \leq \tilde{\mathbf{P}}\{U > N\} + \epsilon^{-1}\tilde{\mathbf{E}}\{I | U \leq N\}. \tag{4.4}$$

В силу леммы 4.1 и неравенства Чебышева $\lim_{N\to+\infty}\tilde{\mathbf{P}}\{U > N\} = 0$. Для второго слагаемого в правой части неравенства (4.4) получаем

$$\tilde{\mathbf{E}}\{I|U \le N\} \le \int \int_0^t \int p(t-s,x,y)\varphi(x) \\ \times \tilde{\mathbf{E}}\{(\sigma(\tilde{u}(s,y,h),h) - \tilde{u}^{\gamma}(s,y))^2|U \le N\}\,dy\,ds\,dx.$$

В силу того, что $U \le N$, $\sigma(u,h) \le K(1+u)$ и $\sigma(u,h)$ непрерывна по (u,h) получаем, что подынтегральная функция равномерно интегрируема. Тогда, согласно теореме Лебега о мажорируемой сходимости можно перейти к пределу под знаком тройного интеграла и под знаком математического ожидания. В итоге: $\lim_{h\to 0}\tilde{\mathbf{E}}\{I|U \le N\} = 0$ при всех $t \in [0;T]$. Перейдём в неравенстве (4.4) к пределу вначале по $h \to 0$, а затем по $N \to +\infty$ и получим $\lim_{h\to 0} I = 0$ при всех $t \in [0;T]$ с вероятностью 1. Это даёт нам возможность перейти к пределу по $h \to 0$ в уравнении (4.3) и убедиться, что предельный процесс $\tilde{u}(t,x)$ также является решением уравнения (4.3) и, следовательно, слабым решением задачи (1.1). Лемма 4.46 доказана. $\square$

5. Доказательство теоремы 3.1 и теоремы 3.2

Доказательство теоремы 3.1. Теперь доказательство теоремы сравнения не представляет трудности. Пусть $0 \le u_0^{(1)}(x) \le u_0^{(2)}(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^1$ и $u^{(i)}(t,x,h),\ i = 1,2$ — соответствующие решения задачи (4.1). Тогда, согласно теореме 5 [3]

$$\mathbf{P}\left\{0 \le u^{(1)}(t,x,h) \le u^{(2)}(t,x,h),\ \forall t \ge 0,\ x \in \mathbb{R}^1,\ h > 0\right\} = 1.$$

Как показано в лемме 4.4, существует подпоследовательность такая, что

$$\tilde{\mathbf{P}}\left\{\lim_{h\to 0}\tilde{u}^{(i)}(t,x,h) = \tilde{u}^{(i)}(t,x),\ \forall t \ge 0,\ \ x \in \mathbb{R}^1\right\} = 1,\ i = 1,2.$$

Здесь $\tilde{u}^{(i)}(t,x)$ — решения задачи (1.1), соответствующие начальным функциям $u_0^{(i)}(x),\ i = 1,2$. Перейдя к пределу по выделенной подпоследовательности получаем, что неравенство $0 \le \tilde{u}^{(1)}(t,x) \le \tilde{u}^{(2)}(t,x)$ справедливо при всех $t \ge 0,\ x \in \mathbb{R}^1$ с вероятностью 1. Поскольку, согласно замечанию 1.1, задача (1.1) имеет сильное (в стохастическом смысле) решение и конечномерные распределения процессов $\tilde{u}(t,x)$ и $u(t,x)$ совпадают, то аналогичное неравенство справедливо и для сильных решений. Теорема 3.1 доказана. $\square$

Следствие 5.1. *Задача* (1.1) *имеет единственное решение.*

Справедливость утверждения теоремы 3.2 непосредственно вытекает из теоремы 3.1 и следствия 2.1.

6. Заключение

Теорема 3.2 показывает, что непрерывная неотрицательная начальная функция $u_0(x)$ с ограниченным носителем порождает решение задачи (1.1), обладающее аналогичными свойствами. Решение существует как угодно долго и с вероятностью 1 угасает с течением времени, стягиваясь в точку 0. Время угасания с вероятностью 1 конечно. Сценарий поведения неавтомодельного решения аналогичен поведению автомодельного решения.

Литература

[1] S. A. Melnik, *The decomposition of solution of quasilinear stochastic parabolic equation with a weak source* // Theory of stochastic processes, **13(29)** (2007), N 3, 55–65.

[2] L. Mytnik, E. Perkins, A. Sturm, *On pathwise uniqueness for stochastic heat equation with non-lipschitz coefficients* // The annals of probability, **34** (2006), N 5, 1910–1959.

[3] R. C. Dalang, D. Khoshnevisan, C. Mueller, D. Nualart, Y. Xiao, *A minicourse of SPDE*, Salt Lake City, Utah., 2006, 36 p.

[4] L. Denis, A. Matoussi, L. Stoica, *Maximum principle and comparison theorem for quasi-linear SPDE's* // Electronic Journal of Probability, **14** (2009), N 19, 500–530.

[5] S. Assing, *Comparison of system of SPDE*, assing@mathematik.univ-bielefeld.de.

[6] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Москва, Наука, 1985, 495 с.

[7] E. Pardoux, *Equations aux derivees partielles stochastiques non lineaires monotones*, These doct. math., Univ. Paris. Sud., 1975, 520 p.

[8] A. Sturm, *On convergens of population processes in random environments to the stochastic heat equation with colored noise* // Electronic Journal of Probability, **8** (2003), N 6, 1–39.

[9] А. В. Скороход, *Исследования по теории случайных процессов*, Издательство Киевского университета, 1961, 216 с.

Сведения об авторах

Сергей Анатольевич Мельник

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
ул. Розы Люксембург, 74
83114, Донецк
Украина
E-Mail: `melnik@iamm.ac.donetsk.ua`