Український математичний вісник
Том 7 **(2010)**, № 3, 331 – 354

Лінійна система диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з відхиленням аргументу і точкою звороту

Інна Г. Ключник, Геннадій В. Завізіон

(*Представлена М. О. Перестюком*)

Анотація. Для системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з лінійним відхиленням аргументу і точкою звороту, одержані умови, при яких її розв'язки — це розв'язки системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних. Матриці системи диференціальних рівнянь мають асимптотичні розвинення при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ з коефіцієнтами голоморфними при $|x| \leq x_0$. А також доведено існування і нескінченну диференційовність розв'язку системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з лінійним відхиленням аргументу при наявності точки звороту.

2010 MSC. 34A34.

Ключові слова та фрази. Лінійна система, малий параметр, відхилення аргументу, точка звороту.

Вступ

Основними методами побудови асимптотичних розв'язків сингулярно збурених лінійних диференціальних рівнянь з точкою звороту, в яких використовуються функції Ейрі, є методи Р. Лангера [1, 2], В. Вазова [3, 4], А. А. Дородніцина [5], Цваана–Федорюка [6], регуляризації [7], зшивання і узгодження асимптотик [8–10]. За допомогою функцій сплеска в [11] побудовано асимптотичний розв'язок сингулярно збуреного диференціального рівняння другого порядку з точкою звороту, а в [12] розроблений асимптотичний метод інтегрування системи диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами з точкою звороту в елементарних функціях.

Вперше в [13] розглянута лінійна система диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з точкою звороту, для

Стаття надійшла в редакцію 30.11.2009

ISSN 1810 – 3200.

якої запропоновано асимптотичний метод інтегрування. А в [14] для розглядуваної системи доведено існування і нескінченну диференційовність матричних функцій, які мають асимптотичні розвинення формальних рядів, одержаних запропонованим асимптотичним методом. Використовуючи асимптотичний метод інтегрування [13] в [15] розробляється асимптотичний метод інтегрування системи лінійних диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних при наявності кратної точки звороту. В [16] вперше розглядається лінійна система диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних, що містить квадратну матрицю порядку більше двох, для якої виконуються умови задачі з простою точкою звороту. За допомогою нескінченно диференційовної матриці перетворення розглядувана система зводиться до системи простішого вигляду з нескінченно диференційовними за параметром матрицями.

Вперше розглядається система диференціальних рівнянь з малим параметром при похідній з лінійним відхиленням аргументу з точкою звороту. Для такої системи одержані умови, при яких розв'язками розглядуваної системи з відхиленням аргументу є розв'язки системи диференціальних рівнянь з малим параметром при похідній, в якій одна із матриць подібна матриці Ейрі $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{smallmatrix}\right)$, а інші матриці мають асимптотичні розвинення на компакті $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ з коефіцієнтами голоморфними при $|x| \leq x_0$. За допомогою отриманої системи диференціальних рівнянь з малим параметром при похідній з відхиленням аргументу і точкою звороту одержано асимптотичний метод інтегрування і доведено існування і нескінченну диференційовність матричної функції, яка має асимптотичним розвинення при $\varepsilon \to 0$ формальний ряд, одержаний запропонованим в [13] асимптотичним методом.

1. Система рівнянь з відхиленням аргументу

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу вигляду

$$\begin{aligned} y_1' = A_1(x)y_1(x,\varepsilon) + A_2(x)y_2(x,\varepsilon) + A_3(x)y_1((1-\varepsilon^2\Delta)x,\varepsilon) \\ + A_4(x)y_2((1-\varepsilon^2\Delta)x,\varepsilon), \quad (1.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon y_2' = (B_0(x) + \varepsilon B_1(x))y_2(x,\varepsilon) + \varepsilon B_2(x)y_1(x,\varepsilon) \\ + \varepsilon B_3(x)y_1((1-\varepsilon^2\Delta)x,\varepsilon) + (B_4(x) + \varepsilon B_5(x))y_2((1-\varepsilon^2\Delta)x,\varepsilon), \end{aligned}$$

де $y_1 \in \mathbb{R}^p$, $y_2 \in \mathbb{R}^2$; $A_i(x)$, $B_j(x)$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{0,5}$ — голоморфні матриці за дійсною змінною x при $|x| \leq x_0$; ε — малий дійсний параметр; Δ — дійсна додатня стала.

Припустимо виконання умов:

1) визначник матриці $\det C_{220}(x)\neq 0$ при $x \neq 0$, де матриця $C_{220}(x)$ визначається рівністю
$$C_{220}(x) = B_0(x) + B_4(x);$$

2) $\det C_{220}(0) = 0$ і $C_{220}(0)$ подібна жордановій формі $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$;

3) $\frac{d}{dx}(\det C_{220}(x))|_{x=0} \neq 0$.

Запишемо систему рівнянь (1.1) у вигляді однієї системи диференціальних рівнянь з лінійним відхиленням аргументу блочного вигляду з залежною від ε і виродженою при $\varepsilon = 0$ матрицею при похідній. Застосовуючи ідеї із [17], для цієї системи отримані умови, при яких розв'язками одержаної системи з відхиленням аргументу є розв'язки системи диференціальних рівнянь з залежною від ε і виродженою при $\varepsilon = 0$ матрицею при похідній з точкою звороту.

Вірною є теорема.

Теорема 1.1. *Нехай матриці* $A_i(x)$, $B_j(x)$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{0,5}$ *голоморфні в області* $|x| \le x_0$, $x \in \mathbb{R}$, *і можна вказати* ε_0 *таке, що виконуються нерівності*
$$\|A_i(x)\|_0 \le \alpha_i, \quad \|B_j(x)\|_0 \le \beta_j, \qquad i = \overline{1,4},\ j = \overline{0,5}, \tag{1.2}$$
$$\varepsilon_0(\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))\Delta x_0 e^{\varepsilon_0(\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2))\Delta x_0+1} < 1, \tag{1.3}$$
а також справедливі умови 1)–3). *Тоді при* $|x| \le x_0$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, $x \in \mathbb{R}$ *кожен розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних вигляду*
$$\begin{aligned} y_1' &= C_{11}(x,\varepsilon)y_1(x,\varepsilon) + C_{12}(x,\varepsilon)y_2(x,\varepsilon), \\ \varepsilon y_2' &= C_{21}(x,\varepsilon)y_1(x,\varepsilon) + C_{22}(x,\varepsilon)y_2(x,\varepsilon) \end{aligned} \tag{1.4}$$
є розв'язком системи диференціальних рівнянь із малим параметром при частині похідних з відхиленням аргументу (1.1). *Знайдуться матриці* $C_{ml}(x,\varepsilon)$, $m,l = \overline{1,2}$, *такі, що мають місце розвинення*
$$C_{ml}(x,\varepsilon) = C_{ml0}(x) + \varepsilon C_{ml1}(x) + \dots + \varepsilon^k C_{mlk}(x) + \varepsilon^{k+1} C_{ml,k+1}(x,\varepsilon). \tag{1.5}$$
Матриці $C_{mli}(x)$, $C_{ml,k+1}(x,\varepsilon)$, $i = \overline{0,k}$, $m,l = \overline{1,2}$ *голоморфні при* $|x| \le x_0$ *і матриці* $C_{ml,k+1}(x,\varepsilon)$ *мають неперервну похідну за змінною* ε *при* $|x| \le x_0$, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$. *Кожен ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n C_{mln}(x)$, $m,l = \overline{1,2}$

є рівномірним при $|x| \le x_0$ *асимптотичним розвиненням при* $\varepsilon \to 0$ *і* $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ *відповідної матриці* $C_{ml}(x,\varepsilon)$, $m,l = \overline{1,2}$, *і мають місце нерівності*

$$\left\| C_{ml}(x,\varepsilon) - \sum_{n=0}^{k} \varepsilon^n C_{mln}(x) \right\| \le M|\varepsilon|^{k+1}, \quad |x| \le x_0,\ |\varepsilon| \le \varepsilon_0,\ m,l = \overline{1,2}. \tag{1.6}$$

Доведення. Систему (1.1) перепишемо у вигляді

$$K(\varepsilon)y' = (F_0(x) + \varepsilon F_1(x))y(x,\varepsilon) + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x))y((1-\varepsilon^2\Delta)x,\varepsilon), \tag{1.7}$$

де $y \in \mathbb{R}^{p+2}$ і має вигляд

$$y(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} y_1(x,\varepsilon) \\ y_2(x,\varepsilon) \end{pmatrix};$$

блочні матриці $K(\varepsilon)$, $F_i(x)$, $G_i(x)$, $i = \overline{0,1}$ мають вигляд

$$K(\varepsilon) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & \varepsilon I_2 \end{pmatrix},$$

$$F_0(x) = \begin{pmatrix} A_1(x) & A_2(x) \\ 0 & B_0(x) \end{pmatrix}, \quad F_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_2(x) & B_4(x) \end{pmatrix},$$

$$G_0(x) = \begin{pmatrix} A_3(x) & A_4(x) \\ 0 & B_4(x) \end{pmatrix}, \quad G_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_3(x) & B_5(x) \end{pmatrix};$$

I_p — одинична матриця p-го порядку.

При $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$ матриця $\Omega_0^x\left(\frac{K_1(\varepsilon)C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$, яка визначається рівністю

$$\begin{aligned}\Omega_0^x\Big(\frac{K_1(\varepsilon)C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\Big) &= I_{p+2} + \frac{K_1(\varepsilon)}{\varepsilon}\int_0^x C(s,\varepsilon)\,ds \\ &+ \frac{K_1(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\int_0^x C(s,\varepsilon)K_1(\varepsilon)\int_0^s C(s_1,\varepsilon)\,ds_1\,ds + \cdots \\ &+ \frac{K_1(\varepsilon)}{\varepsilon^n}\int_0^x C(s,\varepsilon)K_1(\varepsilon)\int_0^s C(s_1,\varepsilon)K_1(\varepsilon)\cdots \\ &\times K_1(\varepsilon)\int_0^{s_{n-2}} C(s_{n-1},\varepsilon)\,ds_{n-1}\cdots ds_1\,ds + \cdots,\end{aligned} \tag{1.8}$$

є матрицантом системи диференціальних рівнянь

$$K(\varepsilon)y' = C(x,\varepsilon)y(x,\varepsilon), \tag{1.9}$$

де блочні матриці $C(x,\varepsilon)$, $K_1(\varepsilon)$ мають вигляд

$$C(x,\varepsilon) = (C_{ml}(x,\varepsilon)), \quad K_1(\varepsilon) = \{\varepsilon I_p, I_2\}, \quad m,l = \overline{1,2},$$

причому матриця $C(x,\varepsilon)$ визначена при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$. Зауважимо, що ряд (1.8) збігається рівномірно по x і ε при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$.

Загальний розв'язок рівняння (1.9) при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$ визначається за формулою

$$y(x,\varepsilon) = \Omega_0^x\Big(\frac{K_1(\varepsilon)C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\Big)y_0, \tag{1.10}$$

де $y_0 \in \mathbb{R}^{p+2}$ і не залежить від x. Функція (1.10) буде задовольняти рівнянню (1.7) при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$, коли виконується рівність

$$\begin{aligned} K(\varepsilon)\frac{dy}{dx} &= C(x,\varepsilon)\Omega_0^x\Big(\frac{K_1(\varepsilon)C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\Big)y_0 \\ &= (F_0(x) + \varepsilon F_1(x))\Omega_0^x\Big(\frac{K_1(\varepsilon)C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\Big)y_0 \\ &\quad + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x))\Omega_0^{(1-\varepsilon^2\Delta)x}\Big(\frac{K_1(\varepsilon)C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\Big)y_0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Якщо при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$ виконується наступна рівність:

$$\begin{aligned} &C(x,\varepsilon)\Omega_0^x\Big(\frac{K_1(\varepsilon)C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\Big) \\ &\qquad = (F_0(x) + \varepsilon F_1(x))\Omega_0^x\Big(\frac{K_1(\varepsilon)C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\Big) \\ &\qquad\quad + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x))\Omega_0^{(1-\varepsilon^2\Delta)x}\Big(\frac{K_1(\varepsilon)C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\Big), \end{aligned} \tag{1.12}$$

то рівність (1.11) буде справедливою для довільного вектора y_0.

З властивості матриці $\Omega_0^x(\frac{K_1(\varepsilon)C(x,\varepsilon)}{\varepsilon})$ випливає, що рівність (1.12) при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$ виконується лише тоді, коли

$$C(x,\varepsilon) = F_0(x) + \varepsilon F_1(x) + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x))\Omega_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x}\Big(\frac{K_1(\varepsilon)C(x,\varepsilon)}{\varepsilon}\Big). \tag{1.13}$$

Таким чином, якщо всі розв'язки системи рівнянь (1.9) при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$ є розв'язками системи рівнянь (1.7), то на вказаній множині матриця $C(x,\varepsilon)$ задовольняє рівнянню (1.13). Очевидне і зворотнє.

Якщо матриця $C(x,\varepsilon)$ неперервна при $|x| \le x_0,\ \varepsilon \ne 0$ задовольняє (1.13), то вектор-функція (1.10) є розв'язком системи рівнянь (1.7) при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$.

За допомогою заміни змінних в рівнянні (1.13) за формулою

$$C(x,\varepsilon) = F_0(x) + \varepsilon F_1(x) + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x))Z(x,\varepsilon) \tag{1.14}$$

одержимо рівняння

$$(G_0(x) + \varepsilon G_1(x))\Big(Z(x,\varepsilon) - \Omega_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x}\Big(\frac{K_1(\varepsilon)}{\varepsilon}(F_0(x) + \varepsilon F_1(x)) + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x))Z(x,\varepsilon)\Big)\Big) = 0. \tag{1.15}$$

Згідно рівняння (1.15) виберемо $Z(x,\varepsilon)$ наступним чином:

$$Z(x,\varepsilon) = \Omega_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x}\Big(\frac{K_1(\varepsilon)}{\varepsilon}(F_0(x) + \varepsilon F_1(x)) + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x))Z(x,\varepsilon)\Big). \tag{1.16}$$

Визначимо оператор

$$SZ(x,\varepsilon) = \Omega_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x}\Big(\frac{K_1(\varepsilon)}{\varepsilon}(F_0(x) + \varepsilon F_1(x)) + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x))Z(x,\varepsilon)\Big) \tag{1.17}$$

у просторі $C(m, J_0)$ матриць $Z(x,\varepsilon)$ заданих і неперервних за двома змінними x і ε на множині

$$J_0 = \{(x,\varepsilon) | |x| \le x_0,\ \delta \le |\varepsilon| \le \varepsilon_0\}$$

і такі, що

$$\|Z\|_0 = \max_{(x,\varepsilon)\in J_0} \|Z(x,\varepsilon)\| \le m,$$

де δ — додатне число таке, що $\delta < \varepsilon_0$.

Скориставшись нерівністю (1.2) і використовуючи вигляд блочних матриць $F_i(x),\ G_i(x),\ i = \overline{0,1}$, знайдемо норми таких матриць

$$\begin{aligned} \|F_0(x)\|_0 &\le \alpha_5, \quad \|F_1(x)\|_0 \le \beta_1 + \beta_2, \\ \|G_0(x)\|_0 &\le \alpha_6, \quad \|G_1(x)\|_0 \le \beta_3 + \beta_5, \end{aligned} \tag{1.18}$$

де

$$\alpha_5 = \max(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_0), \quad \alpha_6 = \max(\alpha_3 + \alpha_4, \beta_4).$$

Матриця $SZ(x,\varepsilon)$ неперервна на множині J_0. Згідно нерівностей (1.2), (1.3), (1.18) вірною є оцінка

$$\|SZ\|_0 \le \sup_{(x,\varepsilon)\in J_0} \Big|\Omega_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x} \times \Big(\frac{\|K_1(\varepsilon)\|}{|\varepsilon|}(\|F_0(x)+\varepsilon F_1(x)\| + \|G_0(x)+\varepsilon G_1(x)\|m)\Big)\Big| \le e^{\varepsilon_0(\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)\Delta x_0}.$$

Тоді, якщо виконується нерівність

$$e^{\varepsilon_0(\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)\Delta x_0} \le m, \tag{1.19}$$

то оператор S переводить простір $C(m, J_0)$ у себе.

Оцінимо різницю $SZ_1(x,\varepsilon)-SZ_2(x,\varepsilon)$ для матриць $Z_i(x,\varepsilon)\in C(m, J_0)$, $i=\overline{1,2}$. Позначимо

$$P_i(x,\varepsilon) = \frac{K_1(\varepsilon)(F_0(x)+\varepsilon F_1(x)+(G_0(x)+\varepsilon G_1(x))Z_i(x,\varepsilon))}{\varepsilon}, \quad i=\overline{1,2}$$

і розглянемо різницю

$$\Omega_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x}(P_1(x,\varepsilon)) - \Omega_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x}(P_2(x,\varepsilon)).$$

Маємо

$$\Big\| \int_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x} P_1(s,\varepsilon)\,ds - \int_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x} P_2(s,\varepsilon)\,ds\Big\| \le \Big\| \int_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x} (P_1(s,\varepsilon)-P_2(s,\varepsilon))\,ds\Big\| \le (\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))\varepsilon_0\Delta x_0\|Z_1-Z_2\|_0;$$

$$\Big\| \int_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x} P_1(s,\varepsilon)\int_x^s P_1(s_1,\varepsilon)\,ds_1\,ds - \int_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x} P_2(s,\varepsilon)\int_x^s P_2(s_1,\varepsilon)\,ds_1\,ds\Big\|$$
$$\le \frac{(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))}{|\varepsilon|}\Bigg(\Big| \int_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x}\int_x^s \|P_1(s_1,\varepsilon)\|\,ds_1\,ds$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int\limits_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x} \|P_2(s,\varepsilon)\| \int\limits_x^s ds_1\, ds\Bigg|\Bigg)\|Z_1 - Z_2\|_0 \\
&\le (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))(\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1+\beta_2) \\
&\qquad + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)\varepsilon_0^2\Delta^2 x_0^2\|Z_1 - Z_2\|_0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Bigg\| \int\limits_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x} P_1(s,\varepsilon) \int\limits_x^s P_1(s_1,\varepsilon)\ldots \int\limits_x^{s_{n-2}} P_1(s_{n-1},\varepsilon)\, ds_{n-1}\cdots ds_1\, ds \\
&- \int\limits_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x} P_2(s,\varepsilon) \int\limits_x^s P_2(s_1,\varepsilon)\cdots \int\limits_x^{s_{n-2}} P_2(s_{n-1},\varepsilon)\, ds_{n-1}\cdots ds_1\, ds\Bigg\| \\
&\le \frac{(\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))n(\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1+\beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)^{n-1}}{|\varepsilon|^n} \\
&\qquad \times \Bigg| \int\limits_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x} \int\limits_x^s \cdots \int\limits_x^{s_{n-2}} ds_{n-1}\cdots ds_1\, ds\Bigg|\, \|Z_1 - Z_2\|_0 \\
&\qquad \le (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))\Delta^n|\varepsilon|^n|x|^n \\
&\times \frac{(\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1+\beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)^{n-1}}{(n-1)!}\|Z_1 - Z_2\|_0 \\
&\qquad \le (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))\Delta x_0\varepsilon_0\Delta^{n-1}x_0^{n-1}\varepsilon_0^{n-1} \\
&\qquad \times \frac{(\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1+\beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)^{n-1}}{(n-1)!}\|Z_1 - Z_2\|_0.
\end{aligned}
$$

Тому при $(x,\varepsilon) \in J_0$ одержимо

$$
\begin{aligned}
&\|SZ_1(x,\varepsilon) - SZ_2(x,\varepsilon)\| \\
&= \|\Omega_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x}(P_1(x,\varepsilon)) - \Omega_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x}(P_2(x,\varepsilon))\| \le (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3+\beta_5)) \\
&\qquad \times \Delta x_0\varepsilon_0 e^{(\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)\Delta x_0\varepsilon_0}\|Z_1 - Z_2\|_0.
\end{aligned}
$$

При виконанні нерівності

$$
(\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))\Delta x_0\varepsilon_0 e^{(\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)\Delta x_0\varepsilon_0} < 1, \quad (1.20)
$$

оператор S є оператором стиску в просторі $C(m, J_0)$.

Якщо виконуються нерівності (1.2), (1.3), то для m, що задовольняють оцінки

$$
m < \frac{1}{\Delta x_0(\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))\varepsilon_0},
$$

справедлива нерівність (1.20). Рівняння

$$e^{\varepsilon_0(\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)\Delta x_0} = m$$

має два розв'язки m_1 і m_2 такі, що

$$\Delta x_0(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))\varepsilon_0 m_1 < 1 < \Delta x_0(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))\varepsilon_0 m_2.$$

Звідси випливає, що для

$$m_1 \le m < \frac{1}{\Delta x_0(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))\varepsilon_0} \tag{1.21}$$

будуть виконуватися одночасно обидві нерівності (1.19), (1.20).

Отже, при виконанні нерівностей (1.2), (1.3) для значень m, що задовольняють оцінки (1.21), оператор S, заданий рівністю (1.17), відображає $C(m, J_0)$ у себе і є оператором стиску.

Таким чином, у просторі $C(m, J_0)$ оператор S має єдину нерухому точку, яка і є єдиним розв'язком рівняння (1.16). А, отже, рівняння (1.13) має єдиний неперервний розв'язок на множині J_0. В силу довільності числа δ рівняння (1.13) має єдиний неперервний розв'язок для $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$.

Згідно нерівностей (1.2) при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \ne 0$ маємо оцінку норми

$$\|Z(x,\varepsilon)\| \le 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varepsilon|^n \Delta^n x_0^n(\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)^n}{n!}. \tag{1.22}$$

Перейшовши в (1.22) до границі при $\varepsilon \to 0$, а також з вигляду матриці $Z(x,\varepsilon)$ і оцінки на множині J_0 для норми $\|Z(x,\varepsilon)\|$, які задані відповідно формулами (1.16), (1.22), маємо, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Z(x,\varepsilon) = I,\ |x| \le x_0,$$

де I — одинична матриця відповідного порядку. Довизначимо матрицю $Z(x,\varepsilon)$ при $|x| \le x_0$ в точці $\varepsilon = 0$ до неперервної за змінними x і ε на множині

$$J = \{(x,\varepsilon) |\, |x| \le x_0,\ |\varepsilon| \le \varepsilon_0\},$$

поклавши

$$Z(x,0) = I.$$

Тоді, перейшовши до границі в (1.14), знайдемо, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0} C(x,\varepsilon) = C_0(x), \quad |x| \le x_0.$$

Тепер довизначимо $C(x,\varepsilon)$ при $|x|\le x_0$ в точці $\varepsilon=0$ до неперервної за змінними x і ε на множині J, поклавши

$$C(x,0)=C_0(x)=F_0(x)+G_0(x).$$

Користуючись (1.8) і записавши при $\varepsilon\ne 0$ явний вигляд матриціанта

$$\Omega_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x}\Big(\frac{K_1(\varepsilon)(F_0(x)+\varepsilon F_1(x)+(G_0(x)+\varepsilon G_1(x))Z(x,\varepsilon))}{\varepsilon}\Big), \quad (1.23)$$

приведемо його до іншого вигляду. Для цього в першому інтегралі, який входить в матрицант (1.23), введемо заміну змінних за формулою

$$\tau=\frac{x-\varepsilon}{\varepsilon^2\Delta},$$

одержимо

$$\begin{aligned} T_0&=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x} K_1(\varepsilon)(F_0(s)+\varepsilon F_1(s)+(G_0(s)+\varepsilon G_1(s))Z(s,\varepsilon))\,ds\\ &=-\varepsilon\Delta K_1(\varepsilon)\int\limits_0^x(F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau)\\ &+(G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))\,d\tau. \quad (1.24)\end{aligned}$$

Припустимо виконання наступної рівності для n-кратного інтегралу

$$\begin{aligned}&\frac{K_1(\varepsilon)}{\varepsilon^n}\int\limits_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x}(F_0(s)+\varepsilon F_1(s)+(G_0(s)+\varepsilon G_1(s))Z(s,\varepsilon))\\ &\times K_1(\varepsilon)\int\limits_x^{s}(F_0(s_1)+\varepsilon F_1(s_1)+(G_0(s_1)+\varepsilon G_1(s_1))Z(s_1,\varepsilon))\cdots\\ &\times K_1(\varepsilon)\int\limits_x^{s_{n-2}}(F_0(s_{n-1})+\varepsilon F_1(s_{n-1})+(G_0(s_{n-1})+\varepsilon G_1(s_{n-1}))\\ &\times Z(s_{n-1},\varepsilon))\,ds_{n-1}\,ds_{n-2}\cdots ds_1\,ds\\ &=(-1)^n\varepsilon^n\Delta^nK_1(\varepsilon)\int\limits_0^x(F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau)\\ &+(G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))\end{aligned}$$

$$\times K_1(\varepsilon)\int\limits_0^{\tau}(F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1)+\varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1)$$
$$+(G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1)+\varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1,\varepsilon))\cdots$$
$$\times K_1(\varepsilon)\int\limits_0^{\tau_{n-2}}(F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1})+\varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1})$$
$$+(G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1})+\varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1}))$$
$$\times Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1},\varepsilon)\,d\tau_{n-1}\cdots d\tau_1\,d\tau, \quad (1.25)$$

де змінні $\tau_i,\ i=\overline{1,n-1}$ задаються рівністю

$$\tau_i=\frac{x-s_i}{\varepsilon^2\Delta}. \quad (1.26)$$

Тоді $(n+1)$-інтеграл вигляду (1.25) набуде вигляду

$$T_{n+1}=\frac{K_1(\varepsilon)}{\varepsilon^{n+1}}\int\limits_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x}(F_0(s)+\varepsilon F_1(s)+(G_0(s)+\varepsilon G_1(s))Z(s,\varepsilon))$$
$$\times K_1(\varepsilon)\int\limits_x^{s}(F_0(s_1)+\varepsilon F_1(s_1)+(G_0(s_1)+\varepsilon G_1(s_1))Z(s_1,\varepsilon))\cdots$$
$$\times K_1(\varepsilon)\int\limits_x^{s_{n-1}}(F_0(s_n)+\varepsilon F_1(s_n)+(G_0(s_n)+\varepsilon G_1(s_n))Z(s_n,\varepsilon))\,ds_n\cdots ds_1\,ds$$
$$=\varepsilon^n(-1)^n\Delta^nK_1(\varepsilon)\int\limits_0^{x}(F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau)$$
$$+(G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))\cdots$$
$$\times K_1(\varepsilon)\int\limits_0^{\tau_{n-2}}(F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1})+\varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1})$$
$$+(G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1})+\varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1}))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau_{n-1},\varepsilon))$$
$$\times\frac{K_1(\varepsilon)}{\varepsilon}\int\limits_x^{s_{n-1}}(F_0(s_n)+\varepsilon F_1(s_n)+(G_0(s_n)+\varepsilon G_1(s_n))$$
$$\times Z(s_n,\varepsilon))\,ds_n\,d\tau_{n-1}\cdots d\tau_1\,d\tau. \quad (1.27)$$

Ввівши в (1.27) заміну за формулою

$$\tau_n=\frac{x-s_n}{\varepsilon^2\Delta}$$

і скориставшись (1.25), (1.26), отримаємо, що $(n+1)$ інтеграл T_{n+1} можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} T_{n+1} = (-1)^{n+1}\varepsilon^{n+1}\Delta^{n+1}K_1(\varepsilon)\int\limits_0^x (F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau) \\ + (G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))\cdots \\ \times K_1(\varepsilon)\int\limits_0^{\tau_{n-1}} (F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_n)+\varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_n) \\ + (G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_n)+\varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_n)) \\ \times Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau_n,\varepsilon))\,d\tau_n\,d\tau_{n-1}\cdots d\tau. \quad (1.28) \end{aligned}$$

Із співвідношень (1.24), (1.25), (1.28) і методу математичної індукції випливає справедливість (1.25) для $n\in\mathbb{N}$.

Із (1.25) і вигляду матрицантів (1.23) і (1.8) отримаємо, що на множині $|x|\le x_0$ і $\varepsilon\ne 0$ виконується рівність

$$\begin{aligned} \Omega_x^{(1-\varepsilon^2\Delta)x}\Big(\frac{K_1(\varepsilon)(F_0(x)+\varepsilon F_1(x)+(G_0(x)+\varepsilon G_1(x))Z(x,\varepsilon))}{\varepsilon}\Big) \\ = \Omega_0^x(-\Delta\varepsilon K_1(\varepsilon)(F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau) \\ + (G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))). \quad (1.29) \end{aligned}$$

Неперервність матриць $A_i(x)$, $B_j(x)$, $Z(x,\varepsilon)$, $i=\overline{1,4}$, $j=\overline{0,5}$ на множині J і рівність (1.29) дають можливість матрицант правої частини (1.29) довизначити в точці $\varepsilon=0$, $|x|\le x_0$, поклавши його рівному одиничній матриці. Тоді враховуючи довизначеність $Z(x,\varepsilon)$ при $\varepsilon=0$ і рівність (1.16), одержимо, що на множині J виконується рівність

$$\begin{aligned} Z(x,\varepsilon) = \Omega_0^x(-\Delta\varepsilon K_1(\varepsilon)(F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau) \\ + (G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))). \quad (1.30) \end{aligned}$$

Позначимо через $F(x,\varepsilon,Z)$ матрицю вигляду

$$\begin{aligned} F(x,\varepsilon,Z) = Z(x,\varepsilon) - \Omega_0^x(-\Delta\varepsilon K_1(\varepsilon)(F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau) \\ + (G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))), \quad (1.31) \end{aligned}$$

яка визначена на множині J.

Згідно (1.30), (1.31) неперервна на множині J матриця $Z(x,\varepsilon)$ задовольняє рівняння

$$F(x,\varepsilon,Z)=0. \quad (1.32)$$

Із (1.30) знайдемо частинну похідну матриці $F(x, \varepsilon, Z)$ за змінною Z вигляду

$$F'_Z(x,\varepsilon,Z) = I + \Delta\varepsilon K_1(\varepsilon)\int\limits_0^x (G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))\,d\tau$$
$$- \Delta^2\varepsilon^2 K_1(\varepsilon)\int\limits_0^x (G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))$$
$$\times K_1(\varepsilon)\int\limits_0^\tau (F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1) + \varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1)$$
$$+ (G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1) + \varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1),\varepsilon)\,d\tau\,d\tau_1$$
$$- \Delta^2\varepsilon^2 K_1(\varepsilon)\int\limits_0^x (F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau)$$
$$+ (G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))$$
$$\times K_1(\varepsilon)\int\limits_0^\tau (G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1) + \varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1))\,d\tau\,d\tau_1 + \cdots, \quad (1.33)$$

де 3-ій член ряду (1.33) при $\varepsilon \to 0$ має порядок малості $O((\Delta\varepsilon)^3)$. Оцінивши норми елементів членів ряду (1.33), отримаємо мажоранту для ряду (1.33), сума якого має вигляд

$$1 + \Delta\varepsilon_0(\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))x_0 e^{\Delta\varepsilon_0 x_0(\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)},$$

що доводить рівномірну збіжність ряду (1.33) на множині J. Використовуючи явний вигляд матриці $F(x, \varepsilon, Z)$, яка задана рівністю (1.31), знайдемо частинну похідну $F'_\varepsilon(x, \varepsilon, Z)$ за змінною ε вигляду

$$F'_\varepsilon(x,\varepsilon,Z) = \Delta K'_1(\varepsilon)\int\limits_0^x (F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau)$$
$$+ (G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau))\,d\tau$$
$$+ \Delta\varepsilon K_1(\varepsilon)\int\limits_0^x (\tilde F(x,\varepsilon,\tau) + \tilde G(x,\varepsilon,\tau)Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau))\,d\tau$$
$$- \Delta^2(\varepsilon K'_1(\varepsilon)\int\limits_0^x (F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau)$$

$$
\begin{gathered}
+ (G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau) \\
\times K_1(\varepsilon)\int\limits_0^{\tau}(F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1) + \varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1) \\
+ (G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1) + \varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1))\,d\tau\,d\tau_1 \\
+ \varepsilon^2 K_1(\varepsilon)\int\limits_0^{x}(\tilde{F}(x,\varepsilon,\tau) + \tilde{G}(x,\varepsilon,\tau)Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau)) \\
\times K_1(\varepsilon)\int\limits_0^{\tau}(F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1) + \varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1) \\
+ (G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1) + \varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1))\,d\tau\,d\tau_1 \\
+ \varepsilon K_1(\varepsilon)\int\limits_0^{x}\Bigg(F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau) \\
+ (G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau) \\
\times K_1'(\varepsilon)\int\limits_0^{\tau}(F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1) + \varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1) \\
+ (G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1) + \varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1))\,d\tau\,d\tau_1 \\
+ \varepsilon^2 K_1(\varepsilon)\int\limits_0^{x}(F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau) \\
+ (G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau)) \\
\times K_1(\varepsilon)\int\limits_0^{\tau}(\tilde{F}(x,\varepsilon,\tau_1) + \tilde{G}(x,\varepsilon,\tau_1)Z(x-\varepsilon^2\Delta\tau_1))\,d\tau\,d\tau_1\Bigg) + \cdots,
\end{gathered}
\tag{1.34}
$$

де

$$
\tilde{F}(x,\varepsilon,\tau) = -2\varepsilon\Delta\tau\frac{dF_0(t)}{dt}\Big|_{t=x-\varepsilon^2\Delta\tau} + F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau) - 2\varepsilon^2\Delta\tau\frac{dF_1(t)}{dt}\Big|_{t=x-\varepsilon^2\Delta\tau},
$$

$$
\tilde{G}(x,\varepsilon,\tau) = -2\varepsilon\Delta\tau\frac{dG_0(t)}{dt}\Big|_{t=x-\varepsilon^2\Delta\tau} + G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau) - 2\varepsilon^2\Delta\tau\frac{dG_1(t)}{dt}\Big|_{t=x-\varepsilon^2\Delta\tau}.
$$

З вигляду матриці $K_1(\varepsilon)$ отримаємо оцінки норм наступних матриць:

$$\|K_1'(\varepsilon)\| = \max(2|\varepsilon|, 1), \quad \|\varepsilon K_1(\varepsilon)\| = |\varepsilon| \max(|\varepsilon|, 1) = |\varepsilon|. \qquad (1.35)$$

У результаті оцінки членів ряду (1.34), з урахуванням (1.35), отримаємо мажоранту для ряду (1.34) вигляду

$$\begin{aligned}&(\alpha_7(\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5)))m + \varepsilon_0(\tilde{F} + \tilde{G}m)) \\ &\qquad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^{n+1} \Delta_0^{n+1} \varepsilon_0^n (\alpha_5 + \varepsilon_0(\beta_1 + \beta_2) + (\alpha_6 + \varepsilon_0(\beta_3 + \beta_5))m)^n}{(n+1)!},\end{aligned}$$

де

$$\alpha_7 = \max(2\varepsilon_0, 1),$$
$$\tilde{F} = \sup_{\substack{\tau \in [0;x], \\ (x,\varepsilon) \in J}} \|\tilde{F}(x, \varepsilon, \tau)\|, \quad \tilde{G} = \sup_{\substack{\tau \in [0;x], \\ (x,\varepsilon) \in J}} \|\tilde{G}(x, \varepsilon, \tau)\|.$$

З (1.33) і малості ε випливає, що при $(x, \varepsilon) \in J$ визначник $\det F_Z'(x, \varepsilon, Z) \neq 0$. Тоді із збіжності рядів (1.33), (1.34) і (1.32) випливає існування неперервної похідної $Z_\varepsilon'(x, \varepsilon)$ за змінною ε матриці $Z(x, \varepsilon)$ на множині J. Отже, з рівності (1.14) випливає існування неперервної частинної похідної $C_\varepsilon'(x, \varepsilon)$ за змінною ε матриці $C(x, \varepsilon)$.

Розглянемо при $|x| \leq x_0$ і $\varepsilon \neq 0$ різницю

$$C_1(x, \varepsilon) = \frac{C(x, \varepsilon) - C_0(x)}{\varepsilon}. \qquad (1.36)$$

Враховуючи, що $C(x, \varepsilon)$ диференційовна за змінною ε на множині J і $C(x, 0) = C_0(x)$, перетворимо різницю матриць

$$C(x, \varepsilon) - C_0(x) = \varepsilon \int\limits_0^1 C_\varepsilon'(x, \theta\varepsilon)\, d\theta, \quad (x, \varepsilon) \in J. \qquad (1.37)$$

Підставляючи (1.37) в (1.36), отримаємо при $|x| \leq x_0$ і $\varepsilon \neq 0$ вигляд матриці

$$C_1(x, \varepsilon) = \int\limits_0^1 C_\varepsilon'(x, \theta\varepsilon)\, d\theta. \qquad (1.38)$$

Довизначимо $C_1(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$. Для цього використовуючи неперервність за змінною ε похідної $C_\varepsilon'(x, \varepsilon)$ при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ і враховуючи граничний перехід від інтеграла, залежного від параметру, із рівності (1.38) отримаємо

$$C_1(x,0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^1 C'_\varepsilon(x,\theta\varepsilon)\,d\theta = \int\limits_0^1 \lim_{\varepsilon\to 0} C'_\varepsilon(x,\theta\varepsilon)\,d\theta$$

$$= \int\limits_0^1 C'_\varepsilon(x,0)\,d\theta = C'_\varepsilon(x,0). \quad (1.39)$$

З рівностей (1.38), (1.39) випливає, що для $(x,\varepsilon)\in J$ матриця $C_1(x,\varepsilon)$ має вигляд (1.38).

З (1.36)–(1.39) випливає можливість представлення при $(x,\varepsilon)\in J$ матриці $C(x,\varepsilon)$ у вигляді

$$C(x,\varepsilon) = C_0(x) + \varepsilon C_1(x,\varepsilon), \quad (1.40)$$

де матриця $C_1(x,\varepsilon)$ задається рівністю (1.38).

При виведенні вигляду (1.12) для матриці $C(x,\varepsilon)$ при $\varepsilon \neq 0$, розв'язок диференціального рівняння (1.9) брався при $\varepsilon \neq 0$, тобто саме рівняння (1.9) розглядається при $|x| \le x_0$ і $\varepsilon \neq 0$. В силу того, що матриця $C(x,\varepsilon)$ довизначена при $\varepsilon = 0$ і праві частини диференціально-функціонального рівняння (1.7) і диференціального рівняння (1.9) співпадають при $\varepsilon = 0$, то можна вважати, що всі розв'язки диференціального рівняння (1.9) при $(x,\varepsilon)\in J$ є розв'язками диференціально-функціонального рівняння (1.7) при $(x,\varepsilon)\in J$.

Дослідимо питання про голоморфність за змінною x матриці $C(x,\varepsilon)$, яка задана рівностями (1.14), (1.16). З голоморфності матриць $A_i(x)$, $B_j(x)$, $i=\overline{0,4}$, $j=\overline{0,5}$ випливає голоморфність матриць $F_s(x)$, $G_s(x)$, $s=\overline{0,1}$ а, отже, матриці $F_s(x)$, $G_s(x)$ є нескінченно-диференційовними. Тоді згідно [17] матриця $Z(x,\varepsilon)$, яка задана неявно рівністю (1.16), є нескінченно-диференційовна за змінною x. Згідно [3] матрицю $Z(x,\varepsilon)$ можна розвинути в формальний степеневий ряд за змінною x. Відомо, що із неперервності за змінною x матриці

$$K_1(\varepsilon)(F_0(x) + \varepsilon F_1(x) + (G_0(x) + \varepsilon G_1(x))Z(x,\varepsilon))$$

випливає, що матрицант цієї матриці розвивається в збіжний функціональний ряд. Тоді, користуючись (1.16), одержимо, що формальний степеневий ряд за змінною x матриці $Z(x,\varepsilon)$ є збіжним. А тому, згідно (1.14), матриці $Z(x,\varepsilon)$, $C(x,\varepsilon)$ є голоморфними за змінною x при $(x,\varepsilon)\in J$.

Аналогічно до одержаної рівності (1.40) можна показати існування неперервної за змінною ε матриці $Z_1(x,\varepsilon)$ на множині J вигляду $Z_1(x,\varepsilon) = \int_0^1 Z'_\varepsilon(x,\theta\varepsilon)\,d\theta$ такої, що справедлива рівність

$$Z(x,\varepsilon) = I + \varepsilon Z_1(x,\varepsilon). \quad (1.41)$$

Врахувавши (1.41), введемо позначення

$$M(\tau,\varepsilon,Z_1)=K_1(\varepsilon)(F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau) \\ +(G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau)+\varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))(I+\varepsilon Z_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))). \quad (1.42)$$

Підставивши (1.8) в (1.30) і врахувавши (1.42), отримаємо рівняння відносно $Z_1(x,\varepsilon)$ у вигляді

$$Z_1(x,\varepsilon)=-\Delta\int\limits_0^x M(\tau,\varepsilon,Z_1)\Omega_0^\tau(-\Delta\varepsilon M(\tau,\varepsilon,Z_1))\,d\tau. \quad (1.43)$$

Тоді матриця $F_1(x,\varepsilon,Z_1)$ вигляду

$$F_1(x,\varepsilon,Z_1)=Z_1(x,\varepsilon)+\Delta\int\limits_0^x M(\tau,\varepsilon,Z_1)\Omega_0^\tau(-\Delta\varepsilon M(\tau,\varepsilon,Z_1))\,d\tau \quad (1.44)$$

визначена на множині J. Згідно (1.43), (1.44) неперервна на множині J матриця $Z_1(x,\varepsilon)$ задовольняє рівняння

$$F_1(x,\varepsilon,Z_1)=0.$$

Підставляючи вигляд матриканта із (1.8) в (1.44), одержимо розвинення матриці $F_1(x,\varepsilon,Z_1)$ в рівномірно збіжний функціональний ряд. Причому ряди, які складаються з частинної похідної за змінними Z_1 і ε елементів одержаного ряду, мажоруються відповідно рядами

$$1+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5)) \\ \times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta^{n+1}\varepsilon_0^{n+1}x_0^{n+1}(\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)^n}{n!},$$

$$\Delta x_0(\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m \\ +\tilde F+\tilde G m+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m_1) \\ +\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Delta^n x_0^n\varepsilon_0^{n-2}(\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)^{n-1}}{n!} \\ \times((\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)(\alpha_7(n-1)+\varepsilon_0) \\ +n\varepsilon_0(\tilde F+\tilde G m+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m_1)),$$

де $m_1=\sup_{(x,\varepsilon)\in J}\|Z_1(x,\varepsilon)\|$. З розвинення матриці $(F_1(x,\varepsilon,Z_1))'_{Z_1}$ в рівномірно збіжний функціональний ряд випливає, що $(F_1(x,\varepsilon,Z_1))'_{Z_1}$ можна зобразити у вигляді

$$(F_1(x,\varepsilon,Z_1))'_{Z_1}=I+O(\varepsilon). \quad (1.45)$$

В силу малості ε і із (1.45) отримаємо, що визначник $\det(F_1(x,\varepsilon,Z_1))'_{Z_1} \neq 0$ і існує неперервна на множині J частинна похідна $(Z_1(x,\varepsilon))'_{\varepsilon}$. А, отже, на множині J матрицю $Z_1(x,\varepsilon)$ можна представити у вигляді

$$Z_1(x,\varepsilon) = Z_1(x,0) + \varepsilon Z_2(x,\varepsilon), \tag{1.46}$$

де

$$Z_2(x,\varepsilon) = \int\limits_0^1 (Z_1(x,\theta\varepsilon))'_{\varepsilon}\, d\theta, \quad Z_1(x,0) = -\Delta x(F_0(x) + G_0(x)).$$

Припустимо, що матрицю $Z_{k-1}(x,\varepsilon)$, яка визначається з рівняння

$$\begin{gathered} Z_{k-1}(x,\varepsilon) = (-1)^{k-1}\Delta^{k-1} \int\limits_0^x M(\tau,\varepsilon,Z_{k-1}) \int\limits_0^{\tau} \cdots \int\limits_0^{\tau_{k-3}} M(\tau_{k-2},\varepsilon,Z_{k-1}) \\ \times\, \Omega_0^{\tau_{k-2}}(-\Delta\varepsilon M(\tau_{k-2},\varepsilon,Z_{k-1}))\, d\tau_{k-2}\cdots d\tau_1\, d\tau \\ +\, (-1)^{k-2}\Delta^{k-2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^x (M(\tau,\theta\varepsilon,Z_{k-1}) \\ \times \int\limits_0^{\tau} \cdots \int\limits_0^{\tau_{k-4}} M(\tau_{k-3},\theta\varepsilon,Z_{k-1})\, d\tau_{k-3}\cdots d\tau_1)'_{\varepsilon}\, d\tau\, d\theta \Big|_{\varepsilon=0} \end{gathered} \tag{1.47}$$

можна представити у вигляді

$$Z_{k-1}(x,\varepsilon) = Z_{k-1}(x,0) + \varepsilon Z_k(x,\varepsilon), \tag{1.48}$$

де

$$Z_k(x,\varepsilon) = \int\limits_0^1 (Z_{k-1}(x,\theta\varepsilon))'_{\varepsilon}\, d\theta,$$

$$\begin{aligned} M(\tau,\varepsilon,Z_k) &= K_1(\varepsilon)(F_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon F_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau) \\ &\quad + (G_0(x-\varepsilon^2\Delta\tau) + \varepsilon G_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau))(I + \varepsilon Z_1(x-\varepsilon^2\Delta\tau,0) + \cdots \\ &\quad + \varepsilon^{k-1} Z_{k-1}(x-\varepsilon^2\Delta\tau,0) + \varepsilon^k Z_k(x-\varepsilon^2\Delta\tau,\varepsilon))). \end{aligned}$$

Підставивши (1.48) в (1.47), одержимо рівняння відносно матриці $Z_k(x,\varepsilon)$ вигляду

$$\varepsilon Z_k(x,\varepsilon) = -Z_{k-1}(x,0) + (-1)^k \Delta^k \varepsilon \int\limits_0^x M(\tau,\varepsilon,Z_k)$$

$$\times \int\limits_0^\tau \cdots \int\limits_0^{\tau_{k-2}} M(\tau_{k-1},\varepsilon,Z_k)\Omega_0^{\tau_{k-1}}(-\Delta\varepsilon M(\tau_{k-1},\varepsilon,Z_k))\, d\tau_{k-1}\cdots d\tau_{k-1}\, d\tau$$

$$+ (-1)^{k-2}\Delta^{k-2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^x \Bigg(M(\tau,\theta\varepsilon,Z_{k-1})$$

$$\times \int\limits_0^\tau \ldots \int\limits_0^{\tau_{k-4}} M(\tau_{k-3},\theta\varepsilon,Z_{k-1})\, d\tau_{k-3}\cdots d\tau_1 \Bigg)'_\varepsilon d\tau\, d\theta \Bigg|_{\varepsilon=0}$$

$$+(-1)^{k-1}\Delta^{k-1} \int\limits_0^x M(\tau,\varepsilon,Z_k) \int\limits_0^\tau \ldots \int\limits_0^{\tau_{k-3}} M(\tau_{k-2},\varepsilon,Z_k)\, d\tau_{k-2}\cdots d\tau_1\, d\tau. \tag{1.49}$$

Використовуючи (1.47), знаходимо $Z_{k-1}(x,0)$ і спрощуємо наступний вираз

$$(-1)^{k-1}\Delta^{k-1} \int\limits_0^x M(\tau,\varepsilon,Z_k)$$

$$\times \int\limits_0^\tau \cdots \int\limits_0^{\tau_{k-3}} M(\tau_{k-2},\varepsilon,Z_k)\, d\tau_{k-2}\cdots d\tau_1\, d\tau$$

$$- Z_{k-1}(x,0) + (-1)^{k-2}\Delta^{k-2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^x \Bigg(M(\tau,\theta\varepsilon,Z_{k-1})$$

$$\times \int\limits_0^\tau \cdots \int\limits_0^{\tau_{k-4}} M(\tau_{k-3},\theta\varepsilon,Z_{k-1})\, d\tau_{k-3}\cdots d\tau_1 \Bigg)'_\varepsilon d\tau\, d\theta \Bigg|_{\varepsilon=0}$$

$$= (-1)^{k-1}\Delta^{k-1}\varepsilon \int\limits_0^1 \int\limits_0^x \Bigg(M(\tau,\theta\varepsilon,Z_k)$$

$$\times \int\limits_0^\tau \cdots \int\limits_0^{\tau_{k-3}} M(\tau_{k-2},\theta\varepsilon,Z_k)\, d\tau_{k-2}\cdots d\tau_1 \Bigg)'_\varepsilon d\tau\, d\theta \Bigg|_{\varepsilon=0}. \tag{1.50}$$

Підставивши (1.50) в (1.49) одержимо, рівняння відносно матриці $Z_k(x,\varepsilon)$ вигляду

$$Z_k(x,\varepsilon)=(-1)^k\Delta^k\int\limits_0^x M(\tau,\varepsilon,Z_k)$$
$$\times\int\limits_0^{\tau}\cdots\int\limits_0^{\tau_{k-2}} M(\tau_{k-1},\varepsilon,Z_k)\Omega_0^{\tau_{k-1}}(-\Delta\varepsilon M(\tau_{k-1},\varepsilon,Z_k))\,d\tau_{k-1}\cdots d\tau_1\,d\tau$$
$$+(-1)^{k-1}\Delta^{k-1}\int\limits_0^1\int\limits_0^x\Bigg(M(\tau,\theta\varepsilon,Z_k)$$
$$\times\int\limits_0^{\tau} M(\tau_{k-2},\theta\varepsilon,Z_k)\,d\tau_{k-2}\cdots d\tau_1\Bigg)'_{\varepsilon}d\tau d\theta\Bigg|_{\varepsilon=0}. \quad (1.51)$$

Позначимо через $F_k(x,\varepsilon,Z_k)$ матрицю вигляду

$$F_k(x,\varepsilon,Z_k)=Z_k(x,\varepsilon)+(-1)^{k+1}\Delta^k\int\limits_0^x M(\tau,\varepsilon,Z_k)$$
$$\times\int\limits_0^{\tau}\cdots\int\limits_0^{\tau_{k-2}} M(\tau_{k-1},\varepsilon,Z_k)\Omega_0^{\tau_{k-1}}(-\Delta\varepsilon M(\tau_{k-1},\varepsilon,Z_k))\,d\tau_{k-1}\cdots d\tau_1\,d\tau$$
$$+(-1)^{k}\Delta^{k-1}\int\limits_0^1\int\limits_0^x\Bigg(M(\tau,\theta\varepsilon,Z_k)$$
$$\times\int\limits_0^{\tau}\ldots\int\limits_0^{\tau_{k-3}} M(\tau_{k-2},\theta\varepsilon,Z_k)\,d\tau_{k-2}\cdots d\tau_1\Bigg)'_{\varepsilon}d\tau\,d\theta\Bigg|_{\varepsilon=0}. \quad (1.52)$$

Підставляючи вигляд матриціанта із (1.8) в (1.52), одержимо розвинення матриці $F_k(x,\varepsilon,Z_k)$ в рівномірно збіжний функціональний ряд. Причому ряди, які складаються з частинної похідної за змінними Z_k і ε елементів одержаного ряду, мажоруються відповідно рядами

$$1+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))$$
$$\times\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{\Delta^{n+1}\varepsilon_0^{n+1}x_0^{n+1}(\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)^n}{n!},$$

$$\frac{x_0^k\Delta^k(\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)^{k-1}}{(k-1)!}(\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)$$
$$+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m+\tilde{F}+\tilde{G}m+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m_k)$$

$$+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{\Delta^n x_0^n\varepsilon_0^{n-k-1}(\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)^{n-1}}{n!}$$
$$\times\,((\alpha_5+\varepsilon_0(\beta_1+\beta_2)+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m)(\alpha_7(n-k)+k\varepsilon_0)$$
$$+\,n\varepsilon_0(\tilde{F}+\tilde{G}m+(\alpha_6+\varepsilon_0(\beta_3+\beta_5))m_k)),$$

де

$$m_k=\sup_{(x,\varepsilon)\in J}\left\|\sum_{i=1}^{k-1}i\varepsilon^{i-1}Z_i(x,0)+k\varepsilon^{k-1}Z_k(x,\varepsilon)\right\|.$$

З розвинення матриці $(F_k(x,\varepsilon,Z_k))'_{Z_k}$ в рівномірно збіжний функціональний ряд випливає, що $(F_k(x,\varepsilon,Z_k))'_{Z_k}$ можна зобразити у вигляді

$$(F_k(x,\varepsilon,Z_k))'_{Z_k}=I+O(\varepsilon). \tag{1.53}$$

В силу малості ε і із (1.53) отримаємо, що визначник $\det(F_k(x,\varepsilon,Z_k))'_{Z_k}\neq 0$ і існує неперервна на множині J частинна похідна $(Z_k(x,\varepsilon))'_{\varepsilon}$. А, отже, на множині J матрицю $Z_k(x,\varepsilon)$ можна представити у вигляді

$$Z_k(x,\varepsilon)=Z_k(x,0)+\varepsilon Z_{k+1}(x,\varepsilon), \tag{1.54}$$

де $Z_{k+1}(x,\varepsilon)$ визначається за формулою

$$Z_{k+1}(x,\varepsilon)=\int_0^1 (Z_k(x,\theta\varepsilon))'_{\varepsilon}\,d\theta.$$

Згідно математичної індукції випливає справедливість (1.54) для довільного $k\in\mathbb{N}$, причому матриці $Z_i(x,\varepsilon),\ i=\overline{1,k+1}$ є голоморфними при $|x|\le x_0$ і мають неперервну похідну за змінною ε на множині J. Із (1.54), (1.48), (1.46) одержимо, що на множині J матрицю $Z(x,\varepsilon)$ можна представити у вигляді

$$Z(x,\varepsilon)=I+\varepsilon Z_1(x,0)+\cdots+\varepsilon^k Z_k(x,0)+\varepsilon^{k+1}Z_{k+1}(x,\varepsilon). \tag{1.55}$$

Підставляючи (1.55) в (1.14), одержимо, що матрицю $C(x,\varepsilon)$ можна представити у вигляді

$$C(x,\varepsilon)=C_0(x)+\varepsilon C_1(x)+\cdots+\varepsilon^k C_k(x)+\varepsilon^{k+1}C_{k+1}(x,\varepsilon), \tag{1.56}$$

де $C_1(x),\ C_i(x),\ C_{k+1}(x,\varepsilon),\ i=\overline{2,k}$ визначаються за формулами

$$C_1(x)=F_1(x)+G_1(x)+G_0(x)Z_1(x,0),$$

$$C_i(x)=G_0(x)Z_i(x,0)+G_1(x)Z_{i-1}(x,0),$$

$$C_{k+1}(x,\varepsilon) = G_0(x)Z_{k+1}(x,\varepsilon) + G_1(x)Z_k(x,0).$$

З явного вигляду матриць $C_i(x)$, $C_{k+1}(x,\varepsilon)$ випливає, що матриці $C_i(x)$, $C_{k+1}(x,\varepsilon)$, $i = \overline{1,k}$ є голоморфними при $|x| \le x_0$ і матриця $C_{k+1}(x,\varepsilon)$ має неперервну похідну за змінною ε при $(x,\varepsilon) \in J$.

Враховуючи [3] і обмеженість матриці $C_{k+1}(x,\varepsilon)$ при $(x,\varepsilon) \in J$ випливає із рівності (1.56), що ряд $\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s C_s(x)$ є рівномірним при $|x| \le x_0$ асимптотичним розвиненням при $\varepsilon \to 0$ і $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$ матриці $C(x,\varepsilon)$ і має місце нерівність

$$\left\| C(x,\varepsilon) - \sum_{n=0}^{k} \varepsilon^n C_n(x) \right\| \le M|\varepsilon|^{k+1}, \quad |x| \le x_0,\ |\varepsilon| \le \varepsilon_0, \tag{1.57}$$

де $M = \sup_{(x,\varepsilon)\in J} \|C_{k+1}(x,\varepsilon)\|$.

Підставляючи явний вигляд матриці $K(\varepsilon)$ і вигляд блочної матриці $C(x,\varepsilon) = (C_{ml}(x,\varepsilon))$, $m,\ l = 1,2$ в диференціальне рівняння (1.9), в рівність (1.56) і нерівність (1.57), одержимо, що диференціальне рівняння (1.9) має вигляд (1.4) і мають місце (1.5), (1.6).

Теорема доведена. $\square$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних вигляду (1.4), в якому матриці $C_{ml}(x,\varepsilon)$, $m,l = 1,2$ мають зображення (1.5), а також x — комплексне і $|x| \le x_0$; ε_0 — малий дійсний параметр і $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$. Згідно умов 1)–3) і методу із [3] систему (1.4) можна привести до системи, з матрицею рівняння Ейрі.

Будемо вважати, що

$$C_{220} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr} C_{221}(x) = \operatorname{tr} C_{110}(x) = 0.$$

Тоді до системи (1.4) можна застосувати метод із [14]. Звідки випливає, що система диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з точкою звороту зводиться до системи простішого вигляду, доведення нескінченної диференційовності залежних від параметру матриць отриманої системи, доведення існування її неперервного розв'язку, а також доведення нескінченної диференційовності матриці перетворення.

Висновки

Таким чином, для системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних з лінійним відхиленням аргументу і точкою звороту, одержані умови, при яких її розв'язки — це розв'язки системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних. Причому матриці системи диференціальних рівнянь мають асимптотичні розвинення при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ з коефіцієнтами, голоморфними при $|x| \leq x_0$ і, до системи (1.4) можна застосувати результати із [14].

Література

[1] R. E. Langer, *The asymptotic solutions of a linear differential equations of the second order with two turning points* // Trans. Amer. Math. Soc., **90** (1959), 113–142.

[2] R. E. Langer, *The solutions of the differential equations* $v''' + \lambda^2 z v' + 3\mu\lambda^2 v = 0$ // Duke Math. J., **22** (1955), 525–542.

[3] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, М.: Мир, 1968, 464 с.

[4] W. Wasow, *Linear turning point theory*, Springer–Verlag New York Ins., 1985, 243 p.

[5] А. А. Дородницын, *Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка* // УМН, **27** (1952), вып. 6(52), 3–96.

[6] М. Ф. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, М.: Наука, 1983, 352 с.

[7] С. А. Ломов, *Введение в общую теорию сингулярных возмущений*, М.: Наука, 1981, 398 с.

[8] А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*, М.: Наука, 1989, 336 с.

[9] А. Найфэ, *Методы возмущений*, М.: Мир, 1976, 456 с.

[10] Ф. Олвер, *Асимптотика и специальные функции*, М.: Наука, 1990, 528 с.

[11] В. К. Дзядык, *Некоторые специальные функции и их роль при решений неоднородных дифференциальных уравнений*, в кн. Теория функций и её приложение, Киев: Наукова думка, 1979, 61–81.

[12] Н. И. Шкиль, *О периодических решениях систем линейных дифференциальных уравнений второго порядка* // Archivum mathematicum, Brno., **23** (1987), N 1, 53–62.

[13] А. М. Самойленко, *Об асимптотическом интегрировании одной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных* // УМЖ, **54** (2002), N 11, 1505–1516.

[14] А. М. Самойленко, І. Г. Ключник, *Про асимптотичне інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних* // Нелінійні коливання, **12** (2009), N 2, 208–234.

[15] І. Г. Ключник, *Асимптотичні розв'язки системи диференціальних рівнянь з кратною звороту* // Укр. мат. журн., **61** (2009), N 11, 1516–1530.

[16] І. Г. Ключник, *Лінійна система диференціальних рівнянь з точкою звороту* // Укр. мат. журн., **62** (2010), N 5, 625–642.

[17] А. М. Самойленко, *Об одной задаче исследования глобальных решений линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом* // Укр. мат. журн., **55** (2003), N 5, 631–640.

Відомості про авторів

Інна Геннадіївна Ключник

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 64,
Київ, 01033
Україна
E-Mail: `Klyuchnyk.i@mail.ru`

Геннадій Віталійович Завізіон

Кіровоградський державний
педагогічний університет
ім. Володимира Винниченка
вул. Шевченка, 1,
Кіровоград, 25006
Україна
E-Mail: `ZavizionG@mail.ru`