Український математичний вісник
Том 7 **(2010)**, № 2, 258 – 288

Симметричная модель идеальной вращающейся релаксирующей жидкости

Дмитрий Закора

(*Представлена Н. Д. Копачевским*)

Аннотация. В настоящей работе предложено реологическое соотношение, приводящее к симметричной модели идеальной релаксирующей жидкости в ограниченной области. Для построенной модели исследована эволюционная задача о малых движениях гидросистемы. Приведена теорема об однозначной сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи. В работе изучена также спектральная задача, ассоциированная с исследуемой моделью. Доказаны утверждения о локализации спектра, изучен существенный спектр задачи, найдены асимптотические формулы для ветвей изолированных собственных значений, исследованы вопросы полноты и базисности корневых элементов задачи.

2010 MSC. 45K05, 58C40, 76R99.

Ключевые слова и фразы. сжимаемая жидкость, существование, единственность, спектральная задача, операторный пучок, существенный спектр, асимптотика.

Введение

Задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости в ограниченной области без учета вращения, а также при отсутствии силы тяжести и при некоторых модельных ограничениях на граничные условия для динамической плотности, изучалась в [1, с. 390–410] (см. также [2]). В указанной монографии доказана теорема о сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи, а также исследована спектральная задача о нормальных колебаниях. В работах [3, 4] изучена задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей ограниченную область и находящейся под действием гравитационного поля. При этом предполагалось,

Статья поступила в редакцию 17.03.2010

что в состоянии относительного равновесия плотность жидкости постоянна. Оказывается, что пренебрежение изменением стационарной плотности приводит к нарушению симметрии в задаче, а также к некомпактным возмущениям в операторном пучке, отвечающем спектральной задаче (даже в случае баротропной модели).

В настоящей работе предлагается реологическое соотношение, которое, вместе с учетом точного стационарного состояния жидкости, приводит к симметричной модели идеальной релаксирующей жидкости. Для этой модели исследуются эволюционная и спектральная задачи.

1. Малые движения вращающейся идеальной релаксирующей жидкости

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим контейнер, равномерно вращающийся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести, и полностью заполненный идеальной неоднородной жидкостью. Будем считать, что жидкость занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $S := \partial\Omega$ и направленный вне области Ω. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с контейнером, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится в области Ω. В этом случае равномерная скорость вращения контейнера запишется в виде $\vec{\omega}_0 := \omega_0\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси вращения Ox_3, а $\omega_0 > 0$, для определенности. Будем считать, что внешнее стационарное поле сил $\vec{F}_0$ является гравитационным и действует вдоль оси вращения, то есть $\vec{F}_0 = -g\vec{e}_3$, $g > 0$.

Рассмотрим состояние относительного равновесия жидкости. Из уравнения Эйлера движения идеальной жидкости, записанного в подвижной системе координат, найдем формулу для градиента стационарного давления:

$$\nabla P_0 = \rho_0(-\vec{\omega}_0 \times (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}) - g\vec{e}_3) = \rho_0\nabla(2^{-1}|\vec{\omega}_0 \times \vec{r}|^2 - gx_3), \qquad (1.1)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор текущей точки области Ω, а ρ_0 — стационарная плотность жидкости.

В состоянии относительного равновесия динамические составляющие давления и плотности, отвечающие за эффекты релаксации в жидкости, отсутствуют. Поэтому будем считать, что в состоянии относительного равновесия жидкость баротропна и удовлетворяет следующему уравнению состояния: $\nabla P_0 = a_\infty^2\nabla\rho_0$, где a_∞ — скорость звука в жидкости. Из этого уравнения и соотношения (1.1) заключаем, что ρ_0 и a_∞^2 могут быть в общем случае функциями параметра $z := 2^{-1}\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - gx_3$. Таким образом, будем считать далее, что для жидкости определена функция скорости звука $a_\infty^2 = a_\infty^2(z)$ (это может быть и константа), тогда стационарная плотность может быть найдена как функция параметра z. При этом стационарная плотность ρ_0 будет постоянной, только если в системе отсутствует вращение и гравитационное поле.

Представим теперь полное давление и плотность жидкости в виде: $\widehat{P}(t,x) = P_0(z) + p(t,x)$, $\widehat{\rho}(t,x) = \rho_0(z) + \rho(t,x)$, где $p(t,x)$ и $\rho(t,x)$ — это динамическое давление и плотность соответственно, возникающие при малых движениях жидкости относительно стационарного состояния. Предположим, что динамические составляющие удовлетворяют следующему реологическому соотношению:

$$P_m\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\nabla p(t,x) = a_\infty^2(z)\Big(P_m\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) + \rho_0(z)Q_{m-1}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big)\nabla\rho(t,x), \quad (1.2)$$

где $P_m(x)$, $Q_{m-1}(x)$ — полиномы степеней m и $m-1$, соответственно. При этом, очевидно, можно считать, что коэффициент при старшей степени в многочлене $P_m(x)$ — единичный. Следуя рассуждениям и идеям из монографии [5], будем предполагать, что все корни полинома $P_m(x)$ вещественны, различны и отрицательны; обозначим их через $-b_l$ ($l = \overline{1,m}$), а корни полинома $Q_{m-1}(x)$ вещественны, отрицательны и чередуются с корнями $P_m(x)$. В этом случае из (1.2) можно вывести следующее уравнение состояния:

$$\nabla p(t,x) = a_\infty^2(z)\left(\nabla\rho(t,x) - \rho_0(z)\int\limits_0^t \nabla K(t-s)\rho(s,x)\,ds\right), \quad (1.3)$$

где $K(t) = \sum_{l=1}^m k_l \exp(-b_l t)$. Числа b_l^{-1} имеют смысл времен релаксации в системе, а $k_l > 0$ ($l = \overline{1,m}$) — некоторые структурные постоянные. В качестве математического обобщения описанных построений будем считать в эволюционной задаче, что $K = K(t,x)$ — достаточно гладкое положительное ядро, а в спектральной задаче, что $k_l = k_l(x)$ — достаточно гладкие положительные функции (если это не вызовет принципиальных изменений в структуре спектра).

Осуществим линеаризацию уравнения Эйлера, записанного в подвижной системе координат, относительно состояния относительного равновесия. С использованием уравнения состояния (1.3) получим задачу о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей равномерно вращающееся твердое тело:

$$\frac{\partial^2 \vec{w}(t,x)}{\partial t^2} - 2\omega_0 \frac{\partial}{\partial t}\big(\vec{w}(t,x)\times\vec{e}_3\big) = -a_\infty^2(z)\nabla\big(\rho_0^{-1}(z)\rho(t,x)\big)$$
$$+ a_\infty^2(z)\int\limits_0^t \nabla\big(K(t-s,x)\rho(s,x)\big)\,ds + \vec{f}(t,x) \quad (\text{в } \Omega), \quad (1.4)$$

$$\rho(t,x) + \operatorname{div}\big(\rho_0(z)\vec{w}(t,x)\big) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \qquad \vec{w}(t,x)\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad (1.5)$$

где $\vec{w}(t,x)$ — поле смещений в жидкости, $p(t,x)$, $\rho(t,x)$ — динамическое давление и плотность жидкости, $\vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле.

Выразим из уравнения неразрывности в (1.5) динамическую плотность $\rho(t,x)$ и подставим ее в (1.4). Осуществим в полученном уравнении замену $a_\infty^{-2}(z)\vec{w} = \vec{u}$, в результате получим основную задачу:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}(t,x)}{\partial t^2} - 2\omega_0 \frac{\partial}{\partial t}\big(\vec{u}(t,x)\times\vec{e}_3\big) = \nabla\Big(\rho_0^{-1}(z)\operatorname{div}\big(\delta(z)\vec{u}(t,x)\big)\Big)$$
$$-\int\limits_0^t \nabla\Big(K(t-s,x)\operatorname{div}\big(\delta(z)\vec{u}(s,x)\big)\Big)\,ds + a_\infty^{-2}(z)\vec{f}(t,x) \quad (\text{в } \Omega), \quad (1.6)$$

$$\delta(z) := \rho_0(z)a_\infty^2(z), \qquad \vec{u}(t,x)\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad (1.7)$$

$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(0,x) = \vec{u}^1(x). \quad (1.8)$$

1.2. Проектирование уравнений движения

Для перехода к операторному уравнению в изучаемой задаче применим метод ортогонального проектирования уравнений движения на специальные подпространства [6]. Введем векторное пространство $\vec{L}_2(\Omega,\delta)$ со скалярным произведением и нормой следующего вида:

$$(\vec{v}_1,\vec{v}_2)_{\vec{L}_2(\Omega,\delta)} := \int\limits_\Omega \delta(z)\vec{v}_1\cdot\overline{\vec{v}_2}\,d\Omega, \qquad \|\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\delta)} = \int\limits_\Omega \delta(z)|\vec{v}|^2\,d\Omega. \quad (1.9)$$

Очевидно, в силу свойств функции $\delta(z)$, что нормы в пространствах $\vec{L}_2(\Omega,\delta)$ и $\vec{L}_2(\Omega)$ эквивалентны, а значит $\vec{L}_2(\Omega,\delta)$ — гильбертово. Можно проверить, что имеет место разложение (аналог разложения Г. Вейля пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega)$ (см. [6, с. 103])):

$$\vec{L}_2(\Omega,\delta) = \vec{J}_0(\Omega,\delta)\oplus\vec{G}(\Omega,\delta), \quad (1.10)$$

$$\vec{J}_0(\Omega,\delta) := \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega,\delta) \big|\ \operatorname{div}(\delta(z)\vec{v}) = 0 \ (\text{в } \Omega),\ v_n := \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \ (\text{на } S)\},$$

$$\vec{G}(\Omega,\delta) := \left\{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega,\delta) \big| \quad \vec{v} = \nabla\Phi, \quad \int\limits_\Omega \Phi\, d\Omega = 0\right\}.$$

Здесь операции $\operatorname{div}\vec{v}$ и v_n понимаются в смысле теории обобщенных функций (распределений), см. [6, с. 100–102]. Введем ортопроекторы P_0 и P_G пространства $\vec{L}_2(\Omega,\delta)$ на $\vec{J}_0(\Omega,\delta)$ и $\vec{G}(\Omega,\delta)$, соответственно. Будем разыскивать поле $\vec{u}$ в виде:

$$\vec{u} = \vec{v} + \nabla\Phi, \quad \text{где} \quad \vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega,\delta), \quad \nabla\Phi \in \vec{G}(\Omega,\delta). \tag{1.11}$$

Подставим представление (1.11) в уравнение (1.6) и применим к его правой и левой частям ортопроекторы P_0 и P_G, отвечающие разложению (1.10). Преобразуем также граничное условие (1.7) и начальные условия (1.8). В результате получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} - 2\omega_0\frac{\partial}{\partial t}\big[P_0(\vec{v}\times\vec{e}_3) + P_0(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\big] = P_0 a_\infty^{-2}\vec{f} \quad (\text{в } \Omega), \tag{1.12}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\Phi - 2\omega_0\frac{\partial}{\partial t}\big[P_G(\vec{v}\times\vec{e}_3) + P_G(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\big] \\ = \nabla\big(\rho_0^{-1}\operatorname{div}(\delta\nabla\Phi)\big) - \int\limits_0^t \nabla\big(K(t-s)\operatorname{div}(\delta\nabla\Phi(s))\big)\,ds + P_G a_\infty^{-2}\vec{f}, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S),\end{gathered} \tag{1.13}$$

$$\begin{gathered}\vec{v}(0,x) = P_0\vec{u}^0(x) =: \vec{v}^0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{v}(0,x) = P_0\vec{u}^1(x) =: \vec{v}^1(x), \\ \nabla\Phi(0,x) = P_G\vec{u}^0(x) =: \nabla\Phi^0(x), \\ \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi(0,x) = P_G\vec{u}^1(x) =: \nabla\Phi^1(x).\end{gathered} \tag{1.14}$$

1.3. Вспомогательные операторы и их свойства

Для перехода к операторной формулировке задачи (1.12)–(1.14) введем ряд операторов и изучим их свойства. Введем гильбертово пространство $\mathcal{H} := \vec{J}_0(\Omega,\delta) \oplus \vec{G}(\Omega,\delta)$, состоящее из пар $\xi := (\vec{v};\nabla\Phi)^t$ (здесь символ t обозначает операцию транспонирования), где $\vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega,\delta)$, $\nabla\Phi \in \vec{G}(\Omega,\delta)$. Скалярное произведение и норма в $\mathcal{H}$ определяются следующим образом:

$$(\xi_1,\xi_2)_{\mathcal{H}} := (\vec{v}_1,\vec{v}_2)_{\vec{L}(\Omega,\delta)} + (\nabla\Phi_1,\nabla\Phi_2)_{\vec{L}(\Omega,\delta)}, \quad \|\xi\|^2_{\mathcal{H}} := (\xi,\xi)_{\mathcal{H}}.$$

Введем операторы $S_{1,1}$, $S_{1,2}$, $S_{2,1}$, $S_{2,2}$ и операторный блок $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}\xi := \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \nabla\Phi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} iP_0(\vec{v}\times\vec{e}_3) & iP_0(\nabla\Phi\times\vec{e}_3) \\ iP_G(\vec{v}\times\vec{e}_3) & iP_G(\nabla\Phi\times\vec{e}_3) \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Имеет место лемма, доказательство которой подобно доказательству аналогичной леммы о свойствах кориолисова оператора из [6].

Лемма 1.1. *Оператор $\mathcal{S}$ является самосопряженным и ограниченным в $\mathcal{H}$: $\mathcal{S}=\mathcal{S}^*$, $\mathcal{S}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$; более того, $\|\mathcal{S}\|=1$. Спектр оператора $S_{1,1}$ существенный (см. [7]) и заполняет отрезок $[-1,1]$: $\sigma(S_{1,1}) = \sigma_{ess}(S_{1,1})=[-1,1]$ (здесь через $\sigma_{ess}(S_{1,1})$ обозначен существенный (предельный) спектр оператора $S_{1,1}$).*

Будем считать далее, что функции $K(t,x)$ и $a_\infty^2(z)$ (напомним, что $z:=2^{-1}\omega_0^2(x_1^2+x_2^2)-gx_3$) непрерывно дифференцируемы по пространственным переменным, а граница S области Ω — класса C^2.

Лемма 1.2. *Введем пространство*

$$H_A := \left\{ \nabla\Phi\in\vec{W}_2^1(\Omega) \,\middle|\, \frac{\partial\Phi}{\partial n}=0 \ (\text{на } S), \quad \int_\Omega \Phi\, d\Omega = 0 \right\}$$

с нормой, порожденной скалярным произведением следующего вида:

$$(\nabla\Phi_1,\nabla\Phi_2)_A := \int_\Omega \rho_0^{-1}\operatorname{div}(\delta\nabla\Phi_1)\overline{\operatorname{div}(\delta\nabla\Phi_2)}\, d\Omega.$$

Пространство H_A является гильбертовым; оно компактно вложено в пространство $\vec{G}(\Omega,\delta)$: $H_A \hookrightarrow\hookrightarrow \vec{G}(\Omega,\delta)$. Порождающий оператор A гильбертовой пары $(H_A;\vec{G}(\Omega,\delta))$, являющийся самосопряженным и положительно определенным в $\vec{G}(\Omega,\delta)$, обладает дискретным спектром. Для каждого поля $\nabla q\in\vec{G}(\Omega,\delta)$ существует и единственно обобщенное решение задачи

$$-\nabla(\rho_0^{-1}(z)\operatorname{div}(\delta(z)\nabla\Phi)) = \nabla q \ (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}=0 \ (\text{на } S), \quad \int_\Omega \Phi\, d\Omega = 0,$$

выражаемое формулой $\nabla\Phi = A^{-1}\nabla q$. Более того, $A^{-1}\in\mathfrak{S}_p(\vec{G}(\Omega,\delta))$ при $p>3/2$ и справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\lambda_k(A) = \left(\frac{1}{6\pi^2}\int_\Omega \rho_0^{-3/2}(z)a_\infty^{-6}(z)\, d\Omega\right)^{-2/3} k^{2/3}(1+o(1)) \quad (k\to\infty).$$

Доказательство. Покажем, что H_A гильбертово пространство. Для каждого поля $\nabla\Phi$ из H_A можно вывести следующее неравенство:

$$\|\nabla\Phi\|_A^2 \le 2\max_{x\in\overline{\Omega}}\rho_0^{-1}(z)\cdot\max\left\{\|\nabla\delta\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)}, 2\max_{x\in\overline{\Omega}}\delta(z)\right\}\|\nabla\Phi\|^2_{\vec{W}_2^1(\Omega)}. \tag{1.16}$$

Выведем противоположное неравенство, которое вместе с (1.16) обеспечит эквивалентность указанных норм. Рассмотрим задачу

$$L\Phi := -\operatorname{div}(\delta\nabla\Phi) = f \text{ (в } \Omega), \quad B\Phi := \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \varphi \text{ (на } S). \tag{1.17}$$

Можно проверить, что дифференциальное выражение L правильно эллиптично, а граничное условие B накрывает его (см. [8, с. 222]). Таким образом, задача (1.17) эллиптична, а ее ядро (т.е. решение задачи (1.17) при $f\equiv 0$, $\varphi\equiv 0$), как несложно проверить, состоит из констант. Из леммы 6.3 из [8, с. 226] следует, что

$$\exists\, c>0:\ \|L\Phi\|^2_{L_2(\Omega)} \ge c\|\Phi\|^2_{W_2^2(\Omega)} \quad \forall\,\Phi\in W_2^2(\Omega,B),$$
$$\text{где}\quad W_2^2(\Omega,B) := \left\{\Phi\in W_2^2(\Omega)\,\middle|\, \frac{\partial\Phi}{\partial n}=0 \ \text{ (на } S),\ (\Phi,1)_{L_2(\Omega)}=0\right\}. \tag{1.18}$$

Из (1.18) для каждого поля $\nabla\Phi$ из H_A выведем следующее неравенство:

$$\|\nabla\Phi\|_A^2 \ge c\min_{x\in\overline{\Omega}}\rho_0^{-1}(z)\|\Phi\|^2_{W_2^2(\Omega)} \ge c\min_{x\in\overline{\Omega}}\rho_0^{-1}(z)\|\nabla\Phi\|^2_{\vec{W}_2^1(\Omega)}. \tag{1.19}$$

Из (1.16), (1.19) получаем, что H_A — гильбертово пространство.

Пространство H_A является плотным множеством в $\vec{G}(\Omega,\delta)$. Из неравенства (1.19), с учетом того, что $\|\nabla\Phi\|_{\vec{G}(\Omega,\delta)} \le \|\nabla\Phi\|_{\vec{W}_2^1(\Omega)}$ для каждого $\nabla\Phi\in\vec{W}_2^1(\Omega)\cap\vec{G}(\Omega,\delta)$, следует, что H_A и $\vec{G}(\Omega,\delta)$ образуют гильбертову пару $(H_A;\vec{G}(\Omega,\delta))$.

Найдем порождающий оператор A указанной гильбертовой пары; он определяется из тождества (см. [6, с. 33])

$$(A\nabla\Phi_1,\nabla\Phi_2)_{\vec{G}(\Omega,\delta)} = (\nabla\Phi_1,\nabla\Phi_2)_A, \quad \nabla\Phi_1\in\mathcal{D}(A),\ \nabla\Phi_2\in H_A. \tag{1.20}$$

Для дважды дифференцируемого поля $\nabla\Phi_1$, с использованием формулы Грина для оператора Лапласа, тождество (1.20) можно преобразовать следующим образом:

$$(A\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_2)_{\vec{G}(\Omega,\delta)} = \int\limits_\Omega \rho_0^{-1} \operatorname{div}(\delta\nabla\Phi_1) \operatorname{div}(\delta\nabla\Phi_2)\, d\Omega$$

$$= -\int\limits_\Omega \nabla(\rho_0^{-1} \operatorname{div}(\delta\nabla\Phi_1)) \cdot \delta\nabla\Phi_2\, d\Omega + \int\limits_S a_\infty^2 \operatorname{div}(\delta\nabla\Phi_1) \frac{\partial\Phi_2}{\partial n}\, dS$$

$$= (-\nabla(\rho_0^{-1} \operatorname{div}(\delta\nabla\Phi_1), \nabla\Phi_2)_{\vec{G}(\Omega,\delta)}. \quad (1.21)$$

Отсюда следует, что дважды дифференцируемое решение уравнения $A\nabla\Phi_1 = \nabla q$ является решением задачи

$$-\nabla(\rho_0^{-1}(z) \operatorname{div}(\delta(z)\nabla\Phi_1)) = \nabla q \text{ (в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \text{ (на } S), \int\limits_\Omega \Phi_1\, d\Omega = 0.$$

Эта задача имеет единственное обобщенное решение $\nabla\Phi_1 = A^{-1}\nabla q$ для каждого поля $\nabla q \in \vec{G}(\Omega,\delta)$.

Из неравенства (1.16) и компактности вложения пространства $\vec{W}_2^1(\Omega)$ в $\vec{L}_2(\Omega,\delta)$ следует, что $H_A \subset\!\to\!\subset\!\to \vec{G}(\Omega,\delta)$. Это влечет компактность оператора A^{-1}, а значит оператор A обладает дискретным спектром. Асимптотическая формула для собственных значений оператора A следует из общих формул из работы [9]. □

Аналогично оператору A, заменяя $\rho_0^{-1}(z)$ на $K(t,x)$, введем оператор-функцию $K(t)$, при этом $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(K(t))$ для каждого $t \geq 0$.

1.4. Переход к операторному уравнению. Исследование интегродифференциального уравнения второго порядка. Разрешимость исходной начально-краевой задачи

С использованием введенных операторов задачу (1.12)–(1.14) запишем в виде задачи Коши для интегродифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega,\delta) \oplus \vec{G}(\Omega,\delta)$:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\omega_0 i\mathcal{S}\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{P}_G\mathcal{A}\xi + \int\limits_0^t \mathcal{K}(t-s)\xi(s)\, ds + \mathcal{F}(t), \qquad \xi(0) = \xi^0, \quad \xi'(0) = \xi^1, \quad (1.22)$$

где

$$\mathcal{P}_G := \operatorname{diag}(0, I_G), \quad \mathcal{A} := \operatorname{diag}(I_0, A), \quad \mathcal{K}(t) := \operatorname{diag}(0, K(t)),$$

$\mathcal{F}(t) := (P_0 a_\infty^{-2}\vec{f}(t); P_G a_\infty^{-2}\vec{f}(t))^t, \quad \xi^0 := (\vec{v}^0; \nabla\Phi^0)^t, \quad \xi^1 := (\vec{v}^1; \nabla\Phi^1)^t.$

Таким образом, если поле $\vec{u}$ — такое решение задачи (1.6)–(1.8) о малых движениях вращающейся идеальной релаксирующей жидкости в ограниченной области, что все проведенные до сих пор рассуждения законны, тогда функция ξ является решением задачи Коши для интегродифференциального уравнения второго порядка (1.22).

Дадим следующее определение.

Определение 1.1. *Назовем сильным решением исходной начально-краевой задачи* (1.6)–(1.8) *такое поле $\vec{u}$, для которого функция ξ является сильным решением задачи Коши* (1.22). *В свою очередь сильным решением задачи Коши* (1.22) (*см.* [10, *с.* 291]) *назовем функцию $\xi(t)$ такую, что $\xi(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\xi'(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})$ для любого t из $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}\xi(t)$, $\mathcal{A}^{1/2}\xi'(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, выполнены начальные условия и уравнение из* (1.22) *для любого $t \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$.*

Осуществим в задаче (1.22) замену $\mathcal{A}^{1/2}\xi(t) = \eta'(t)$, $\eta(0) = 0$ и преобразуем ее к системе двух уравнений с начальными условиями:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -2\omega_0 i\mathcal{S}\frac{d\xi}{dt} - \mathcal{P}_G\mathcal{A}^{1/2}\frac{d\eta}{dt} + \int_0^t \mathcal{K}(t-s)\mathcal{A}^{-1/2}\frac{d\eta(s)}{ds}\,ds + \mathcal{F}(t),$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \mathcal{A}^{1/2}\frac{d\xi}{dt}, \qquad \xi'(0) = \xi^1, \quad \eta'(0) = \mathcal{A}^{1/2}\xi^0. \tag{1.23}$$

Очевидно, что $\mathcal{P}_G\mathcal{A}^{1/2} = \mathcal{A}^{1/2} - \mathcal{P}_0$, $\mathcal{K}(t)\mathcal{A}^{-1/2} = \mathcal{K}_b(t)\mathcal{A}^{1/2}$, где $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и $\mathcal{K}_b(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ при каждом $t \in \mathbb{R}_+$. С использованием проведенных преобразований запишем систему (1.23) в виде одного интегродифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(2)} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$:

$$\frac{dy}{dt} = \widehat{\mathcal{A}}y + \widehat{\mathcal{R}}y + \int_0^t \widehat{\mathcal{K}}(t-s)\widehat{\mathcal{C}}y(s)\,ds + \widehat{\mathcal{F}}(t), \quad y(0) = y^0, \tag{1.24}$$

где

$$y := (\xi'; \eta')^t, \qquad y^0 := (\xi^1; \mathcal{A}^{1/2}\xi^0)^t,$$
$$\widehat{\mathcal{C}} := \mathrm{diag}(0, \mathcal{A}^{1/2}), \qquad \widehat{\mathcal{F}}(t) := (\mathcal{F}(t); 0)^t,$$

$$\widehat{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} -2\omega_0 i\mathcal{S} & -\mathcal{A}^{1/2} \\ \mathcal{A}^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \ \widehat{\mathcal{R}} := \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{P}_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \widehat{\mathcal{K}}(t) := \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}_b(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

при этом $\widehat{\mathcal{R}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{(2)})$ и $\widehat{\mathcal{K}}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{(2)})$ при каждом $t \in \mathbb{R}_+$, а области определения операторов $\widehat{\mathcal{A}}$ и $\widehat{\mathcal{C}}$, очевидно, связаны включением $\mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{C}})$.

Определение 1.2 ([10, с. 38]). *Сильным решением задачи Коши* (1.24) *назовем функцию* $y(t)$ *такую, что* $y(t) \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$ *для любого* t *из* $\mathbb{R}_+$, $\widehat{\mathcal{A}}y(t) \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(2)})$, $y(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(2)})$, $y(0) = y^0$ *и выполнено уравнение из* (1.24) *для любого* $t \in \mathbb{R}_+$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть* $\widehat{\mathcal{K}}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{H}^{(2)}))$, $\widehat{\mathcal{F}}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(2)})$, *тогда для любого* $y^0 \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$ *существует и единственно сильное решение задачи Коши* (1.24).

Теорема 1.2. *Пусть ядро* $K(t,x)$ *интегрального оператора Вольтерра и поле* $\vec{f}(t,x)$ *непрерывно дифференцируемы по переменной* $t \in \mathbb{R}_+$ *со значениями в* $C^1(\overline{\Omega})$ *и* $\vec{L}_2(\Omega,\delta)$, *соответственно, тогда для любых* $\vec{u}^0(x)$ *и* $\vec{u}^1(x)$ *таких, что* $P_0\vec{u}^0$, $P_0\vec{u}^1 \in \vec{J}_0(\Omega,\delta)$, $P_G\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A)$, $P_G\vec{u}^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, *существует и единственно сильное (в смысле определения 1.1) решение начально-краевой задачи* (1.6)–(1.8).

Подобные теоремы доказаны в [1, 3, 4].

2. Нормальные колебания вращающейся идеальной релаксирующей жидкости

2.1. Вывод основного операторного пучка

Задача (1.6)–(1.8) о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей вращающееся твердое тело, приводится к задаче Коши (1.22). Будем считать далее, что ядро $K(t,x)$ определяется по следующей формуле $K(t,x) = \sum_{l=1}^{m} k_l(x)\exp(-b_l t)$, где $k_l(x)$ $(l = \overline{1,m})$ — некоторые положительные и непрерывно дифференцируемые в $\overline{\Omega}$ функции (см. после (1.3)). Тогда однородное уравнение из (1.22), записанное в виде системы, примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{v}}{dt^2} + 2\omega_0 i\Big(S_{1,1}\dfrac{d\vec{v}}{dt} + S_{1,2}\dfrac{d\nabla\Phi}{dt}\Big) = 0, \\ \dfrac{d^2\nabla\Phi}{dt^2} + 2\omega_0 i\Big(S_{2,1}\dfrac{d\vec{v}}{dt} + S_{2,2}\dfrac{d\nabla\Phi}{dt}\Big) = -A\nabla\Phi \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\int_0^t \exp\left(-b_l(t-s)\right)K_l\nabla\Phi(s)\,ds, \end{cases} \tag{2.1}$$

где K_l $(l = \overline{1,m})$ — операторы, которые строятся аналогично оператору A (заменой $\rho_0^{-1}(z)$ на $k_l(x)$ в лемме 1.2).

Систему интегродифференциальных операторных уравнений (2.1) можно свести к системе дифференциально-операторных уравнений второго порядка. А именно, осуществим в системе (2.1) замены:

$$\nabla\Phi_l := \int\limits_0^t \exp\left(-b_l(t-s)\right)K_l\nabla\Phi(s)\,ds \quad (l=\overline{1,m}). \tag{2.2}$$

Рассматривая продифференцированные соотношения (2.2) как систему дифференциальных уравнений, присоединенных к системе (2.1), получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{v}}{dt^2} + 2\omega_0 i\Big(S_{1,1}\dfrac{d\vec{v}}{dt} + S_{1,2}\dfrac{d\nabla\Phi}{dt}\Big) = 0, \\ \dfrac{d^2\nabla\Phi}{dt^2} + 2\omega_0 i\Big(S_{2,1}\dfrac{d\vec{v}}{dt} + S_{2,2}\dfrac{d\nabla\Phi}{dt}\Big) = -A\nabla\Phi + \sum\limits_{l=1}^m \nabla\Phi_l, \\ \dfrac{d\nabla\Phi_l}{dt} = K_l\nabla\Phi - b_l\nabla\Phi_l \quad (l=\overline{1,m}). \end{cases} \tag{2.3}$$

Разыскивая решения системы (2.3) в виде:

$$(\vec{v}(t);\nabla\Phi(t);\nabla\Phi_1(t);\ldots;\nabla\Phi_m(t))^t = \exp(-\lambda t)(\vec{v};\nabla\Phi;\nabla\Phi_1;\ldots;\nabla\Phi_m)^t,$$

получим следующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} \lambda^2\vec{v} - 2\omega_0 i\lambda(S_{1,1}\vec{v} + S_{1,2}\nabla\Phi) = 0, \\ \lambda^2\nabla\Phi - 2\omega_0 i\lambda(S_{2,1}\vec{v} + S_{2,2}\nabla\Phi) = -A\nabla\Phi + \sum\limits_{l=1}^m \nabla\Phi_l, \\ (b_l-\lambda)\nabla\Phi_l = K_l\nabla\Phi \quad (l=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{2.4}$$

где $\vec{v}\in\vec{J}_0(\Omega,\delta)$, $\nabla\Phi\in\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}(K_l)$, $\nabla\Phi_l\in\vec{G}(\Omega,\delta)$ $(l=\overline{1,m})$.

Всюду далее будем считать, что $b_1<\cdots<b_m$. Покажем, что числа $\lambda=b_l$ $(l=\overline{1,m})$ не являются собственными значениями задачи (2.4). В самом деле, положим $\lambda=b_k$ в системе (2.4). Тогда, в силу положительной определенности оператора K_k, получим, что $\nabla\Phi=0$. Отсюда следует, что $\nabla\Phi_l=0$ $(l\neq k)$. При этих условиях из первого уравнения системы (2.4) следует, что $\vec{v}=0$. Тогда из второго уравнения системы (2.4) получим, что $\nabla\Phi_k=0$. Полученные равенства противоречат тому, что $\lambda=b_k$ собственное значение задачи (2.4). Учитывая это обстоятельство, преобразуем систему (2.4) следующим образом:

$$\begin{cases} \lambda^2\vec{v} - 2\omega_0 i\lambda(S_{1,1}\vec{v} + S_{1,2}\nabla\Phi) = 0, \\ \lambda^2\nabla\Phi - 2\omega_0 i\lambda(S_{2,1}\vec{v} + S_{2,2}\nabla\Phi) = -A\nabla\Phi + \sum\limits_{l=1}^{m}(b_l-\lambda)^{-1}K_l\nabla\Phi. \end{cases}$$

Осуществим здесь замену $A^{1/2}\nabla\Phi = \varphi$ (здесь и далее для краткости опущен знак градиента). В результате придем к следующей системе операторных уравнений:

$$\begin{cases} \lambda^2 I_0\vec{v} - 2\omega_0 i\lambda(S_{1,1}\vec{v} + \widehat{S}_{1,2}\varphi) = 0, \\ \lambda^2 A^{-1}\varphi - 2\omega_0 i\lambda(\widehat{S}_{2,1}\vec{v} + \widehat{S}_{2,2}\varphi) + \left(I_G - \sum\limits_{l-1}^{m}(b_l-\lambda)^{-1}\widehat{K}_l\right)\varphi = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

где $\widehat{S}_{1,2} := S_{1,2}A^{-1/2}$, $\widehat{S}_{2,1} := A^{-1/2}S_{2,1}$, $\widehat{S}_{2,2} := A^{-1/2}S_{2,2}A^{-1/2}$, $\widehat{K}_l := A^{-1/2}K_lA^{-1/2}$ $(l=\overline{1,m})$. Операторы $\widehat{S}_{1,2}$, $\widehat{S}_{2,1}$ и $\widehat{S}_{2,2}$ компактны, а I_0, I_G — единичные операторы в $\vec{J}_0(\Omega,\delta)$ и $\vec{G}(\Omega,\delta)$.

Для вывода окончательной системы операторных уравнений получим удобное для дальнейшего представление для операторов $\widehat{K}_l$ $(l=\overline{1,m})$. С этой целью рассмотрим гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций, суммируемых со своими квадратами по области Ω, а также его подпространство $L_{2,\rho_0}(\Omega) := \{f\in L_2(\Omega) |\, (f,\rho_0^{1/2})_{L_2(\Omega)} = 0\}$. Определим операторы

$$\Pi f := f - \int\limits_\Omega \rho_0^{1/2}(z)f(x)\,d\Omega\left(\int\limits_\Omega \rho_0^{1/2}(z)\,d\Omega\right)^{-1}, \quad \Pi^\perp := I - \Pi,$$

где I — единичный оператор в $L_2(\Omega)$. Несложно проверить, что введенные операторы Π и $\Pi^\perp$ являются ортопроекторами пространства $L_2(\Omega)$ на $L_{2,\rho_0}(\Omega)$ и $L_{2,\rho_0}^\perp(\Omega)$, соответственно.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2.1. *Для операторов $\widehat{K}_l$ $(l=\overline{1,m})$ справедливо следующее представление: $\widehat{K}_l = U^*M_\Pi(p_l)U$, $p_l(x) := k_l(x)\rho_0(z)$ $(l=\overline{1,m})$, где $U : \vec{G}(\Omega,\delta) \to L_{2,\rho_0}(\Omega)$ — унитарный оператор, а $M_\Pi(p_l)$ — сужение на подпространство $L_{2,\rho_0}(\Omega)$ оператора умножения на функцию $p_l(x)$ в пространстве $L_2(\Omega)$. Операторы $\widehat{K}_l$ $(l=\overline{1,m})$ являются ограниченными, самосопряженными в $\vec{G}(\Omega,\delta)$ и*

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} p_l(x)\|\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}(\Omega,\delta)} \geq (\widehat{K}_l\nabla\Phi,\nabla\Phi)_{\vec{G}(\Omega,\delta)} \geq \min_{x\in\overline{\Omega}} p_l(x)\|\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}(\Omega,\delta)}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Определим оператор $T\nabla\Phi := \rho_0^{-1/2}\operatorname{div}(\delta\nabla\Phi)$, $\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(A^{1/2}) = H_A$ (см. лемму 1.2). Оператор T замкнут из $\vec{G}(\Omega,\delta)$ в $L_{2,\rho_0}(\Omega)$. Сопряженный к T оператор $T^*\varphi = -\nabla(\rho_0^{-1/2}\varphi)$ задан на плотном множестве $\mathcal{D}(T^*) \subset L_{2,\rho_0}(\Omega)$ и имеет нулевое ядро. Отсюда следует, что замыкание образа оператора T совпадает со всем пространством $L_{2,\rho_0}(\Omega)$. Из этих рассуждений и равенства $A = T^*T$ на $\mathcal{D}(A)$ следует, что имеет место полярное представление $T = UA^{1/2}$ (см. [11, с. 420]), где $U : \vec{G}(\Omega,\delta) \to L_{2,\rho_0}(\Omega)$ — унитарный оператор.

Теперь операторы K_l $(l = \overline{1,m})$ с помощью введенных операторов T и U могут быть представлены в следующей форме:

$$K_l = T^*\Pi M(p_l)\Pi T = A^{1/2}U^*\Pi M(p_l)\Pi U A^{1/2}.$$

Следовательно, $\widehat{K}_l = A^{-1/2}K_lA^{-1/2} = U^*\Pi M(p_l)\Pi U = U^*M_\Pi(p_l)U$, где $M_\Pi(p_l) := \Pi M(p_l)\Pi$ — сужение на подпространство $L_{2,\rho_0}(\Omega)$ оператора умножения на функцию $p_l(x)$ в пространстве $L_2(\Omega)$.

Ограниченность и самосопряженность операторов $\widehat{K}_l$ $(l = \overline{1,m})$ очевидна. Докажем оценки (2.6). Пусть $\nabla\Phi \in \vec{G}(\Omega,\delta)$, тогда

$$\begin{aligned}
\max_{x\in\overline{\Omega}} p_l(x)\|\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}(\Omega,\delta)} &= \max_{x\in\overline{\Omega}} p_l(x)\|U\nabla\Phi\|^2_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} \\
&\geq (M(p_l)U\nabla\Phi, U\nabla\Phi)_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} = (M(p_l)\Pi U\nabla\Phi, \Pi U\nabla\Phi)_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} \\
&= (\widehat{K}_l\nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\vec{G}(\Omega,\delta)} \geq \dots \geq \min_{x\in\overline{\Omega}} p_l(x)\|\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}(\Omega,\delta)}.
\end{aligned}$$

Здесь была использована унитарность оператора U, свойство ортогональности проектора Π, а также равенство $U = \Pi U$. $\square$

С помощью полученного представления для операторов $\widehat{K}_l$ преобразуем систему (2.5) и придем к следующей основной спектральной задаче, записанной в векторно-матричной форме в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega,\delta) \oplus \vec{G}(\Omega,\delta)$:

$$\mathcal{L}(\lambda)\xi := \lambda^2\mathcal{A}\xi - 2\omega_0 i\lambda\mathcal{S}\xi + \mathcal{Q}(\lambda)\xi = 0, \tag{2.7}$$

где

$$\xi := (\vec{v};\varphi)^t \in \mathcal{H}, \quad \mathcal{A} := \operatorname{diag}(I_0, A^{-1}),$$

$$\mathcal{S}_{1,1} := S_{1,1}, \quad \mathcal{S}_{1,2} := \widehat{S}_{1,2}, \quad \mathcal{S}_{2,1} := \widehat{S}_{2,1}, \quad \mathcal{S}_{2,2} := \widehat{S}_{2,2},$$

$$\mathcal{Q}(\lambda) := \operatorname{diag}\Big(0, I_G - \sum_{l=1}^{m}(b_l-\lambda)^{-1}U^*M_\Pi(p_l)U\Big).$$

Задача (2.7), которую мы назовем спектральной задачей, ассоциированной с задачей о нормальных колебаниях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей вращающееся твердое тело, и будет предметом дальнейших исследований.

2.2. Предельный спектр задачи и локализация спектра

Определим вспомогательную оператор-функцию $M(\lambda)$ и функцию $p_\lambda(x)$ $(x \in \Omega)$ по формулам:

$$M(\lambda) := I_G - \sum_{l=1}^{m} \frac{U^* M_\Pi(p_l) U}{b_l - \lambda},$$
$$p_\lambda(x) := 1 - \sum_{l=1}^{m} \frac{p_l(x)}{b_l - \lambda} \quad (x \in \Omega). \tag{2.8}$$

Введем следующие условия на физические параметры системы:

$$(a): \; p_0(x) = 1 - \sum_{l=1}^{m} \frac{k_l(x)\rho_0(z)}{b_l} > 0 \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}; \tag{2.9}$$

$$(b): \; \exists\, a_l > 0\, (l = \overline{1,m}): \sum_{l=1}^{m} a_l = 1, \; a_l - \frac{k_l(x)\rho_0(z)}{b_l} > 0 \;\forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{2.10}$$

Очевидно, что из условия (2.10) следует (2.9), а значит условие (b) более жесткое. Эти ограничения предполагают, что времена релаксации b_l^{-1} в системе и корректирующие функции $k_l(x)$ достаточно малы в сравнении со стационарной плотностью $\rho_0(z)$. Отметим здесь также, что функции $k_l(x) > 0$ $(l = \overline{1,m})$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми в $\overline{\Omega}$.

Пусть выполнено условие (2.9). Рассмотрим уравнение $p_\lambda(x) = 0$. При каждом фиксированном $x \in \overline{\Omega}$, как несложно проверить, это уравнение имеет ровно m действительных положительных корней, которые разделены числами b_l $(l = \overline{1,m})$ (напомним, что $0 < b_1 < \cdots < b_m$). В силу непрерывности функции $p_\lambda(x)$ по пространственным переменным при изменении $x \in \overline{\Omega}$ корни уравнения будут меняться непрерывно и в совокупности образовывать ровно m отрезков $\Delta_l \subset (b_{l-1}, b_l)$ $(b_0 := 0, \; l = \overline{1,m})$.

Лемма 2.2. *Весь спектр оператор-функции $M(\lambda)$ существенный (предельный) и состоит из объединения m отрезков Δ_l $(l = \overline{1,m})$: $\sigma(M(\lambda)) = \sigma_{ess}(M(\lambda)) = \cup_{l=1}^{m} \Delta_l$.*

Доказательство. Рассмотрим спектральную задачу $M(\lambda)\varphi = 0$. Осуществляя замену $U\varphi =: f \in L_{2,\rho_0}(\Omega)$, преобразуем ее к эквивалентной спектральной задаче $M_\Pi(p_\lambda) f = \Pi M(p_\lambda) \Pi f = 0$. Дальнейшее доказательство основано на построении некомпактной последовательности Вейля для последней задачи.

Отметим, что совокупность тех значений λ, для которых функция $p_\lambda(x)$ имеет нули в Ω, является плотным множеством в $\cup_{l=1}^m \Delta_l$. Пусть теперь λ_0 из этого плотного в $\cup_{l=1}^m \Delta_l$ множества и $x_0 \in \Omega$ — один из нулей функции $p_{\lambda_0}(x)$. Рассмотрим шар $S_r := \{x \in \mathbb{R}^3 |\ |x - x_0| \le r\}$ и $S_{r,+} := \{|x - x_0| \le r,\ x_3 > x_{0,3}\}$, $S_{r,-} := \{|x - x_0| \le r,\ x_3 \le x_{0,3}\}$ — верхнюю и нижнюю его половины. Определим семейство функций

$$f_r(x) := \|\rho_0^{-1/2}\chi_{S_r}\|^{-1}_{L_2(\Omega)}\rho_0^{-1/2}(z)(\chi_{S_{r,+}}(x) - \chi_{S_{r,-}}(x)), \quad r > 0, \tag{2.11}$$

где $\chi_S(x)$ — индикатор множества S. Пусть r таково, что $S_r \subset \Omega$, тогда построенные функции обладают свойствами:

$$(f, \rho_0^{1/2})_{L_2(\Omega)} = \|\rho_0^{-1/2}\chi_{S_r}\|^{-1}_{L_2(\Omega)} \int_\Omega (\chi_{S_{r,+}}(x) - \chi_{S_{r,-}}(x))\, d\Omega = 0,$$

$$\|f_r\|^2_{L_2(\Omega)} = \|\rho_0^{-1/2}\chi_{S_r}\|^{-2}_{L_2(\Omega)} \int_\Omega \rho_0^{-1}(z)\chi_{S_r}(x)\, d\Omega = 1,$$

а значит $f_r \in L_{2,\rho_0}(\Omega)$, $\|f_r\|_{L_2(\Omega)} = 1$ (при достаточно малых $r > 0$).

Из вида построенных функций следует, что множество $\{f_r\}$ некомпактно в $L_{2,\rho_0}(\Omega)$. Осуществим следующие оценки

$$\begin{aligned}
\|\Pi M(p_{\lambda_0})\Pi f_r\|^2_{L_2(\Omega)} &\le \|M(p_{\lambda_0})\Pi f_r\|^2_{L_2(\Omega)} \\
&= \|M(p_{\lambda_0}) f_r\|^2_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega |p_{\lambda_0}(x) f_r(x)|^2\, d\Omega \\
&= \|\rho_0^{-1/2}\chi_{S_r}\|^{-2}_{L_2(\Omega)} \int_\Omega \rho_0^{-1}(z) p^2_{\lambda_0}(x)\chi_{S_r}(x)\, d\Omega \\
&= \|\rho_0^{-1/2}\chi_{S_r}\|^{-2}_{L_2(\Omega)} \int_{S_r} \rho_0^{-1}(z)\, dS_r \cdot p^2_{\lambda_0}(y)\big|_{y\in S_r} \\
&= p^2_{\lambda_0}(y)\big|_{y\in S_r} \to 0 \quad (r \to 0),
\end{aligned}$$

где последнее соотношение следует из непрерывности функции $p_{\lambda_0}(x)$ и равенства $p_{\lambda_0}(x_0) = 0$. Таким образом, $\lambda_0 \in \sigma_{ess}(M(\lambda))$. Из свойства замкнутости спектра следует утверждение леммы. □

Для дальнейшего понадобится следующая лемма (см. [12]).

Лемма 2.3 (Г. В. Радзиевский [12], см. также [13]). *Пусть H — гильбертово пространство,* $0 \le A = A^*$, $B \in \mathfrak{S}_\infty$, $0 \le \beta < 1$, *тогда*

$$\|(I - \lambda A)^{-1}A^\beta\| \le C(\beta, \arg\lambda)|\lambda|^{-\beta}, \quad \lambda \in \Lambda_\varepsilon := \{\lambda \in \mathbb{C}|\ |\arg\lambda| > \varepsilon\},$$

$$\lim_{\eta\to\infty}\sup_{\substack{|\lambda|>\eta,\\ |\arg\lambda|>\varepsilon}}|\lambda|^{\beta}\|(I-\lambda A)^{-1}A^{\beta}B\|=0. \tag{2.12}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. *Для любого как угодно малого $\varepsilon>0$ существует $R=R(\varepsilon)>2\omega_0$ такое, что весь спектр пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ принадлежит множеству $\sigma_R:=\Lambda^{+}_{R,\varepsilon}\cup\Lambda^{-}_{R,\varepsilon}\cup C_R$, где*

$$\Lambda^{\pm}_{R,\varepsilon}:=\{\lambda\in\mathbb{C}|\ \ |\lambda|>R,\ |\arg\lambda\mp\pi/2|<\varepsilon\},\ -\pi<\arg\lambda\le\pi, \tag{2.13}$$

C_R — круг радиуса R с центром в начале координат. Спектр, лежащий вне множества $\Lambda:=[-2\omega_0 i,2\omega_0 i]\cup\{\cup_{l=1}^{m}\Delta_l\}$, состоит из изолированных конечнократных собственных значений (дискретный). Возможными предельными точками спектра могут быть только точки указанного множества и бесконечно удаленная точка.

Доказательство. Установим прежде, что точки $\lambda=b_l$ ($l=\overline{1,m}$), которые не являются собственными значениями $\mathcal{L}(\lambda)$, не являются также и предельными точками спектра пучка $\mathcal{L}(\lambda)$. Для этого достаточно доказать, что пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ непрерывно обратим в некоторой окрестности этих точек. Рассмотрим уравнение $\mathcal{L}(\lambda)\xi_1=\xi_2$, где $\xi_2:=(\vec{v}_2;\varphi_2)^t$ из $\mathcal{H}$ — заданный элемент, а $\xi_1:=(\vec{v}_1;\varphi_1)^t$ — искомый. Если λ близко к b_{l_0} то из первого соотношения системы, через которую можно записать последнее уравнение, можно с помощью ограниченных оператор-функций выразить $\vec{v}_1$ через φ_1 и $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_1=\lambda^{-1}S(\lambda)\Big(2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{1,2}\varphi_1+\vec{v}_2\Big),\ \text{где}\ S(\lambda):=(\lambda I_0-2\omega_0 iS_{1,1})^{-1}. \tag{2.14}$$

Подставим это представление во второе уравнение системы:

$$\Big(\lambda^2A^{-1}-2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{2,2}+M(\lambda)\Big)\varphi_1-2\omega_0 i\widehat{S}_{2,1}S(\lambda)\Big(2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{1,2}\varphi_1+\vec{v}_2\Big)=\varphi_2. \tag{2.15}$$

Учитывая вид оператор-функции $M(\lambda)$, из последнего соотношения можно с помощью ограниченных оператор-функций выразить φ_1 через φ_2 и $\vec{v}_2$, если только λ достаточно близко к b_{l_0}. Это означает, что точка b_{l_0} не является предельной для спектра пучка $\mathcal{L}(\lambda)$.

Зафиксируем $\varepsilon>0$ и покажем, что существует $R>2\omega_0$ такое, что $\sigma(\mathcal{L}(\lambda))\subset\sigma_R$. Для этого достаточно показать, что пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\sigma_R$. В связи с этим опять рассмотрим уравнение $\mathcal{L}(\lambda)\xi_1=\xi_2$. Будем считать, что $|\lambda|>2\omega_0=\|2\omega_0 iS_{1,1}\|$, тогда в последней задаче можно с помощью ограниченных оператор-функций исключить $\vec{v}_1$ и прийти к задаче (2.15), которую представим в форме:

$$l(\lambda)\varphi_1=2\omega_0 i\widehat{S}_{2,1}S(\lambda)\vec{v}_2+\varphi_2,\quad l(\lambda):=I_G+\lambda^2A^{-1}+G(\lambda), \tag{2.16}$$

$$G(\lambda) := -\sum_{l=1}^{m}(b_l-\lambda)^{-1}U^*M_\Pi(p_l)U - 2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{2,2} + 4\omega_0^2\lambda\widehat{S}_{2,1}S(\lambda)\widehat{S}_{1,2}.$$

Нужно показать, что оператор-функция $l(\lambda)$ непрерывно обратима при $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\sigma_R$ (при достаточно большом $R>2\omega_0$), тогда из (2.14)–(2.16) будет следовать, что пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\sigma_R$. В самом деле, представим оператор-функцию $l(\lambda)$ в виде:

$$l(\lambda) = (I_G+i\lambda A^{-1/2})\Big(I_G+(I_G+i\lambda A^{-1/2})^{-1} \times G(\lambda)(I_G-i\lambda A^{-1/2})^{-1}\Big)(I_G-i\lambda A^{-1/2}).$$

Здесь крайние скобки — непрерывно обратимые при $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\sigma_R$ операторы. Таким образом, для непрерывной обратимости $l(\lambda)$ достаточно показать, что

$$\|(I_G+i\lambda A^{-1/2})^{-1}G(\lambda)(I_G-i\lambda A^{-1/2})^{-1}\|\to 0 \quad (\lambda\to\infty). \tag{2.17}$$

Несложно проверить, что $\|S(\lambda)\| = O(|\lambda|^{-1})$ при $\lambda\to\infty$. Отсюда и из оценки (2.12) (при $\beta=0$) следует, что в (2.17) в оценке нуждается лишь следующее (наиболее сильное) выражение:

$$\begin{aligned}&\|(I_G+i\lambda A^{-1/2})^{-1}\widehat{S}_{2,2}(I_G-i\lambda A^{-1/2})^{-1}\|\\ &\quad= \|(I_G+i\lambda A^{-1/2})^{-1}A^{-1/2}S_{2,2}A^{-1/2}(I_G-i\lambda A^{-1/2})^{-1}\|\\ &\quad\le \|(I_G+i\lambda A^{-1/2})^{-1}A^{-1/4}(A^{-1/4}S_{2,2}A^{-1/4})\|\\ &\qquad\times\|(I_G-i\lambda A^{-1/2})^{-1}A^{-1/4}\| = o(|\lambda|^{-1})\\ &\qquad\qquad(\lambda\to\infty,\ \lambda\in\mathbb{C}\backslash\sigma_R).\end{aligned} \tag{2.18}$$

Здесь использованы оценки из леммы 2.3. Из (2.18) и предыдущих рассуждений следует, что для каждого $\varepsilon>0$ существует $R=R(\varepsilon)>2\omega_0$ такое, что пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\sigma_R$, а значит $\sigma(\mathcal{L}(\lambda))\subset\sigma_R=\Lambda^+_{R,\varepsilon}\cup\Lambda^-_{R,\varepsilon}\cup C_R$.

Перейдем от задачи (2.7) к задаче для фредгольмовой оператор-функции:

$$\mathcal{L}_F(\lambda)\xi := \begin{pmatrix}\lambda(\lambda I_0-2\omega_0 iS_{1,1}) & 0\\ 0 & M(\lambda)\end{pmatrix}^{-1}\mathcal{L}(\lambda)\xi =: (\mathcal{I}+\mathcal{F}(\lambda))\xi = 0, \tag{2.19}$$

где $\mathcal{I}$ — это единичный оператор в $\mathcal{H}$, а оператор-функция $\mathcal{F}(\lambda)$, как несложно проверить, принимает компактные значения при $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\Lambda$.

На множестве $\mathbb{C}\backslash\Lambda$ спектры пучков $\mathcal{L}_F(\lambda)$ и $\mathcal{L}(\lambda)$ совпадают. Поскольку точки, достаточно близкие к числам b_l, являются регулярными точками для $\mathcal{L}(\lambda)$, то из (2.19) заключаем, что они же будут регулярными и для $\mathcal{L}_F(\lambda)$, а значит пучок $\mathcal{L}_F(\lambda)$ является регулярным в $\mathbb{C}\backslash\Lambda$. Отсюда следует (см. [14], а также [6, с. 74]), что все точки спектра, не принадлежащие множеству Λ, являются изолированными собственными значениями оператор-функции задачи (2.19), а значит и $\mathcal{L}(\lambda)$. Собственные элементы, отвечающие этим собственным значениям, имеют конечные кратности. Точками сгущения могут являться только особенности оператор-функции $\mathcal{F}(\lambda)$, то есть множество Λ и бесконечно удаленная точка. $\square$

Основываясь на доказанном утверждении, установим теорему о дискретном и существенном спектре задачи (2.7).

Теорема 2.2. *Предельный* (*существенный*) *спектр пучка* $\mathcal{L}(\lambda)$ *совпадает с множеством* Λ*:* $\sigma_{ess}(\mathcal{L}(\lambda)) = \Lambda$.

Доказательство. Пусть λ принимает значения из окрестности множества $\cup_{l=1}^{m}\Delta_l$, тогда в уравнении $\mathcal{L}(\lambda)\xi = 0$ с помощью ограниченных оператор-функций можно исключить $\vec{v}$ и прийти к задаче

$$\begin{aligned}\big(M(\lambda) + F_1(\lambda)\big)\varphi := \Big(\lambda^2 A^{-1} - 2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{2,2} + M(\lambda)\\ + 4\omega_0^2\lambda\widehat{S}_{2,1}(\lambda I_0 - 2\omega_0 i S_{1,1})^{-1}\widehat{S}_{1,2}\Big)\varphi = 0,\end{aligned} \quad (2.20)$$

где $F_1(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty$. Пусть $\lambda_0 \in \cup_{l=1}^{m}\Delta_l$, тогда $\{\lambda = 0\} \subset \sigma_{ess}(M(\lambda_0))$. Оператор $M(\lambda_0)$ самосопряжен, а $F_1(\lambda_0) \in \mathfrak{S}_\infty$. По теореме Г. Вейля $\{\lambda = 0\} \subset \sigma_{ess}(M(\lambda_0) + F_1(\lambda_0))$. Следовательно, существует некомпактная последовательность Вейля $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\|M(\lambda_0)\varphi_n + F_1(\lambda_0)\varphi_n\|_{\vec{G}(\Omega,\delta)} \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что $\lambda_0 \in \sigma_{ess}(\mathcal{L}(\lambda))$, а значит $\cup_{l=1}^{m}\Delta_l \subset \sigma_{ess}(\mathcal{L}(\lambda))$.

Рассмотрим теперь пучок $l_1(\lambda) := \lambda^2 A^{-1} - 2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{2,2} + M(\lambda)$. Пучок $M^{-1}(\lambda)l_1(\lambda)$ имеет вид фредгольмовой оператор-функции, регулярной в $\mathbb{C}\backslash\cup_{l=1}^{m}\Delta_l$, а значит в некоторой окрестности отрезка $[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$ может иметь лишь конечное количество изолированных собственных значений конечной кратности. Это же утверждение верно и для пучка $l_1(\lambda)$.

Пусть теперь λ принимает значения из некоторой окрестности отрезка $[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$ и не совпадает ни с одним собственным значением пучка $l_1(\lambda)$. Тогда в уравнении $\mathcal{L}(\lambda)\xi = 0$ с помощью ограниченных оператор-функций можно исключить φ и прийти к задаче

$$\big(\lambda I_0 - 2\omega_0 i S_{1,1} + F_2(\lambda)\big)\vec{v} := \Big(\lambda I_0 - 2\omega_0 i S_{1,1} + 4\omega_0^2\lambda \widehat{S}_{1,2} l_1^{-1}(\lambda)\widehat{S}_{2,1}\Big)\vec{v} = 0,$$

где $F_2(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty$. Осуществим в этой задаче замену спектрального параметра $\lambda = i\mu$ и умножим обе части уравнения на мнимую единицу: $(2\omega_0 S_{1,1} - \mu I_0 + iF_2(i\mu))\vec{v} = 0$. Применяя к этой задаче рассуждения из первой части теоремы и используя свойство замкнутости спектра, получим, что $[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i] \subset \sigma_{ess}(\mathcal{L}(\lambda))$.

Из проведенных рассуждений следует, что $\Lambda \subset \sigma_{ess}(\mathcal{L}(\lambda))$. В силу теоремы 2.1 вне множества Λ спектр пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ — дискретен, следовательно, имеет место не включение, а равенство $\Lambda = \sigma_{ess}(\mathcal{L}(\lambda))$. □

Докажем, что спектр задачи (2.7) лежит в правой замкнутой полуплоскости. Запишем задачу $\mathcal{L}(\lambda)\xi = 0$, где $\xi := (\vec{v};\varphi)^t \in \mathcal{H}$, в виде

$$\mathcal{L}(\lambda)\xi := \left(\lambda^2\mathcal{A} - 2\omega_0 i\lambda\mathcal{S} + \mathcal{P} - \sum_{l=1}^{m}(b_l-\lambda)^{-1}\mathcal{K}_l\right)\xi = 0, \tag{2.21}$$

где $\mathcal{P} := \operatorname{diag}(0, I_G)$, $\mathcal{K}_l := \operatorname{diag}(0, U^* M_\Pi(p_l)U) = \operatorname{diag}(0, \widehat{K}_l)$.

Теорема 2.3. *Пусть выполнено условие* (b) (*см.* (2.10)), *тогда весь спектр задачи* (2.21) *лежит в полосе* $\{0 \le \operatorname{Re}\lambda < b_m\}$.

Доказательство. Из теоремы 2.2 следует, что существенный спектр задачи (2.21) попадает в указанную полосу. Осталось доказать, что все изолированные собственные значения задачи попадают туда же. Пусть $\lambda \ne 0$ — собственное значение задачи (2.21), а $\xi = (\vec{v};\varphi)^t$ — отвечающий ему собственный элемент, тогда

$$\lambda(\mathcal{A}\xi,\xi) - 2\omega_0 i(\mathcal{S}\xi,\xi) + \frac{1}{\lambda}(\mathcal{P}\xi,\xi) - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{\lambda(b_l-\lambda)}(\mathcal{K}_l\xi,\xi) = 0. \tag{2.22}$$

Выделив действительную часть из (2.22) получим, что

$$\operatorname{Re}\lambda\left[(\mathcal{A}\xi,\xi) + \frac{(\mathcal{P}\xi,\xi)}{|\lambda|^2} + \sum_{l=1}^{m}\frac{|\lambda|^2 - |b_l-\lambda|^2}{|\lambda|^2|b_l-\lambda|^2}\cdot\frac{(\mathcal{K}_l\xi,\xi)}{b_l}\right] = \sum_{l=1}^{m}\frac{(\mathcal{K}_l\xi,\xi)}{|b_l-\lambda|^2}. \tag{2.23}$$

Выберем теперь положительные числа a_l $(l = \overline{1,m})$, как в условии (b) (см. (2.10)), тогда из леммы 2.1 получим, что

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}\xi,\xi)a_l b_l - (\mathcal{K}_l\xi,\xi) &= \|\varphi\|^2_{\vec{G}(\Omega,\delta)} a_l b_l - (\widehat{K}_l\varphi,\varphi)_{\vec{G}(\Omega,\delta)} \\ &\ge \|\varphi\|^2_{\vec{G}(\Omega,\delta)}(a_l b_l - \max_{x\in\overline{\Omega}} p_l(x)) \ge 0\end{aligned}$$

и

$$\sum_{l=1}^{m}\left[\frac{|\lambda|^2-|b_l-\lambda|^2}{|\lambda|^2|b_l-\lambda|^2}\cdot\frac{(\mathcal{K}_l\xi,\xi)}{b_l}+\frac{a_l(\mathcal{P}\xi,\xi)}{|\lambda|^2}\right]$$
$$=\sum_{l=1}^{m}\frac{(\mathcal{K}_l\xi,\xi)|\lambda|^2+|b_l-\lambda|^2((\mathcal{P}\xi,\xi)a_lb_l-(\mathcal{K}_l\xi,\xi))}{b_l|\lambda|^2|b_l-\lambda|^2}\geq 0.$$

Отсюда и из (2.23) следует, что $\operatorname{Re}\lambda\geq 0$. Если $\operatorname{Re}\lambda>0$, то из последнего неравенства и из (2.23) можно вывести, что $\operatorname{Re}\lambda<b_m$. □

2.3. Об асимптотике собственных значений

Из теоремы 2.1 следует, что бесконечно удаленная точка является возможной предельной точкой для некоторых ветвей собственных значений пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, локализованных у мнимой оси. Для доказательства существования этих ветвей и отыскания асимптотических формул понадобится следующий абстрактный результат (см. [13]), опирающийся на результаты работы [15].

Лемма 2.4 ([13]). *Пусть $0<C=C^*\in\mathfrak{S}_\infty$, причем собственные значения оператора C имеют степенную асимптотику. Введем обозначения:*

$$l(\lambda):=I+\lambda^2C+G(\lambda),\quad T(\lambda):=(I-\lambda C^{1/2})^{-1}G(\lambda)(I+\lambda C^{1/2})^{-1}.$$

Пусть оператор-функция $G(\lambda)$ аналитична в секторах $\Lambda^+_{R,\varepsilon}$ и $\Lambda^-_{R,\varepsilon}$, а оператор-функция $T(\lambda)$ удовлетворяет следующему условию: $T(\lambda)\to 0$ $(\lambda\to\infty,\ \lambda\in\Lambda^\pm_{R,\varepsilon})$. Тогда

$$\lambda_k^{(\pm i)}(l(\lambda))=\pm i\lambda_k^{1/2}(C^{-1})(1+o(1))\quad(k\to\infty).$$

Для исследуемой задачи имеет место теорема.

Теорема 2.4. *Для любого как угодно малого $\varepsilon>0$ и достаточно большого $R=R(\varepsilon)$ задача (2.7) имеет две ветви $\{\lambda_k^{(\pm i)}\}_{k=1}^\infty$ собственных значений, расположенных в секторах $\Lambda^+_{R,\varepsilon}$ и $\Lambda^-_{R,\varepsilon}$, со следующей асимптотикой: $\lambda_k^{(\pm i)}(\mathcal{L}(\lambda))=\pm i\lambda_k^{1/2}(A)(1+o(1))$ $(k\to\infty)$.*

Доказательство. Будем считать, что $|\lambda|>2\omega_0$ и исключим $\vec{v}$ из задачи $\mathcal{L}(\lambda)\xi=0$, в результате получим задачу $l(\lambda)\varphi=0$, где пучок $l(\lambda)$ определен в (2.16). Из леммы 1.2 следует, что оператор $A^{-1}>0$ имеет степенную асимптотику собственных значений. Для пучка $l(\lambda)$ построим оператор-функцию $T(\lambda)$ из леммы 2.4. При помощи оценок, аналогичных тем, что были проведены в (2.18), можно убедиться, что $T(\lambda)\to 0$ $(\lambda\to\infty,\ \lambda\in\Lambda^\pm_{R,\varepsilon})$. □

2.4. О двукратной полноте с дефектом части собственных и присоединенных элементов

Поступим далее как в теореме 2.1 при выводе задачи (2.15) (или (2.16)). А именно, будем считать, что $\lambda \in \mathbb{C}\backslash[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$ и исключим $\vec{v}$ из задачи $\mathcal{L}(\lambda)\xi = 0$. В результате получим задачу

$$\begin{gathered} l(\lambda)\varphi = 0, \quad \varphi \in \vec{G}(\Omega), \\ l(\lambda) := I_G + \lambda^2 A^{-1} - 2\omega_0 i\lambda \widehat{S}_{2,2} + G_1(\lambda), \\ G_1(\lambda) := -\sum_{l=1}^{m}(b_l - \lambda)^{-1} U^* M_\Pi(p_l) U + 4\omega_0^2 \lambda \widehat{S}_{2,1} S(\lambda) \widehat{S}_{1,2}. \end{gathered} \tag{2.24}$$

В задаче (2.24) осуществим замену $\lambda A^{-1/2}\varphi = \widehat{\varphi}$. Полученную систему запишем в векторно-матричной форме: $\mathcal{M}(\lambda)\eta = 0$, где $\eta := (\varphi; \widehat{\varphi})^t \in \vec{G}^{(2)} := \vec{G}(\Omega,\delta) \oplus \vec{G}(\Omega,\delta)$,

$$\mathcal{M}(\lambda) := \begin{pmatrix} I_G & 0 \\ 0 & I_G \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2\omega_0 i\widehat{S}_{2,2} & A^{-1/2} \\ -A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Относительно пучков $\mathcal{M}(\lambda)$ и $l(\lambda)$ имеет место лемма.

Лемма 2.5. *Набор элементов $\eta_k := (\varphi_k; \widehat{\varphi}_k)^t$ $(k = \overline{0, n-1})$ является цепочкой из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $\mathcal{M}(\lambda)$, отвечающей собственному значению $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$, тогда и только тогда, когда φ_k $(k = \overline{0, n-1})$ — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $l(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0 и*

$$\begin{gathered} \widehat{\varphi}_0 = \lambda_0 A^{-1/2}\varphi_0, \\ \widehat{\varphi}_k = \lambda_0 A^{-1/2}\varphi_k + A^{-1/2}\varphi_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n-1. \end{gathered} \tag{2.25}$$

Опираясь на лемму 2.5, докажем теорему о двукратной полноте с дефектом части системы собственных и присоединенных элементов операторного пучка $l(\lambda)$.

Теорема 2.5. *Пусть $\varphi_k^{(l)}$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$ — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $l(\lambda)$ из (2.24), отвечающая собственному значению λ_l. Тогда система элементов $\eta_k^{(l)} := (\varphi_k^{(l)}; \widehat{\varphi}_k^{(l)})^t$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$, где l пробегает все индексы, отвечающие собственным значениям λ_l пучка $l(\lambda)$, лежащим вне круга радиуса R $(R > \max\{2\omega_0, b_m\})$, а $\varphi_k^{(l)}$ и $\widehat{\varphi}_k^{(l)}$ связаны соотношениями (2.25) для каждого l, образует полную в $\vec{G}^{(2)}$ систему с точностью до конечного дефекта.*

Доказательство. В силу леммы 2.5 нужно доказать, что система собственных и присоединенных элементов пучка $\mathcal{M}(\lambda)$, отвечающая собственным значениям, лежащим вне круга некоторого радиуса R, полна в $\vec{G}^{(2)}$ с точностью до конечного дефекта. Осуществим в задаче $\mathcal{M}(\lambda)\eta = 0$ замену спектрального параметра: $\lambda = -i\mu^{-1}$, где μ — новый спектральный параметр. Умножив правую и левую части полученного выражения на $-\mu$, придем к следующей спектральной задаче:

$$-\mu\mathcal{M}(-i\mu^{-1})\eta = \bigl(\widehat{\mathcal{A}} - \mu\widehat{\mathcal{I}} - \mu\widehat{\mathcal{G}}(\mu)\bigr)\eta = 0, \tag{2.26}$$

где

$$\widehat{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} 2\omega_0\widehat{S}_{2,2} & iA^{-1/2} \\ -iA^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{G}}(\mu) := \begin{pmatrix} G_1(-i\mu^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а $\widehat{\mathcal{I}}$ — единичный оператор в $\vec{G}^{(2)}$. Здесь $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}^* \in \mathfrak{S}_p(\vec{G}^{(2)})$ $(p > 3)$, $\mathrm{Ker}\widehat{\mathcal{A}} = \{0\}$, а $\widehat{\mathcal{G}}(\mu)$ — голоморфная в круге $|\mu| < R^{-1}$ оператор-функция, принимающая значения из $\mathcal{L}(\vec{G}^{(2)})$. По теореме из [6, с. 78] получаем, что система собственных и присоединенных элементов оператор-функции $-\mu\mathcal{M}(-i\mu^{-1})$, отвечающих собственным значениям из круга $|\mu| < R^{-1}$, имеет не более конечного дефекта в $\vec{G}^{(2)}$. После обратной замены спектрального параметра получим, что система собственных и присоединенных элементов оператор-функции $\mathcal{M}(\lambda)$, отвечающих собственным значениям, лежащим вне круга $|\lambda| < R$, имеет не более конечного дефекта в $\vec{G}^{(2)} = \vec{G}(\Omega,\delta) \oplus \vec{G}(\Omega,\delta)$. □

Из леммы 2.5 и теоремы 2.5 как следствие получаем следующее главное утверждение о двукратной полноте с дефектом для исходного операторного пучка $\mathcal{L}(\lambda)$.

Теорема 2.6. *Обозначим через $\mathcal{P}_G$ ортопроектор пространства $\mathcal{H}$ на $\vec{G}(\Omega,\delta)$. Пусть $\xi_k^{(l)}$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$ — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_l. Тогда система элементов $\eta_k^{(l)} := (\mathcal{P}_G\xi_k^{(l)}; \widehat{\xi}_k^{(l)})^t$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$, где l пробегает все индексы, отвечающие собственным значениям λ_l пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, лежащим вне круга радиуса R $(R > \max\{2\omega_0, b_m\})$, а $\xi_k^{(l)}$ и $\widehat{\xi}_k^{(l)}$ связаны соотношениями*

$$\widehat{\xi}_0 = \lambda_0 A^{-1/2}\mathcal{P}_G\xi_0,$$
$$\widehat{\xi}_k = \lambda_0 A^{-1/2}\mathcal{P}_G\xi_k + A^{-1/2}\mathcal{P}_G\xi_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, k(\lambda_l),$$

для каждого l, образует полную в $\vec{G}(\Omega,\delta) \oplus \vec{G}(\Omega,\delta)$ систему с точностью до конечного дефекта.

Отметим здесь, что если $\omega_0 = 0$, то, как будет показано далее, при некоторых условиях система элементов $\eta_k^{(l)}$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$ из теоремы 2.6, где l пробегает все индексы, отвечающие собственным значениям λ_l пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, лежащим у мнимой оси, будет образовывать полную в $\vec{G}^{(2)} = \vec{G}(\Omega,\delta) \oplus \vec{G}(\Omega,\delta)$ систему.

2.5. Свойства спектральной задачи при $\omega_0 = 0$

Если $\omega_0 = 0$, то задача $\mathcal{L}(\lambda)\xi = 0$ расщепляется на два независимых уравнения (первое уравнение тривиально: $\lambda^2\vec{v} = 0$) и число $\lambda = 0$ формально является бесконечнократным собственным значением задачи, которому отвечают собственные элементы вида $\xi = (\vec{v}; 0)^t$, где $\vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega,\delta)$. В этом случае будем считать, что с изучаемой спектральной задачей ассоциировано второе нетривиальное уравнение из системы $\mathcal{L}(\lambda)\xi = 0$, которое принимает вид

$$l(\lambda)\varphi = 0, \quad l(\lambda) := I_G + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^{m} (b_l - \lambda)^{-1} U^* M_\Pi(p_l) U. \tag{2.27}$$

Рассуждая, как в теореме 2.3, можно показать, что спектр задачи (2.27) лежит в правой открытой полуплоскости симметрично относительно действительной оси. Далее будет показано, что справедливо более сильное утверждение. В этом случае удается также доказать двукратную полноту без дефекта для некоторой системы, построенной по корневым элементам задачи.

В задаче (2.27) осуществим замену $\lambda A^{-1/2}\varphi = \widehat{\varphi}$. Полученную систему запишем в векторно-матричной форме: $\mathcal{M}(\lambda)\eta = 0$, где $\eta := (\varphi; \widehat{\varphi})^t \in \vec{G}^{(2)}$, $\mathcal{M}(\lambda) := \widehat{\mathcal{I}} + \lambda\widehat{\mathcal{A}} + \sum_{l=1}^{m} (\lambda - b_l)^{-1}\widehat{\mathcal{K}_l}$,

$$\widehat{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} 0 & A^{-1/2} \\ -A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{K}_l} := \begin{pmatrix} U^* M_\Pi(p_l) U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Относительно связи собственных и присоединенных элементов пучков $\mathcal{M}(\lambda)$ и $l(\lambda)$ имеет место утверждение, аналогичное лемме 2.5 с $\omega_0 = 0$. А также справедлива следующая

Теорема 2.7. *Пусть существует r: $b_m < r < b_1 + a^{-1}(1 - 2\sqrt{ab})$, где $a := \|A^{-1/2}\|$, $b := m \max_{l=\overline{1,m},\, x\in\overline{\Omega}} p_l(x)$, и $\varphi_k^{(l)}$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$ — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $l(\lambda)$ из* (2.27)*, отвечающая собственному значению λ_l. Тогда система элементов $\eta_k^{(l)} := (\varphi_k^{(l)}; \widehat{\varphi}_k^{(l)})^t$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$, где l пробегает все индексы, отвечающие собственным значениям λ_l пучка $l(\lambda)$, лежащим вне круга $|\lambda - r| \le r$, а $\varphi_k^{(l)}$ и $\widehat{\varphi}_k^{(l)}$ связаны соотношениями* (2.25) *для каждого l, образует полную в $\vec{G}^{(2)}$ систему.*

Доказательство. Как и в теореме 2.5, здесь нужно доказать, что система собственных и присоединенных элементов пучка $\mathcal{M}(\lambda)$, отвечающая собственным значениям, лежащим вне некоторого круга $|\lambda - r| \le r$, полна в $\vec{G}^{(2)}$. Осуществим в задаче $\mathcal{M}(\lambda)\eta = 0$ замену спектрального параметра: $\lambda = r^2\mu^{-1} + r$, где $r > b_m$ пока произвольно, а μ — новый спектральный параметр. Умножив правую и левую части полученного выражения на μ, придем к следующей спектральной задаче:

$$\mu\mathcal{M}(\frac{r^2}{\mu}+r)\eta = \Big[\mu(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})+r^2\widehat{\mathcal{A}}+\sum_{l=1}^{m}\frac{\mu^2}{r^2+\mu(r-b_l)}\widehat{\mathcal{K}_l}\Big]\eta = 0. \quad (2.28)$$

Применив к правой и левой части (2.28) оператор $(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}$ и проведя несложные преобразования, придем к спектральной задаче

$$\mu(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}(\frac{r^2}{\mu}+r)\eta = \Big[\mu\mathcal{I}+r^2(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\widehat{\mathcal{A}}$$
$$+(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\frac{\mu^2}{r^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mu^n\bigg(\sum_{l=1}^{m}\Big(\frac{r-b_l}{r^2}\Big)^n\widehat{\mathcal{K}_l}\bigg)\Big]\eta = 0 \quad (2.29)$$

в области $|\mu| < r^2(r-b_1)^{-1}$.

Наша цель — установить, что пучок задачи (2.29) допускает факторизацию. Используя оценку $\|(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\| \le 1$, запишем условие, достаточное для факторизации пучка задачи (2.29):

$$\exists\, t \in \Big(0, \frac{r^2}{r-b_1}\Big):\quad \frac{r^2}{t}\|\widehat{\mathcal{A}}\| + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{n+1}}{r^2}\bigg\|\sum_{l=1}^{m}\Big(\frac{r-b_l}{r^2}\Big)^n\widehat{\mathcal{K}_l}\bigg\| < 1. \quad (2.30)$$

Учитывая, что $\|\widehat{\mathcal{A}}\| \le a$, $\|\widehat{\mathcal{K}_l}\| = \|\widehat{K}_l\| = \max_{x\in\overline{\Omega}} p_l(x)$ $(l=\overline{1,m})$, условие (2.30) будет выполнено, если

$$\exists\, t \in \Big(0, \frac{r^2}{r-b_1}\Big):\quad \frac{r^2 a}{t} + \frac{b}{r^2}\sum_{n=0}^{+\infty}t^{n+1}\Big(\frac{r-b_1}{r^2}\Big)^n < 1. \quad (2.31)$$

Просуммировав в (2.31) геометрическую прогрессию и проделав простые алгебраические преобразования, найдем, что условие (2.31) эквивалентно следующему:

$$\exists\, t \in \Big(0, \frac{r^2}{r-b_1}\Big):\quad t^2(b+(r-b_1)) - tr^2(1+a(r-b_1)) + ar^4 < 0. \quad (2.32)$$

Дискриминант в квадратичном выражении из (2.32) будет положительным, если $(r-b_1) \notin [a^{-1}(1-2\sqrt{ab}), a^{-1}(1+2\sqrt{ab})]$. В этом случае меньший корень квадратичного выражения будет меньше, чем $r^2(r-b_1)^{-1}$, если $a(r-b_1)<1$. Отсюда получаем, вспомнив условие $r>b_m$, что r должно удовлетворять неравенствам $b_m<r<b_1+a^{-1}(1-2\sqrt{ab})$. В силу условий теоремы такое число r существует, а значит условие (2.30) выполнено.

По теореме 23.4 из [16, с. 130], пучок задачи (2.29) допускает факторизацию в форме $\mu(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}(r^2\mu^{-1}+r)=:(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}_r(\mu)=A_+(\mu)(\mu I-Z)$, где оператор-функция $A_+(\mu)$ — голоморфна и голоморфно обратима при $|\mu|<t$. При этом спектр оператора Z лежит в круге $|\mu|<t$. В этой области задача для операторного пучка $(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}_r(\mu)$ сводится к задаче на собственные значения для оператора Z. Из равенства

$$\mu(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}(r^2\mu^{-1}+r)=\Big(A_+(0)+\frac{A'_+(0)\mu}{1!}+\cdots\Big)\cdot(\mu I-Z), \quad (2.33)$$

приравнивая коэффициенты при нулевой степени μ, получим, что $r^2(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\widehat{\mathcal{A}}=-A_+(0)Z$, откуда следует, что $Z=-r^2A_+^{-1}(0)(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\widehat{\mathcal{A}}\in\mathfrak{S}_p(\vec{G}^{(2)})$ $(p>3)$. Приравнивая в (2.33) коэффициенты при первой степени μ, получим, что $\mathcal{I}=A_+(0)-A'_+(0)Z$, откуда следует, что $A_+(0)=\mathcal{I}+A'_+(0)Z$, $A_+^{-1}(0)=\mathcal{I}+\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_1\in\mathfrak{S}_\infty(\vec{G}^{(2)})$. Из проведенных рассуждений следует, что $Z=(\mathcal{I}+\mathcal{T}_2)\widehat{\mathcal{A}}$, где $\mathcal{T}_2\in\mathfrak{S}_\infty(\vec{G}^{(2)})$.

Таким образом, оператор Z есть слабое возмущение оператора $\widehat{\mathcal{A}}$. Учитывая, что $\operatorname{Ker}\widehat{\mathcal{A}}=\{0\}$ и $\widehat{\mathcal{A}}$ — нормальный оператор со спектром на двух лучах, по теореме 4.2 из [16, с. 20], получаем, что система корневых элементов оператора Z, а, следовательно, и пучка $(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}_r(\mu)$ в указанной области, полна в гильбертовом пространстве $\vec{G}^{(2)}$. Остается заметить, что собственные и присоединенные элементы пучков $(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}_r(\mu)$ и $\mathcal{M}_r(\mu)$, отвечающие одному и тому же собственному значению, совпадают. □

Оказывается, что имеет место “раздельная” полнота с дефектом для ветвей спектра из $\Lambda^+_{0,\varepsilon}$ и $\Lambda^-_{0,\varepsilon}$ (см. определение областей в (2.13)) по отдельности. Точнее, справедлива следующая

Теорема 2.8. *Система собственных и присоединенных элементов пучка $l(\lambda)$ из (2.27), отвечающая собственным значениям из области $\Lambda^+_{0,\varepsilon}$ (или $\Lambda^-_{0,\varepsilon}$), образует полную в $\vec{G}(\Omega,\delta)$ систему с точностью до конечного дефекта.*

Доказательство. Заметим, что собственные и присоединенные элементы пучков $l(\lambda)$ и $l_+(\lambda):=(I_G-i\lambda A^{-1/2})^{-1}l(\lambda)$, отвечающие собственным значениям из области $\Lambda^+_{0,\varepsilon}$, совпадают. Осуществим в задаче $l_+(\lambda)\varphi = 0$ замену спектрального параметра $\lambda = i\mu$. Тогда получим, что задача $l(\lambda)\varphi = 0$ ($\lambda \in \Lambda^+_{0,\varepsilon}$) эквивалентна задаче $l_+(i\mu)\varphi = 0$ ($\mu \in -i\Lambda^+_{0,\varepsilon}$). Можно проверить, что $l_+(i\mu) = I_G - \mu A^{-1/2} - S_+(\mu)$, где оператор-функция $S_+(\mu)$ аналитична в $-i\Lambda^+_{0,\varepsilon}$ и $S_+(\mu) = O(|\mu|^{-1})$ при $\mu \to \infty$ ($\mu \in -i\Lambda^+_{0,\varepsilon}$). По теореме 2 из [17, с. 40] получаем, с учетом того, что оператор $A^{-1/2}$ положителен и имеет степенную асимптотику собственных значений, что система собственных и присоединенных элементов пучка $l_+(i\mu)$, отвечающая собственным значениям из области $-i\Lambda^+_{0,\varepsilon}$, полна в $\vec{G}(\Omega, \delta)$ с точностью до конечного дефекта. Отсюда, после обратной замены спектрального параметра, следует утверждение теоремы для области $\Lambda^+_{0,\varepsilon}$.

Для области $\Lambda^-_{0,\varepsilon}$ рассуждения аналогичны. □

Докажем теперь утверждение о локализации спектра задачи в случае, когда $\omega_0 = 0$. Справедлива следующая

Теорема 2.9. *Пусть выполнено условие* (b) *(см.* (2.10)), *тогда спектр задачи* (2.27), *лежащий в окрестности множества* $\cup_{l=1}^m (b_{l-1}, b_l)$, *действительный, а две комплексно сопряженные ветви попадают в полосу* $\{\alpha_1 \le \operatorname{Re}\lambda \le \alpha_2\}$, *где* $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < b_m$.

Доказательство. Для пучка $M(\lambda)$ (см. (2.8)), в силу леммы 2.2 и свойств функции $p_\lambda(x)$, справедливы свойства $M(\lambda) \gg 0$ при $\lambda \in (b_{l-1}, \inf \Delta_l)$ и $M(\lambda) \ll 0$ при $\lambda \in (\sup \Delta_l, b_l)$ ($l = \overline{1,m}$, $b_0 := 0$).

Рассмотрим уравнение $p_l(x) + \lambda^2 \|A^{-1}\| = 0$. Если выполнено условие (2.10), то при каждом фиксированном $x \in \overline{\Omega}$, как несложно проверить, это уравнение имеет два комплексно сопряженных корня и ровно m действительных положительных корней, которые разделены числами b_l ($l = \overline{1,m}$). В силу непрерывности функции $p_\lambda(x)$ по пространственным переменным при изменении $x \in \overline{\Omega}$ действительные корни уравнения будут меняться непрерывно и в совокупности образовывать ровно m отрезков $\Delta_{l,a} \subset (b_{l-1}, b_l)$ ($b_0 := 0$, $l = \overline{1,m}$). При этом $\inf \Delta_l \le \inf \Delta_{l,a}$, $\sup \Delta_l \le \sup \Delta_{l,a}$. Отсюда следует, что $\lambda^{-2} l(\lambda) \gg 0$ при $\lambda \in (b_{l-1}, \inf \Delta_l)$ и $\lambda^{-2} l(\lambda) \ll 0$ при $\lambda \in (\sup \Delta_{l,a}, b_l)$ ($b_0 := 0$, $l = \overline{1,m}$).

Докажем теперь, что $[\lambda^{-2} l(\lambda)]' \ll 0$ при $\lambda > 0$, $\lambda \ne b_l$ ($l = \overline{1,m}$). Этот факт, вместе со сказанным выше, позволит применить утверждение о факторизации к пучку $-\lambda^{-2} l(\lambda)$. В самом деле, выберем, согласно условию (b) (см. (2.10)), числа a_l ($l = \overline{1,m}$) и проведем вычисления:

$$[\lambda^{-2} l(\lambda)]' = \sum_{l=1}^{m} \lambda^{-3} (b_l - \lambda)^{-2} \left[(2b_l - 3\lambda) \widehat{K}_l - 2(b_l - \lambda)^2 a_l I_G \right].$$

Если $\lambda > 2b_l/3$, то $[\lambda^{-2}l(\lambda)]' \ll 0$, очевидно. Если $\lambda \in (0, 2b_l/3]$, то достаточным условием для того, чтобы $[\lambda^{-2}l(\lambda)]' \ll 0$, как несложно установить, будет свойство $\widehat{K}_l - b_l a_l I_G \ll 0$, которое справедливо в силу условия (b). Таким образом, согласно следствию 30.8 из [16, с. 179], для каждого $l = \overline{1,m}$ рассматриваемый пучок допускает факторизацию $-\lambda^{-2}l(\lambda) = l_{l,+}(\lambda)(\lambda I_G - Z_l)$, где Z_l ограничен и подобен самосопряженному оператору, $\sigma(Z_l) \subset (\inf \Delta_l - \varepsilon, \sup \Delta_{l,a} + \varepsilon)$ для любого $0 < \varepsilon < \min\{\inf \Delta_l - b_{l-1}, b_l - \sup \Delta_{l,a}\}$, а $l_{l,+}(\lambda)$ голоморфна и голоморфно обратима в некоторой окрестности отрезка $[b_{l-1} + \varepsilon, b_l - \varepsilon]$. Отсюда следует, что спектр задачи (2.27), лежащий в окрестности множества $\cup_{l=1}^m (b_{l-1}, b_l)$ $(b_0 := 0)$ — действительный.

Пусть теперь $\lambda^{(\pm i)}$ — пара комплексно сопряженных собственных значений пучка $l(\lambda)$ и $\varphi^{(\pm i)}$ $(\|\varphi^{(\pm i)}\|_{\vec{G}(\Omega,\delta)} = 1)$ — отвечающие им собственные элементы. Тогда $\lambda^{(+i)}$ является корнем уравнения

$$1 + \lambda^2 (A^{-1}\varphi^{(+i)}, \varphi^{(+i)})_{\vec{G}(\Omega,\delta)} - \sum_{l=1}^m \frac{(\widehat{K}_l \varphi^{(+i)}, \varphi^{(+i)})_{\vec{G}(\Omega,\delta)}}{b_l - \lambda} = 0, \quad (2.34)$$

которое можно переписать в форме

$$\big(\lambda^2 + (A^{-1}\varphi^{(+i)}, \varphi^{(+i)})^{-1}_{\vec{G}(\Omega,\delta)}\big) \prod_{l=1}^m (b_l - \lambda) - (A^{-1}\varphi^{(+i)}, \varphi^{(+i)})^{-1}_{\vec{G}(\Omega,\delta)} \times \sum_{l=1}^m (\widehat{K}_l \varphi^{(+i)}, \varphi^{(+i)})_{\vec{G}(\Omega,\delta)} \prod_{\substack{j=1,\\ j\neq l}}^m (b_j - \lambda) = 0.$$

Раскроем здесь скобки и соберем слагаемые с λ^{m+2} и λ^{m+1}, получим

$$(-1)^m \lambda^{m+2} + (-1)^{m+1} \lambda^{m+1} \sum_{l=1}^m b_l + \cdots = 0. \quad (2.35)$$

Из геометрических соображений ясно, что уравнение (2.34), кроме числа $\lambda^{(+i)}$, имеет также корни $\lambda^{(-i)}$ и $\lambda^{(l)} \in \Delta_{l,A} := \Delta_l \cup \Delta_{l,a}$ $(l = \overline{1,m})$. Следовательно, оно может быть записано в форме:

$$(-1)^m \big(\lambda - \lambda^{(+i)}\big)\big(\lambda - \lambda^{(-i)}\big) \prod_{l=1}^m \big(\lambda - \lambda^{(l)}\big) = 0.$$

Собрав здесь слагаемые с λ^{m+2} и λ^{m+1}, получим

$$(-1)^m \lambda^{m+2} + (-1)^{m+1} \lambda^{m+1} \left(2 \operatorname{Re} \lambda^{(\pm i)} + \sum_{l=1}^{m} \lambda^{(l)} \right) + \cdots = 0. \quad (2.36)$$

Из (2.35) и (2.36) следует, что $\operatorname{Re} \lambda^{(\pm i)} = 2^{-1} \sum_{l=1}^{m} (b_l - \lambda^{(l)})$. Отсюда, учитывая, что $\lambda^{(l)} \in \Delta_{l,A} := \Delta_l \cup \Delta_{l,a}$ $(l = \overline{1,m})$, следуют оценки $0 < \alpha_1 < \operatorname{Re} \lambda^{(\pm i)} < \alpha_2 < b_m$, где $\alpha_1 := 2^{-1} \sum_{l=1}^{m} (b_l - \sup \Delta_{l,a})$, $\alpha_2 := 2^{-1} \sum_{l=1}^{m} (b_l - \inf \Delta_l) < b_m$. $\square$

2.6. Асимптотики всех ветвей собственных значений в случае, когда $g = 0$, $\omega_0 = 0$ и характеристики модели постоянны

Рассмотрим случай, когда $g = 0$, $\omega_0 = 0$. В этом случае стационарная плотность $\rho_0(z)$ постоянна. Будем считать далее, что $k_l(x)$ $(l = \overline{1,m})$ также постоянны. Тогда функции $p_l(x)$ постоянны и $p_l(x) \equiv p_l$, где $p_l > 0$ — некоторые константы, удовлетворяющие условию (a) (см. (2.9)). В этом случае функция p_λ (см. (2.8)) будет зависеть только от λ. Обозначим корни уравнения $p_\lambda = 0$ через γ_l $(l = \overline{1,m})$, при этом $\gamma_l \in (b_{l-1}, b_l)$ $(l = \overline{1,m})$.

Из теоремы 2.9 следует, что в рассматриваемом случае спектр пучка $l(\lambda)$ из (2.27) попадает в некоторую вертикальную полосу, расположенную в правой полуплоскости, и является действительным в некоторой окрестности действительной положительной полуоси. Из теоремы 2.1 следует, что возможными предельными точками спектральной задачи могут быть только бесконечно удаленная точка и точки γ_l $(l = \overline{1,m})$. Таким образом, спектр задачи (2.27) в рассматриваемом случае может состоять из $(m+2)$-х ветвей изолированных конечнократных собственных значений с предельными точками в бесконечности и в точках γ_l $(l = \overline{1,m})$. В самом деле, пусть $\{\lambda_k(A^{-1})\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность собственных значений оператора A^{-1}, занумерованных по убыванию и с учетом их кратности, а $\{\varphi_k(A^{-1})\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность соответствующих собственных элементов. Тогда все собственные значения пучка $l(\lambda)$ из (2.27) могут быть найдены как корни последовательности скалярных уравнений $p_\lambda + \lambda^2 \lambda_k(A^{-1}) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Для исследования асимптотики корней этих уравнений определим функции $f_l(\lambda) := (\lambda - \gamma_l) p_\lambda^{-1}$ $(l = \overline{1,m})$. Можно проверить, что функции $f_l(\lambda)$ голоморфны в некоторых окрестностях точек γ_l, $f_l(\gamma_l) \neq 0$, $\operatorname{sign} f_l(\gamma_l) = -1$ $(l = \overline{1,m})$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.10. *Пусть $p_l(x) \equiv p_l$, где $p_l > 0$ — некоторые константы, удовлетворяющие условию (a) (см. (2.9)), а γ_l ($l = \overline{1,m}$) — корни уравнения $p_\lambda = 0$ (при этом $\gamma_l \in (b_{l-1}, b_l)$). Тогда спектр пучка $l(\lambda)$ из (2.27) состоит из $(m+2)$-х серий изолированных собственных значений; точнее — из двух комплексно сопряженных ветвей $\{\lambda_k^{(\pm i)}(l)\}_{k=1}^{\infty}$ и m действительных ветвей $\{\lambda_k^{(l)}(l)\}_{k=1}^{\infty} \subset (\gamma_l, b_l)$ ($l = \overline{1,m}$), для которых справедливы асимптотические формулы:*

$$\begin{aligned}\lambda_k^{(\pm i)}(l(\lambda)) = \pm i\lambda_k^{-1/2}(A^{-1}) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} p_l \\ \mp i\lambda_k^{1/2}(A^{-1})\left[\frac{1}{4}\left(\sum_{l=1}^{m} p_l\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} p_l b_l\right] \\ + O(\lambda_k(A^{-1})) \quad (k \to \infty),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_k^{(l)}(l(\lambda)) = \gamma_l - \lambda_k(A^{-1})\gamma_l^2 f_l(\gamma_l) \\ + 2\lambda_k^2(A^{-1})\gamma_l^3 f_l(\gamma_l)\big(f_l(\gamma_l) + \gamma_l f_l'(\gamma_l)\big) \\ + O(\lambda_k^3(A^{-1})) \quad (k \to \infty),\end{aligned}$$

где функции $f_l(\lambda)$ ($l = \overline{1,m}$) определены перед теоремой.

Для двух ветвей $\{\lambda_k^{(\pm i)}(l)\}_{k=1}^{\infty}$ при каждом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ справедлива также следующая асимптотическая формула:

$$\lambda_k^{(\pm i)}(l(\lambda)) = \pm i\lambda_k^{-1/2}(A^{-1})\left(1 - \sum_{l=1}^{m}\frac{p_l}{b_l}\right)^{1/2} + o\left(\frac{1}{b_1}\right) \quad (b_1 \to +\infty).$$

Доказательство. Доказательство формул в теореме сводится к применению асимптотических методов к скалярным уравнениям $p_\lambda + \lambda^2\lambda_k(A^{-1}) = 0$ ($k \in \mathbb{N}$). $\square$

Здесь можно отметить, что из последней формулы в теореме следует, что если наибольшее из времен релаксации b_1^{-1} стремится к нулю, то комплексно сопряженные ветви “садятся” в пределе на мнимую ось. Эта ситуация отвечает случаю баротропной жидкости. В рассматриваемой же ситуации спектр задачи смещен с мнимой оси в правую полуплоскость. Кроме того, в отличие от баротропной жидкости, здесь возникают ветви собственных значений с конечными предельными точками. Эти ветви и связаны с наличием памяти в системе.

Литература

[1] N. D. Kopachevsky, S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids*, Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser Verlag, 2003, 444 p. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146).

[2] L. D. Bolgova (Orlova), N. D. Kopachevsky, *Boundary value problems on small oscillations of an ideal relaxing fluid and its generalizations* // Спектральные и эволюционные задачи. Вып. 3: Тез. лекц. и докл. III Крымской осенней матем. школы-симпоз. Симферополь, (1994), 41–42.

[3] Д. А. Закора, *Задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости* // Динамические системы, (2006), вып. 20, 104–112.

[4] Д. А. Закора, *Задача о малых движениях вращающейся идеальной релаксирующей жидкости* // Динамические системы, (2009), вып. 26, 31–42.

[5] А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря, *Основы математической теории термовязко-упругости*, Наука, 1970, 280 с.

[6] Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан, *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи*, М.: Наука, 1989, 416 с.

[7] J. V. Ralston, *On stationary modes in inviscid rotating fluids* // J. Math. Analysis and Appl., **44** (1973), 366–383.

[8] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Киев: "Наукова думка", 1965, 800 с.

[9] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Асимптотика спектра дифференциальных уравнений* // Итоги науки и техники, математический анализ, **14** (1977), 5–58.

[10] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Москва: Наука, 1967, 464 с.

[11] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, М.: Мир, 1972, 740 с.

[12] Г. В. Радзиевский, *Квадратичный пучок операторов*, 1976 (Препринт).

[13] М. Б. Оразов, *Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов и связанные с ними задачи из механики*, Дис. д-ра. физ.-мат. наук: 01.01.02, Ашхабат, 1982.

[14] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, М.: Наука, 1965, 448 с.

[15] В. А. Авакян, *Асимптотическое распределение спектра линейного пучка, возмущенного аналитической оператор-функцией* // Функциональный анализ и его приложения, **12** (1978), N 2, 66–67.

[16] А. С. Маркус, *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков*, Кишинев: Штиинца, 1986, 260 с.

[17] Г. В. Радзиевский, *О полноте производных цепочек* // Математический сборник, **100(142)** (1976), N 1(5), 37–58.

Сведения об авторах

Дмитрий Закора

Таврический национальный университет
им. В. И. Вернадского,
пр. Вернадского 4,
95007, Симферополь,
Крым, Украина
E-Mail: dmitry_@crimea.edu