Український математичний вісник
Том 7 **(2010)**, № 2, 139 – 153

О полноте систем собственных и присоединённых функций дифференциальных операторов порядка $2-\varepsilon$ и $1-\varepsilon$

Анна В. Агибалова

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. В пространстве вектор-функций рассматривается краевая задача для дифференциальных операторов дробного порядка $(2-\varepsilon)$ и $(1-\varepsilon)$ и доказывается полнота системы собственных и присоединенных функций этой задачи в пространстве $L_1([0,1],\ \mathbb{C}^p)$.

2010 MSC. 34L10.

Ключевые слова и фразы. Дифференциальный оператор дробного порядка, краевая задача, собственные и присоединенные функции, полнота.

1. Введение

Хорошо известно (см. [9]), что система собственных и присоединённых функций (ССПФ) оператора Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y$$

с разделёнными граничными условиями

$$y'(0) - h_0 y(0) = y'(1) - h_1 y(1) = 0$$

полна в $L_2[0,1]$ при любом комплекснозначном потенциале $q \in L_1[0,1]$ и любых $h_0, h_1 \in \mathbb{C}$. Подобный результат имеет место также для произвольных невырожденных граничных условий (см. [9]).

Для обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного целого порядка $n > 2$ полнота ССПФ задачи с нерегулярными распадающимися граничными условиями впервые анонсирована М. В. Келдышем в [6], а доказана в работе А. А. Шкаликова (см. [11]). В работе [8] М. М. Маламуда и Л. Л. Оридороги этот результат был распространен на случай уравнений нецелого порядка $n-\varepsilon,\ \varepsilon \in (0,1)$,

Статья поступила в редакцию 12.02.2010

$n \geqslant 3$, вида

$$y^{(n-\varepsilon)} + \sum_{k=2}^{n} p_{n-k}(x) y^{(n-k-\varepsilon)} = \lambda y.$$

Здесь $y^{(k-\varepsilon)} := D_x^{k-\varepsilon} y := \frac{d^k}{dx^k} J^\varepsilon y,\ k \in \mathbb{N}$, а J^ε — оператор дробного интегрирования:

$$J^\varepsilon y(x) = \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_0^x (x-t)^{\varepsilon-1} y(t)\, dt.$$

Полнота ССПФ дифференциального оператора порядка $(2-\varepsilon)$ с разделяющимися граничными условиями доказана в [2]. Теорема о полноте ССПФ граничной задачи для оператора порядка $(2-\varepsilon)$ с граничными условиями более общего (но не произвольного) вида получена в [1].

В данной работе результат работы [1] распространяется на случай дифференциальных операторов порядков $(2-\varepsilon)$ и $(1-\varepsilon)$ с матричными коэффициентами.

Отметим в этой связи недавние работы [3,4] Т. С. Алероева. Именно, им рассмотрены несколько иные дифференциальные операторы дробного порядка не выше второго. Так, пусть задана последовательность $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2\},\ 0 < \gamma_j \leqslant 1$, и $\sigma_k := \sum_{j=0}^{k} \gamma_j - 1,\ k = 0, 1, 2$. Предположим, что $\frac{1}{\rho} = \sum_{j=0}^{2} \gamma_j - 1 = \sigma_2 > 0$, и введем дифференциальные операторы

$$D^{(\sigma_0)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}} f(x), \qquad D^{(\sigma_1)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}} f(x),$$

$$D^{(\sigma_2)} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_2)}}{dx^{-(1-\gamma_2)}} \frac{d^{\gamma_1}}{dx^{\gamma_1}} \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} f(x),$$

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt.$$

Следуя [3], рассмотрим краевую задачу

$$D^{(\sigma_2)} y - (\lambda + q(x)) y = 0,\ x \in (0,1], \quad D^{(\sigma_0)} y\,|_{x=0} = 0, \quad D^{(\sigma_0)} y\,|_{x=1} = 0. \tag{1.1}$$

В [3] доказана следующая

Теорема 1.1. *Пусть* $\gamma_0 = \gamma_2 = 1,\ q(x) \equiv 0$. *Тогда ССПФ задачи* (1.1) *полна в* $L_2(0,1)$.

Близкий результат (для полуограниченного потенциала $q(x)$) получен в работе [4].

2. Полнота ССПФ в случае дифференциального оператора порядка $(2-\varepsilon)$

В пространстве вектор-функций $L_1([0,1],\mathbb{C}^p)$ рассмотрим граничную задачу, порожденную дифференциальным уравнением порядка $(2-\varepsilon)$, где $\varepsilon \in (0,1)$,

$$y^{(2-\varepsilon)} + Q(x)y^{(-\varepsilon)} = \lambda y, \quad y = \mathrm{col}(y_1,\ldots,y_p), \tag{2.1}$$

и граничными условиями

$$U_1(y) := I_p y^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) + A_{11}y^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) = \overrightarrow{0}, \tag{2.2}$$

$$U_2(y) := A_{21}y^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) + A_{22}y^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) + A_{23}y^{(-\varepsilon)}(1,\lambda) + I_p y^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda) = \overrightarrow{0}. \tag{2.3}$$

Здесь I_p — единичная матрица порядка p, $A_{11},\ A_{21}\ A_{22},\ A_{23}$ — произвольные числовые $(p\times p)$-матрицы, $\overrightarrow{0}$ — нулевой вектор-столбец высоты p, $Q(x)$ — аналитическая $(p\times p)$-матрица-функция.

Обозначим через $\sigma(L)$ спектр задачи (2.1)–(2.3). Рассмотрим вначале простейшее уравнение с $Q(x) = \mathbf{0_p}$ ($\mathbf{0_p}$ обозначает нулевую $(p\times p)$-матрицу)

$$y^{(2-\varepsilon)} = \lambda y, \quad y = \mathrm{col}(y_1,\ldots,y_p), \tag{2.4}$$

и аналогичное ему матричное уравнение

$$Y^{(2-\varepsilon)} = \lambda Y \tag{2.5}$$

($Y = Y(\lambda,x)$ — $(p\times p)$-матрица-функция).

Уравнение (2.5) имеет фундаментальную систему решений

$$C(x,\lambda) = x^{-\varepsilon}E_{\frac{1}{2-\varepsilon}}(\lambda x^{2-\varepsilon}, 1-\varepsilon)I_p, \tag{2.6}$$

$$S(x,\lambda) = x^{1-\varepsilon}E_{\frac{1}{2-\varepsilon}}(\lambda x^{2-\varepsilon}, 2-\varepsilon)I_p, \tag{2.7}$$

удовлетворяющую начальным условиям

$$C^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) = S^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = I_p,$$

$$C^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = S^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) = \mathbf{0_p}.$$

Здесь

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})},$$

где $\rho > 0$, μ — произвольный комплексный параметр, функция типа Миттаг-Леффлера. Известно (см. [5]), что $E_\rho(z;\mu)$ — целая функция порядка роста ρ и типа 1.

Так как общее решение уравнения (2.4) имеет вид

$$y(x,\lambda) = C(x,\lambda)c_1 + S(x,\lambda)c_2, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}^p,$$

то все рассуждения достаточно проводить для соответствующей матричной граничной задачи:

$$Y^{(2-\varepsilon)} + Q(x)Y^{(-\varepsilon)} = \lambda Y, \tag{2.8}$$

$$U_1(Y) := I_p Y^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) + A_{11}Y^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) = \mathbf{0_p}, \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} U_2(Y) := A_{21}Y^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) + A_{22}Y^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) \\ + A_{23}Y^{(-\varepsilon)}(1,\lambda) + I_p Y^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda) = \mathbf{0_p}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

где матрицы $A_{11},\ A_{21},\ A_{22},\ A_{23}$ те же, что и в граничных условиях (2.2) и (2.3).

С помощью асимптотических оценок для функций типа Миттаг-Леффлера (см. [5, гл.III §2]) получаем асимптотическое поведение матриц-функций $C(x,\lambda)$ и $S(x,\lambda)$ в секторе $S = \{\lambda : |\arg\lambda| \leqslant \alpha\}$, где α — любое вещественное число, удовлетворяющее условию $\frac{\pi(2-\varepsilon)}{2} < \alpha < \pi$:

$$C(x,\lambda) = \left(\frac{1}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + O\left(\frac{x^{\varepsilon-4}}{|\lambda|^2}\right)\right) I_p, \tag{2.11}$$

$$S(x,\lambda) = \left(\frac{1}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon-1}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + O\left(\frac{x^{\varepsilon-3}}{|\lambda|^2}\right)\right) I_p. \tag{2.12}$$

Оценки (2.11) и (2.12), а также доказанное в [7] существование треугольного оператора преобразования для уравнений порядка $n-\varepsilon$ $(n \geqslant 1)$ с аналитическими коэффициентами, существенно используются при доказательстве теоремы о полноте ССПФ задачи (2.1)–(2.3).

Теорема 2.1. *ССПФ граничной задачи* (2.1)–(2.3) *полна в пространстве* $L_1([0,1],\mathbb{C}^p)$.

Доказательство. Доказательство теоремы разобьем на несколько шагов.

(i) Вначале найдем асимптотику характеристического определителя $\chi(\lambda)$ задачи (2.1)–(2.3). Пусть $\Omega(x,\lambda)$ — решение следующей задачи Коши для уравнения (2.8)

$$\begin{cases} \Omega^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) = -I_p, \\ \Omega^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda) = A_{11}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Так как $\Omega(x,\lambda)$ при всех λ удовлетворяет граничному условию (2.9), то λ_0 будет собственным значением задачи (2.8)–(2.10) тогда и только тогда, когда λ_0 — корень характеристического определителя

$$\chi(\lambda) := \begin{vmatrix} U_1(C(x,\lambda)) & U_1(S(x,\lambda)) \\ U_2(C(x,\lambda)) & U_2(S(x,\lambda)) \end{vmatrix}. \tag{2.14}$$

Элементы матриц $A_{11},\ A_{21},\ A_{22},\ A_{23}$ будем обозначать через a_{kj}^{lm}, где $k,j \in \{1,\dots p\},\ lm \in \{11,21,22,23\}$, и для удобства записи, следуя [10, гл. III §1], введем обозначение $[A] := A(1+O(\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}}))$. Запишем асимптотические оценки для дробных производных (см. [5, гл. III §1]) матриц-функций $C(x,\lambda)$ и $S(x,\lambda)$ в точке $x=1,\ \lambda\in S$:

$$C^{(-\varepsilon)}(1,\lambda) = \left(\frac{1}{2-\varepsilon}e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} - \frac{1}{\Gamma(\varepsilon-1)}\frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right)\right) I_p,$$

$$C^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda) = \left(\frac{1}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} - \frac{1}{\Gamma(\varepsilon-2)}\frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right)\right) I_p,$$

$$S^{(-\varepsilon)}(1,\lambda) = \left(\frac{1}{2-\varepsilon}\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}}e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} - \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right)\right) I_p,$$

$$S^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda) = \left(\frac{1}{2-\varepsilon}e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} - \frac{1}{\Gamma(\varepsilon-1)}\frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right)\right) I_p.$$

Тогда с учетом этих оценок характеристический определитель (2.14) можно записать в виде

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11} & I_p \\ {\scriptstyle C^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda)+A_{23}C^{(-\varepsilon)}(1,\lambda)+A_{21}} & {\scriptstyle S^{(1-\varepsilon)}(1,\lambda)+A_{23}S^{(-\varepsilon)}(1,\lambda)+A_{22}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(2-\varepsilon)^p}\begin{vmatrix} a_{11}^{11} & \dots & a_{1p}^{11} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1}^{11} & \dots & a_{pp}^{11} & 0 & \dots & 1 \\ \left[\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\right] & \dots & [0] & \left[e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\right] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & \dots & \left[\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\right] & [0] & \dots & \left[e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\right] \end{vmatrix}.$$

Вынося из первых p столбцов множитель $\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}$, а из последних p строк $e^{\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}$, приходим к определителю

$$\chi(\lambda)=\frac{1}{(2-\varepsilon)^p}\lambda^{\frac{p}{2-\varepsilon}}e^{p\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\begin{vmatrix} a_{11}^{11}\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}} & \dots & a_{1p}^{11}\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}} & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{p1}^{11}\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}} & \dots & a_{pp}^{11}\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}} & 0 & \dots & 1\\ [1] & \dots & [0] & [1] & \dots & [0]\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ [0] & \dots & [1] & [0] & \dots & [1] \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(2-\varepsilon)^p}\lambda^{\frac{p}{2-\varepsilon}}e^{p\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\,[1]\,(1+O(\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}}))$$

$$=\left[\frac{1}{(2-\varepsilon)^p}\lambda^{\frac{p}{2-\varepsilon}}e^{p\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\right],\quad \lambda\in S. \tag{2.15}$$

Из равенства (2.15) следует, что

$$\chi(\lambda)\sim\frac{1}{(2-\varepsilon)^p}\lambda^{\frac{p}{2-\varepsilon}}e^{p\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}},\quad |\lambda|\to+\infty,\ \lambda\in S. \tag{2.16}$$

(ii) На этом шаге получим асимптотические формулы для собственных функций задачи (2.1)–(2.3). Пусть

$$\Omega_0(x,\lambda)=-C(x,\lambda)+A_{11}S(x,\lambda) \tag{2.17}$$

решение задачи Коши для уравнения (2.5) с теми же начальными условиями (2.13):

$$\begin{cases}\Omega_0^{(-\varepsilon)}(0,\lambda)=-I_p,\\ \Omega_0^{(1-\varepsilon)}(0,\lambda)=A_{11}.\end{cases}$$

Известно (см. [7]), что решение $\Omega(x,\lambda)$ выражается через решение $\Omega_0(x,\lambda)$ при помощи треугольного оператора преобразования

$$\Omega(x;\lambda)=(I+K)\Omega_0(x;\lambda)=\Omega_0(x;\lambda)+\int_0^x K(x,t)\Omega_0(t;\lambda)\,dt, \tag{2.18}$$

в котором K — вольтерров интегральный оператор, $K(x,t)\in C(\Omega,\mathbb{C}^{2\times2})$, $\Omega=\{0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1\}$. Из (2.18) получим оценку для $\Omega(x,\lambda)$, аналогичную оценке для $\Omega_0(x,\lambda)$. Согласно (2.11) и (2.12) элементы главной диагонали матрицы $\Omega_0(x,\lambda)$ имеют вид

$$-\frac{1}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\Biggl(1-a_{jj}^{11}\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}}$$

$$+\left(O\left(\frac{x^{\varepsilon-4}}{|\lambda|^2}\right)+O\left(\frac{x^{\varepsilon-3}}{|\lambda|^2}\right)\right)\lambda^{-\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}e^{-x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\Biggr)=$$

$$=-\frac{1}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\,(1+o(1))$$

$$= -\frac{1}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + o\big(\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\big), \quad j \in \{1, \ldots, p\},$$

а остальные элементы — вид

$$\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} \left(\frac{a_{kj}^{11}}{2-\varepsilon}\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}} + O\left(\frac{x^{\varepsilon-4}}{|\lambda|^2}\right)\lambda^{-\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{-x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\right)$$
$$= o\big(\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\big), \quad k, j \in \{1, \ldots, p\},\ k \neq j.$$

Обозначим через $k_{lj}(x,t)$ элементы матрицы $K_{lj}(x,t),\ l, j \in \{1, \ldots, p\}$. Заметим, что эти функции ограничены в Ω. Тогда в равенстве (2.18) под интегралом стоит матрица

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2-\varepsilon}\zeta(t)k_{11}(x,t) + o(\zeta(t)) & \ldots & -\frac{1}{2-\varepsilon}\zeta(t)k_{1p}(x,t) + o(\zeta(t)) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{1}{2-\varepsilon}\zeta(t)k_{p1}(x,t) + o(\zeta(t)) & \ldots & -\frac{1}{2-\varepsilon}\zeta(t)k_{pp}(x,t) + o(\zeta(t)) \end{pmatrix},$$

где $\zeta(t) := \lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{t\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}$. При интегрировании по t в каждом элементе этой матрицы возникнет множитель $\lambda^{-\frac{1}{2-\varepsilon}}$, поэтому все элементы проинтегрированной матрицы будут функциями $o(\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}})$. Таким образом, асимптотически $\Omega(x,\lambda) = \Omega_0(x,\lambda)$ при $|\lambda| \to +\infty$.

От матричных решений $\Omega(x,\lambda)$ и $\Omega_0(x,\lambda)$ перейдем к векторным $\omega(x,\lambda)$ и $\omega_0(x,\lambda)$, применив соответственно $\Omega(x,\lambda)$ и $\Omega_0(x,\lambda)$ к произвольному постоянному вектору $c = \mathrm{col}(c_1, \ldots, c_p) \in \mathbb{C}^p$. Тогда с учетом (2.18), (2.17), (2.11) и (2.12) при $\lambda \in S$

$$\omega(x,\lambda) = \Omega(x,\lambda)c =: \begin{pmatrix} \omega_1(x,\lambda) \\ \vdots \\ \omega_p(x,\lambda) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + o\left(\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\right) \\ \vdots \\ -\frac{c_p}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + o\left(\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\right) \end{pmatrix},$$
$$|\lambda| \to +\infty. \quad (2.19)$$

(iii) На этом шаге докажем полноту ССПФ задачи (2.1)–(2.3). Допустим, что ССПФ задачи (2.1)–(2.3) не полна в пространстве $L_1([0,1], \mathbb{C}^p)$. Тогда найдется вектор-функция $f(x) = \mathrm{col}(f_1(x), \ldots, f_p(x))\ (\neq \overrightarrow{0}),\ f_j(x) \in L_\infty(0,1),\ j \in \{1, \ldots, p\}$, для которой

$$\langle D^j_\lambda \omega(x,\lambda_n), f(x)\rangle = 0, \quad D^j_\lambda \omega(x,\lambda_n) = \Big[\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\omega(x,\lambda)\Big]\Big|_{\lambda=\lambda_n}, \\ j\in\{0,1,\ldots,p_n-1\},$$

где $\lambda_n \in \sigma(L)$, p_n — кратность корня λ_n как нуля характеристической функции $\chi(\lambda)$ вида (2.15). Введём функцию

$$\tilde F(\lambda) = \int\limits_0^1 \langle \omega(x,\lambda), f(x)\rangle\, dx.$$

Очевидно, что $\tilde F(\lambda)$ — целая функция. Кроме того, каждое собственное значение λ_0 задачи (2.1)–(2.3) кратности p является нулём функции $\tilde F(\lambda)$ порядка не ниже p. Следовательно, функция

$$F(\lambda) := \frac{\tilde F(\lambda)}{\chi(\lambda)}$$

является целой. Так как в числителе и знаменателе стоят целые функции порядка $\frac{1}{2-\varepsilon}$, то $F(\lambda)$ будет целой функцией порядка не выше $\frac{1}{2-\varepsilon} < 1$. Чтобы доказать, что $F(\lambda)\equiv 0$, оценим её рост на мнимой оси, лежащей в секторе S. Для этого оценим отдельно рост функций $\tilde F(\lambda)$ и $\chi(\lambda)$. Имеем

$$\begin{aligned}
\big|\tilde F(\lambda)\big| &\leqslant \int\limits_0^1 \Big|\sum_{k=1}^p \omega_k(x,\lambda) f_k(x)\Big|\, dx \\
&\leqslant \|f\|_{L_\infty([0,1],\mathbb{C}^p)} \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^p \big|\omega_k(x,\lambda)\big|\, dx = [\text{см. } (2.19)] \\
&= \|f\|_{L_\infty([0,1],\mathbb{C}^p)} \sum_{k=1}^p \int\limits_0^1 \Big| -\frac{c_k}{2-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}} + o\big(\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\big)\Big|\, dx \\
&\leqslant \|f\|_{L_\infty([0,1],\mathbb{C}^p)} \sum_{k=1}^p \int\limits_0^1 \Big| -\frac{c_k}{2-\varepsilon} + \beta_k\Big| \big|\lambda^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\big|\, dx \\
&\leqslant \beta|\lambda|^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} \int\limits_0^1 e^{x\operatorname{Re}\lambda^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\, dx = [\lambda = it,\ t\in\mathbb{R}] \\
&= \beta|t|^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} \int\limits_0^1 e^{x\cos\frac{\pi}{4-2\varepsilon}|t|^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}\, dx = \frac{\beta}{\cos\frac{\pi}{4-2\varepsilon}} |t|^{\frac{\varepsilon-1}{2-\varepsilon}} \big(e^{|t|^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\cos\frac{\pi}{4-2\varepsilon}} - 1\big),
\end{aligned} \tag{2.20}$$

где β_k — некоторые постоянные, $k \in \{1, \dots, p\}$, $\beta = p\|f\|_{L_\infty([0,1],\mathbb{C}^p)} \times \sup_k |-\frac{c_k}{2-\varepsilon} + \beta_k|$. Из (2.16) следует, что

$$|\chi(it)| \sim \frac{1}{(2-\varepsilon)^p}|t|^{\frac{p}{2-\varepsilon}} e^{pt^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}, \quad t \to \infty. \tag{2.21}$$

Комбинируя (2.20) и (2.21), получаем

$$\begin{aligned}\big|F(it)\big| &\leqslant \frac{\beta(2-\varepsilon)^p|t|^{\frac{\varepsilon-1}{2-\varepsilon}}\left(e^{|t|^{\frac{1}{2-\varepsilon}}\cos\frac{\pi}{4-2\varepsilon}} - 1\right)}{\cos\frac{\pi}{4-2\varepsilon}|t|^{\frac{p}{2-\varepsilon}} e^{pt^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}} \\ &= \frac{\gamma}{|t|^{\frac{p+1-\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{\left(p-\cos\frac{\pi}{4-2\varepsilon}\right)|t|^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}} - \frac{\gamma}{|t|^{\frac{p+1-\varepsilon}{2-\varepsilon}} e^{p|t|^{\frac{1}{2-\varepsilon}}}} \to 0, \\ &\qquad\qquad |t| \to +\infty, \end{aligned} \tag{2.22}$$

(здесь $\gamma = \frac{\beta(2-\varepsilon)^p}{\cos\frac{\pi}{4-2\varepsilon}}$).

Мнимая ось образует два угла раствора π. Функция $F(\lambda)$ голоморфна внутри каждого из них, ограничена на сторонах этих углов (согласно (2.22)) и, как отмечалось выше, порядок роста $F(\lambda)$ внутри углов меньше 1. Применяя теорему Фрагмена-Линделёфа к левой и правой полуплоскости, получаем, что $F(\lambda)$ ограничена во всей комплексной плоскости. Далее, из теоремы Лиувилля и (2.22) следует, что $F(\lambda) \equiv 0$. Следовательно, $\tilde{F}(\lambda) \equiv 0$. Но это означает, что $f(x)$ "ортогональна" $\omega(x, \lambda)$ при всех λ, т.е.

$$\begin{aligned} 0 = \langle \omega(x,\lambda), f(x)\rangle &= \int_0^1 \omega(x,\lambda) f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \left((I+K)\omega_0(x,\lambda)\right) f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \left(\omega_0(x,\lambda) + \int_0^x K(x,t)\omega_0(t,\lambda)\,dt\right) f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \omega_0(x,\lambda) f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx \int_0^x K(x,t)\omega_0(t,\lambda)\,dt \\ &= \int_0^1 \omega_0(x,\lambda)\left(f(x) + \int_x^1 K(t,x) f(t)\,dt\right) dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \omega_0(x,\lambda)((I+K^*)f(x))\,dx. \quad (2.23)$$

Так как система $\{\omega_0(x,\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ полна в $L^1[0,1]$ (см. [5]), то из (2.23) следует равенство $(I+K^*)f(x)=0$. Так как оператор K — вольтерров, то K^* — тоже вольтерров и $I+K^*$ обратим. Следовательно, $f(x)=0$ для п.в. $x\in[0,1]$. Полученное противоречие доказывает полноту ССПФ задачи (2.1)–(2.3). □

3. Полнота ССПФ в случае дифференциального оператора порядка $(1-\varepsilon)$

Рассмотрим теперь в $L_1([0,1],\mathbb{C}^p)$ дифференциальное уравнение порядка $(1-\varepsilon)$, $\varepsilon\in(0,1)$,

$$y^{(1-\varepsilon)}+Q(x)y^{(-\varepsilon)}=\lambda y, \quad y=\mathrm{col}(y_1,\dots,y_p), \quad (3.1)$$

где $Q(x)$ — аналитическая $(p\times p)$-матрица-функция, и граничное условие вида

$$I_p y^{(-\varepsilon)}(0,\lambda)+Ay^{(-\varepsilon)}(1,\lambda)=\overrightarrow{0}, \quad (3.2)$$

где $A=\{a_{kj}\}_{k,j=1}^p$ $(\in\mathbb{C}^{p\times p})$, $\det A\neq 0$.

Теорема 3.1. *ССПФ граничной задачи* (3.1)–(3.2) *полна в пространстве* $L_1([0,1],\mathbb{C}^p)$.

Доказательство. (i) Найдем асимптотику характеристического определителя $\chi(\lambda)$ задачи (3.1)–(3.2). Обозначив через $\sigma(L)$ спектр задачи (3.1)–(3.2), рассмотрим простейшее уравнение

$$y^{(1-\varepsilon)}=\lambda y, \quad y=\mathrm{col}(y_1,\dots,y_p), \quad (3.3)$$

и соответствующее ему матричное уравнение

$$Y_0^{(1-\varepsilon)}=\lambda Y_0, \quad (3.4)$$

($Y_0=Y_0(\lambda,x)$ — $(p\times p)$-матрица-функция).

Уравнение (3.4) имеет решение

$$Y_0(x,\lambda)=x^{-\varepsilon}E_{\frac{1}{1-\varepsilon}}(\lambda x^{1-\varepsilon},1-\varepsilon)I_p,$$

удовлетворяющее условию

$$Y_0^{(-\varepsilon)}(0,\lambda)=I_p. \quad (3.5)$$

Все рассуждения достаточно привести для соответствующей матричной граничной задачи:

$$Y^{(1-\varepsilon)} + Q(x)Y^{(-\varepsilon)} = \lambda Y, \tag{3.6}$$

$$Y^{(-\varepsilon)}(0,\lambda) + AY^{(-\varepsilon)}(1,\lambda) = \mathbf{0_p}. \tag{3.7}$$

Рассмотрим секторы $\tilde{S}^1 := \{\lambda : |\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi(1-\varepsilon)}{2}\}$ и $S^1 := \{\lambda : |\arg\lambda| \leqslant \frac{\pi(1-\varepsilon)}{2} - \delta\}$, где δ — некоторое достаточно малое положительное число. С помощью асимптотических оценок (см. [5, гл. III §2]) получаем, что в секторе S^1 справедливы равенства

$$\begin{gathered}
Y_0(x,\lambda) = \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}}} + O\left(\frac{x^{\varepsilon-2}}{|\lambda|^2}\right)\right) I_p, \\
Y_0^{(-\varepsilon)}(1,\lambda) = \left(\frac{1}{1-\varepsilon} e^{\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}}} - \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}\right)\right) I_p \\
= \left(\frac{1}{1-\varepsilon} e^{\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}}} + O\left(e^{\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}\right)\right) I_p = \left(\frac{1}{1-\varepsilon} e^{\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}\left(1 + O(1)\right)\right) I_p.
\end{gathered} \tag{3.8}$$

Тогда характеристический определитель $\chi(\lambda)$ примет вид

$$\chi(\lambda) := \det(I_p + AY_0^{(-\varepsilon)}(1,\lambda)) = \frac{e^{p\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}}{(1-\varepsilon)^p}$$

$$\times \begin{vmatrix}
a_{11}(1+o(1)) + e^{-\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}}} & a_{12}(1+o(1)) & \dots & a_{1p}(1+o(1)) \\
a_{21}(1+o(1)) & a_{22}(1+o(1)) + e^{-\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}}} & \dots & a_{2p}(1+o(1)) \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{p1}(1+o(1)) & a_{p2}(1+o(1)) & \dots & a_{pp}(1+o(1)) + e^{-\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}
\end{vmatrix}$$

$$= \frac{\det A + o(1)}{(1-\varepsilon)^p} e^{p\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}, \quad \lambda \in S^1. \tag{3.9}$$

(ii) Получим асимптотические формулы для собственных функций задачи (3.1)–(3.2). Рассуждая как и в случае уравнения порядка $(2-\varepsilon)$, получим, что для решения $Y(x,\lambda)$ уравнения (3.6) с начальным условием (3.5) справедливо асимптотическое равенство $Y(x,\lambda) \sim Y_0(x,\lambda)$, $|\lambda| \to +\infty$. От матричного решения $Y(x,\lambda)$ перейдем к векторному $y(x,\lambda)$, $\lambda \in S^1$,

$$y(x,\lambda) = Y(x,\lambda)c =: \begin{pmatrix} \omega_1(x,\lambda) \\ \vdots \\ \omega_p(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{1-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}\left(1+o(1)\right) \\ \vdots \\ -\frac{c_p}{1-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}\left(1+o(1)\right) \end{pmatrix},$$

$$|\lambda| \to +\infty, \quad c = \operatorname{col}(c_1, \dots, c_p) \in \mathbb{C}^p.$$

(iii) Докажем полноту ССПФ задачи (3.1)–(3.2). Аналогично шагу (iii) теоремы (2.1), допустим, что ССПФ задачи (3.1)–(3.2) не является полной в $L_1([0,1],\mathbb{C}^p)$. Тогда найдется вектор-функция $f(x) := \operatorname{col}(f_1(x),\dots,f_p(x))$ $(\neq \overrightarrow{0})$, $f_j(x) \in L_\infty(0,1)$, $j \in \{1,\dots,p\}$, для которой

$$\langle D^j_\lambda y(x,\lambda_n), f(x)\rangle = 0, \quad D^j_\lambda y(x,\lambda_n) = \Big[\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j} y(x,\lambda)\Big]\Big|_{\lambda=\lambda_n}, \\ j \in \{0,1,\dots,p_n-1\},$$

где $\lambda_n \in \sigma(L)$, p_n — кратность корня λ_n как нуля характеристической функции $\chi(\lambda)$ вида (2.15). Введём функцию

$$\tilde F(\lambda) := \int\limits_0^1 \langle y(x,\lambda), f(x)\rangle\, dx.$$

Тогда функция

$$F(\lambda) := \frac{\tilde F(\lambda)}{\chi(\lambda)}$$

является целой функцией порядка не выше $\frac{1}{1-\varepsilon}$, который, в отличие от предыдущего случая, может быть сколь угодно большим. Оценим $|F(\lambda)|$ на произвольном фиксированном луче, не совпадающим с границей секторов $\tilde S^1$ и S^2,

$$\big|\tilde F(\lambda)\big| \leqslant \|f\|_{L_\infty([0,1],\mathbb{C}^p)} \sum_{k=1}^p \int\limits_0^1 \Big| -\frac{c_k}{1-\varepsilon}\lambda^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}}} + o\big(\lambda^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} e^{x\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}}}\big)\Big|\, dx \\ \leqslant \delta|\lambda|^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} \int\limits_0^1 e^{x\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}})}\, dx = \frac{\delta|\lambda|^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}}{\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}})}\big(e^{\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}})} - 1\big),$$

где δ — некоторая постоянная. Тогда с учетом (3.9)

$$|F(\lambda)| \leqslant \frac{\delta|\lambda|^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}\big(e^{\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}})} - 1\big)(1-\varepsilon)^p}{\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}})\big|\det A + o(1)\big| e^{p\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}})}} \\ = \frac{\eta|\lambda|^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}\big(1 - e^{-\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}})}\big)}{\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}})} e^{(1-p)\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}})}, \\ \lambda \in S^1,\ |\lambda| > R_0, \quad (3.10)$$

где $\eta = \frac{\delta(1-\varepsilon)^p}{|\det A+o(1)|}$. Поскольку $\operatorname{Re}\bigl(\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}}\bigr) > 0,\ \lambda \in S^1$, то очевидно, что при $p > 1$

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty} |F(\lambda)| = 0.$$

В случае $p = 1$

$$|F(\lambda)| \leqslant \frac{\eta|\lambda|^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}\bigl(1 - e^{-\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}})}\bigr)}{\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}})}. \tag{3.11}$$

Заметим, что $\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}}) = \cos\alpha'|\lambda|^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}$, где $\alpha' = \arg(\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}})$, причем в силу выбора сектора S^1 $\cos\alpha' \neq 0$. Значит, неравенство (3.11) можно переписать в виде

$$|F(\lambda)| \leqslant \frac{\eta}{\cos\alpha'}\bigl(1 - e^{-\operatorname{Re}(\lambda^{\frac{1}{1-\varepsilon}})}\bigr)\frac{1}{|\lambda|} \to 0, \quad \lambda \in S^1,\ |\lambda| \to +\infty,$$

т.е.

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty} |F(\lambda)| = 0, \quad \lambda \in S^1. \tag{3.12}$$

Рассмотрим теперь сектор $S^2 = \{\lambda : \alpha \leqslant |\arg\lambda| \leqslant \pi\}$. Аналогично предыдущим рассуждениям для S^1, в секторе S^2 для элементов $(Y_0(x,\lambda))_{kj}$ матрицы $Y_0(x,\lambda)$ справедлива (см. [5, гл. III §2]) оценка

$$|\,(Y_0(x,\lambda))_{kj}\,| = x^{-\varepsilon}\bigl|E_{\frac{1}{1-\varepsilon}}(\lambda x^{1-\varepsilon}, 1-\varepsilon)\bigr|\delta_{jk} \leqslant \frac{Mx^{-\varepsilon}}{1+|\lambda|x^{1-\varepsilon}}\delta_{jk},$$
$$k, j \in \{1,\ldots,p\}. \tag{3.13}$$

где M — постоянная, не зависящая от x и λ. Получим теперь выражение для $\chi(\lambda)$. Согласно асимптотическим оценкам [5, гл. III §2], при $\lambda \in S^2$

$$Y_0^{(-\varepsilon)}(x,\lambda) = E_{\frac{1}{1-\varepsilon}}(\lambda x^{1-\varepsilon}, 1)I_p,$$

$$Y_0^{(-\varepsilon)}(1,\lambda) = \Bigl(-\frac{1}{\Gamma(\varepsilon)}\frac{1}{\lambda} + O\Bigl(\frac{1}{|\lambda|^2}\Bigr)\Bigr)I_p, \quad |\lambda| \to +\infty.$$

Тогда $\chi(\lambda) = \det(I_p + AY_0^{(-\varepsilon)}(1,\lambda)) = 1 + O(\frac{1}{\lambda})$, $|\lambda| \to +\infty$. Аналогично рассуждениям выше, справедливо асимптотическое равенство

$$Y(x,\lambda) = Y_0(x,\lambda), \quad |\lambda| \to +\infty,$$

и векторное решение имеет вид

$$y(x,\lambda) = x^{-\varepsilon}E_{\frac{1}{1-\varepsilon}}(\lambda x^{1-\varepsilon}, 1-\varepsilon)(c_1,\ldots,c_p), \quad c_j \in \mathbb{C},\ j \in \{1,\ldots,p\}.$$

Из последнего равенства и оценки (3.13) заключаем, что

$$\begin{aligned}\big|\tilde{F}(\lambda)\big| &\leqslant \|f\|_{L_\infty([0,1],\mathbb{C}^p)} \int\limits_0^1 \sum_{k=1}^{p} \Big| - c_k x^{-\varepsilon} E_{\frac{1}{1-\varepsilon}}(\lambda x^{1-\varepsilon}, 1-\varepsilon)\Big|\,dx \\ &\leqslant M_1 \int\limits_0^1 \frac{x^{-\varepsilon}\,dx}{1+|\lambda| x^{1-\varepsilon}} = \frac{M\ln(1+|\lambda|)}{|\lambda|} \to 0, \quad |\lambda| \to +\infty,\end{aligned}$$

где $M_1 = M\|f\|_{L_\infty([0,1],\mathbb{C}^p)} \sum\limits_{k=1}^{p} |c_k|$. Следовательно,

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty} |F(\lambda)| = 0, \quad \lambda \in S^2. \tag{3.14}$$

Лучами, лежащими в S^1 и S^2, разобьем комплексную плоскость на сектора раствора $2\delta < \pi(1-\varepsilon)$ и рассмотрим произвольно один из полученных секторов. На его границе функция $F(\lambda)$ ограничена в силу (3.12) и (3.14), а ее порядок роста внутри сектора не выше $\frac{1}{1-\varepsilon}$. Применяя теорему Фрагмена-Линделефа, заключаем, что $F(\lambda)$ ограничена в рассматриваемом секторе. Проведя такие же рассуждения в остальных секторах, приходим к выводу, что $F(\lambda)$ ограничена во всей комплексной плоскости. Тогда в силу теоремы Лиувилля и равенств (3.12) и (3.14) $\tilde{F}(\lambda) \equiv 0$. Далее, как и в случае уравнения порядка $2-\varepsilon$, получаем, что если вектор-функция "ортогональна" всем собственным и присоединенным функциям, то она тождественно равна нулю. Значит, ССПФ граничной задачи (3.1)–(3.2) полна в пространстве $L_1([0,1],\mathbb{C}^p)$. □

Благодарности. Автор выражает благодарность М. М. Маламуду и Л. Л. Оридороге за постановку задачи и ценные замечания в процессе ее выполнения.

Литература

[1] А. В. Агибалова, *О полноте систем корневых функций некоторых граничных задач для уравнения порядка* $2-\varepsilon$ // Український математичний вісник, **4** (2007), N 2, 157–162.

[2] А. В. Агибалова, Л. Л. Оридорога, *О полноте систем собственных и присоединённых функций дифференциальных операторов порядка* $2-\varepsilon$ // Доповіді НАН України, (2004), N 9, 7–12.

[3] Т. С. Алероев, *О полноте системы собственных функций одного дифференциального оператора дробного порядка* // Дифференциальные уравнения, **36** (2000), N 6, 829–830.

[4] T. S. Aleroev, H. T. Aleroeva, *A Problem on the Zeros of the Mittag-Leffler Function and the Spectrum of a Fractional-Order Differential Operator* // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, **25** (2009), N 6, 1–18, www.math.u-szeged.hu/ejqtde/

[5] М. М. Джарбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Москва, Наука, 1966, 671 с.

[6] М. В. Келдыш, *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряжённых уравнений* // Доклады АН СССР, **77** (1951), N 1, 11–14.

[7] М. М. Маламуд, *Подобие вольтерровых операторов и смежные вопросы теории дифференциальных уравнений дробных порядков* // Труды Мос. Мат. общества, **55** (1994), 73–148.

[8] M. M. Malamud, L. L. Oridoroga, *Analog of the Birkhoff theorem and the completeness results for fractional order differential equations* // Russian Jour. of Math. Physics, **8** (2001), N 3, 287–308.

[9] В. А. Марченко, *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения*, Киев, "Наукова думка", 1977, 332 с.

[10] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Москва, "Наука", 1969, 526 с.

[11] А. А. Шкаликов, *О полноте собственных и присоединённых функций обыкновенного дифференциального оператора с распадающимися краевыми условиями* // Функциональный анализ и его приложения, **10** (1976), N 4, 69–80.

Сведения об авторах

Анна Владимировна Агибалова

Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24,
Донецк 83055,
Украина
E-Mail: `AgAnnette@rambler.ru`