Український математичний вісник
Том 7 **(2010)**, № 1, 88 – 134

Корректность общих краевых задач в полупространстве для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в классах функций степенного роста и убывания

Александр Л. Павлов

(*Представлена С. Д. Ивасишеным*)

Аннотация. Приведены необходимые и достаточные условия корректности общих краевых задач в полупространстве для однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в пространствах функций, имеющих экспоненциальное поведение на бесконечности по выделенной переменной и быстро убывающих по остальным переменным. На их основе получены достаточные условия разрешимости указанных задач в пространствах обобщенных функций медленного роста.

2000 MSC. 35G15.

Ключевые слова и фразы. Краевая задача, мультипликатор, обобщенные функции, преобразование Фурье.

1. Введение

Общая краевая задача для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве имеет вид

$$P(\partial_x, D_y)u(x,y) \equiv \sum_{k=0}^{m} P_k(D_y)\partial_x^k u(x,y) = f(x,y), \quad x \geq 0,\ y \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

$$B_j(\partial_x, D_y)u(x,y)|_{x=0} \equiv \sum_{k=0}^{m_j} B_{jk}(D_y)\partial_x^k u(x,y)\bigg|_{x=0} = g_j(y), \quad j = 1,\dots,r, \tag{1.2}$$

Статья поступила в редакцию 22.09.2009

где $(x,y) = (x, y_1, \ldots, y_n)$, $D_{y_k} = i\partial_{y_k}$, $D_y = (D_{y_1}, \ldots, D_{y_n})$, $P_k(\sigma)$, $B_{jk}(\sigma)$ — многочлены.

Исследованию задачи (1.1), (1.2) посвящены многочисленные работы. В случае, когда условия (1.2) являются условиями Коши, задача (1.1), (1.2) исследована в самом общем виде в различных классах функций. Основы общей теории задачи Коши для уравнения (1.1) заложены в работах И. Г. Петровского [1], И. М. Гельфанда и Е. Г. Шилова [2]. Эта теория получила развитие во многих работах, в частности, в работе Л. Р. Волевича и С. Г. Гиндикин [3], в которой приведены необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши в пространствах функций, которые по переменной y имеют степенной рост или убывание. Этими условиями являются:

1) отсутствие вещественных нулей у многочлена $P_m(\sigma)$:

$$P_m(\sigma) \neq 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n; \tag{1.3}$$

2) корректность уравнения (1.1) по Петровскому:

$$\exists\, c : \operatorname{Re}\lambda(\sigma) < c, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

где $\lambda(\sigma)$ — корни уравнения

$$P(\lambda,\sigma) \equiv \sum_{k=0}^{m} P_k(\sigma)\lambda^k = 0. \tag{1.5}$$

Будем в дальнейшем предполагать, что выполнено условие 1).

Результаты по задаче (1.1), (1.2), отличной от задачи Коши, не имеют такой общности. Имеется множество работ, посвященных задаче (1.1), (1.2) для определенных типов уравнений. В достаточной общности эта задача была рассмотрена Г. Е. Шиловым и Г. В. Дикополовым [4, 5], В. П. Паламодовым [6], Г. В. Дикополовым [7]. Ими выделен класс регулярных уравнений, для которых рассмотрены некоторые краевые задачи в классе обобщенных функций, зависящих от параметра x, состоящего из квадратично интегрируемых функций и их обобщенных производных любого порядка и имеющих в этом пространстве определенное поведение при $x \to \infty$, а также в некоторых более широких классах. Описание классов единственности в пространствах степенного роста и убывания приведены в работах автора [8]. Изучению краевой задачи (1.1), (1.2) в рассматриваемом случае посвящены работы Н. Е. Товмасяна и его учеников [9, 10].

В настоящей работе приведены необходимые и достаточные условия корректности задачи (1.1), (1.2) для однородного уравнения в пространствах функций быстро убывающих по касательным переменным и имеющих экспоненциальное поведение на бесконечности по выделенной переменной. Этими условиями являются регулярность уравнения, гладкая факторизация многочлена $P(\lambda, \sigma)$, соответствующая разбиению λ-корней уравнения (1.5) на группы в соответствии с условием регулярности, а также выполнение условия Лопатинского. На основе этих результатов получены достаточные условия разрешимости задачи (1.1), (1.2) в пространствах обобщенных функций медленного роста по касательным переменным, как для однородного, так и неоднородного уравнения.

Доказательство указанных результатов основано на преобразовании задачи (1.1), (1.2) с помощью касательного преобразования Фурье по переменной y в задачу

$$P\Big(\frac{d}{dx}, \sigma\Big)v(x) = g(x), \quad x \geq 0, \tag{1.6}$$

$$B_j\Big(\frac{d}{dx}, \sigma\Big)v(x)\Big|_{x=0} = h_j, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{1.7}$$

Доказательство достаточности указанных условий для разрешимости задачи (1.6), (1.7) в указанных пространствах сводится к конструктивному построению решения этой задачи с помощью умножения граничных данных на функции, которые являются аналогом преобразования Фурье ядер Пуассона для эллиптических краевых задач [11]. В рассматриваемом случае они являются мультипликаторами в пространствах S и S', зависящими от параметра и имеющими по этому параметру соответствующее поведение на бесконечности.

Доказательство необходимости указанных условий для корректности задачи (1.1), (1.2) в указанных пространствах основано на представлении решения однородного уравнения (1.6) в виде суммы двух решений, соответствующих множителям при факторизации многочлена $P(\lambda, \sigma)$ по λ-корням уравнения (1.5).

Описанные выше результаты могут быть использованы в изучении смешанных задач в четверти пространства, в частности, для уравнений, неразрешенных относительно старшей производной по времени.

2. Регулярные уравнения

Аналогом условия Петровского (1.4) в случае краевой задачи (1.1), (1.2) является условие регулярности. Для его введения λ-корни уравнения (1.5) располагаются по возрастанию вещественной части

$$\operatorname{Re}\lambda_1(\sigma) \leq \operatorname{Re}\lambda_2(\sigma) \leq \cdots \leq \operatorname{Re}\lambda_i(\sigma) \leq \cdots \leq \operatorname{Re}\lambda_m(\sigma).$$

Для произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$ обозначим через $\nu_\alpha(\sigma)$ количество всех корней $\lambda_i(\sigma)$, для которых $\operatorname{Re}\lambda_i(\sigma) \le \alpha$.

Уравнение (1.1) называется регулярным, если существует такое α, что $\nu_\alpha(\sigma)$ не зависит от σ при почти всех $\sigma \in \mathbb{R}^n$.

Обозначим через G_k^α множество точек $\sigma \in \mathbb{R}^n$, для которых $\operatorname{Re}\lambda_k(\sigma) \le \alpha$ или $\nu_\alpha(\sigma) \ge k$. Справедливы следующие вложения

$$\mathbb{R}^n \supset G_1^\alpha \supset G_2^\alpha \supset \dots \supset G_m^\alpha.$$

Лемма 2.1. *Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ множества G_k^α, $k = 1, \dots, m$, — замкнутые полуалгебраические множества.*

Доказательство леммы основано на применении теоремы Зайденберга–Тарского и приведено в [8].

Уравнение (1.1) является регулярным, если существуют такие $\alpha \in \mathbb{R}$ и $r \in \mathbb{N}$, что $G_r^\alpha = \mathbb{R}^n$, а $\operatorname{mes} G_{r+1}^\alpha = 0$. Число r естественно называть порядком регулярности уравнения (1.1), а уравнение — α-регулярным порядка r. Очевидно, что уравнение (1.1) может быть α-регулярным порядка r и β-регулярным порядка p, где $r \ne p$ при $\alpha \ne \beta$. Это позволяет для одного уравнения рассматривать граничные задачи с различным числом граничных условий.

В случае, когда наибольший порядок регулярности уравнения (1.1) равен числу корней m уравнения (1.5), уравнение является корректным по Петровскому, а задача (1.1), (1.2) является обобщением задачи Коши для уравнения (1.1).

Обозначим через

$$\overline{\alpha}_k = \sup_{\sigma \in \mathbb{R}^n} \operatorname{Re}\lambda_k(\sigma), \qquad \underline{\alpha}_k = \inf_{\sigma \in \mathbb{R}^n} \operatorname{Re}\lambda_k(\sigma).$$

Если уравнение (1.1) является α-регулярным порядка r, то $\overline{\alpha}_r \le \alpha \le \underline{\alpha}_{r+1}$.

Примерами регулярных уравнений, кроме уравнений корректных по Петровскому, являются уравнения

$$1)\ -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad 2)\ \Delta u = qu,\ q > 0; \quad 3)\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0;$$
$$4)\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0; \quad 5)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

Примеры регулярных уравнений с заданными параметрами α и r легко построить, используя устойчивые и антиустойчивые λ-многочлены с полиномиальными коэффициентами. С помощью критериев устойчивости могут быть получены достаточные условия регулярности уравнения в некоторых частных случаях.

Каждому разделению λ-корней уравнения (1.5) на две группы $M_k^-(\sigma) = \{\lambda_1(\sigma), \dots, \lambda_k(\sigma)\}$ и $M_k^+(\sigma) = \{\lambda_{k+1}(\sigma), \dots, \lambda_m(\sigma)\}$ соответствует факторизация многочлена $P(\lambda, \sigma)$, т.е. представление его в виде

$$P(\lambda, \sigma) = P_k^-(\lambda, \sigma) P_k^+(\lambda, \sigma), \tag{2.1}$$

где

$$P_k^-(\lambda, \sigma) \equiv \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j(\sigma)) = \sum_{j=0}^{k} a_{kj}^-(\sigma) \lambda^j,$$

$$P_k^+(\lambda, \sigma) \equiv P_m(\sigma) \prod_{j=k+1}^{m} (\lambda - \lambda_j(\sigma)) = P_m(\sigma) \sum_{j=0}^{m-k} a_{kj}^+(\sigma) \lambda^j.$$

Функции $a_{kj}^-(\sigma)$ являются симметрическими функциями первой группы корней $M_k^-(\sigma)$, а $a_{kj}^+(\sigma)$ — второй группы $M_k^+(\sigma)$. При этом $a_{kk}^-(\sigma) = a_{km-k}^+(\sigma) \equiv 1$.

Лемма 2.2. *Если уравнение* (1.1) *является α-регулярным порядка r, то функции $a_{rj}^-(\sigma)$, $j = 0, \dots, r-1$, $a_{rj}^+(\sigma)$, $j = 0, \dots, m-r-1$ обладают следующими свойствами:*

1) *являются аналитическими в области $\mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}^\alpha$;*

2) *имеют рост не выше степенного, т.е. существуют такие числа c_j, ν_j, что*

$$|a_{rj}^\pm(\sigma)| \le c_j (1 + |\sigma|)^{\nu_j}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}^\alpha.$$

Доказательство. Справедливость 1) следует из того, что в $\mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}^\alpha$ группы корней $M_r^-(\sigma)$ и $M_r^+(\sigma)$ разделены, т.е. для всякой точки $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}^\alpha$ существует замкнутый контур в λ-плоскости, охватывающий корни $\lambda_1(s), \dots, \lambda_r(s)$ и не содержащий корней $\lambda_{r+1}(s), \dots, \lambda_m(s)$ внутри себя для всех s из достаточно малой комплексной окрестности точки σ. Здесь $\lambda_i(s)$ для s с ненулевой вещественной частью определены как непрерывные продолжения соответствующих корней $\lambda_i(s)$. По классической лемме Гурса [12] симметрические функции корней $\lambda_1(s), \dots, \lambda_r(s)$ голоморфны в точках множества $\mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}^\alpha$.

Справедливость 2) следует из аналогичных оценок для корней $\lambda_i(\sigma)$, которые доказываются с помощью теоремы Зайденберга–Тарского [8]. □

Лемма 2.3. *Если коэффициенты многочлена $P_r^-(\lambda,\sigma)$ гладкие в окрестности некоторой точки, то гладкими являются и коэффициенты многочлена $P_r^+(\lambda,\sigma)$.*

Доказательство. Рассмотрим функции, являющиеся степенными суммами корней

$$\Phi_{rk}^-(\sigma)=\lambda_1^k(\sigma)+\dots+\lambda_r^k(\sigma),\quad \Phi_{rk}^+(\sigma)=\lambda_{r+1}^k(\sigma)+\dots+\lambda_m^k(\sigma),$$

$$\Phi_k(\sigma)=\Phi_{rk}^-(\sigma)+\Phi_{rk}^+(\sigma).$$

Из основной теоремы о симметрических многочленах [13] и условий леммы следует, что функции $\Phi_{rk}^-(\sigma)$ являются гладкими в рассматриваемой окрестности. Но тогда в этой окрестности гладкими являются и функции $\Phi_{rk}^+(\sigma)=\Phi_k(\sigma)-\Phi_{rk}^-(\sigma)$, так так по той же теореме функции $\Phi_k(\sigma)$ являются многочленами от коэффициентов λ-многочлена $P(\lambda,\sigma)$.

Из формул Ньютона [13], устанавливающих связь между степенными суммами корней и элементарными симметрическими функциями этих корней

$$\Phi_{rk}^+(\sigma)-\Phi_{rk-1}^+(\sigma)a_{rm-r-1}^+(\sigma)+\Phi_{rk-2}^+(\sigma)a_{rm-r-2}^+(\sigma)+\cdots$$
$$+(-1)^{k-1}\Phi_{r1}^+(\sigma)a_{rm-r-k-1}^+(\sigma)+(-1)^k k a_{rm-r-k}^+,\quad (2.2)$$

следует, что гладкими являются функции $a_{rk}^+(\sigma)$, $k=0,\dots,m-r$. □

Приведенный в доказательстве леммы 2.3 прием установления связи между функциями $a_{rk}^-(\sigma)$ и $a_{rj}^+(\sigma)$ будет в дальнейшем существенно использован.

Исследование условий корректности задачи (1.1), (1.2) в классах функций степенного убывания и роста основано на изучении условий, обеспечивающих заданное поведение на полуоси решения обыкновенного дифференциального уравнения с коэффициентами, зависящими от параметра. В частности, важное значение имеет следующее утверждение.

Лемма 2.4. *Если для любых $h_1(\sigma),\dots,h_r(\sigma)$ существует решение задачи*

$$P\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x,\sigma)=0,\quad x\ge 0,\ \sigma\in\mathbb{R}^n,\qquad (2.3)$$

$$\frac{d^{j-1}v(x,\sigma)}{dx^{j-1}}\Big|_{x=0}=h_j(\sigma),\quad j=1,\dots,r,\qquad (2.4)$$

удовлетворяющее неравенству

$$|v(x,\sigma)| \le C(\sigma)(1+x)^p e^{\alpha x}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{2.5}$$

где α и p — некоторые числа, а $C(\sigma) > 0$ — функция от σ, то уравнение (1.5) *имеет не менее r корней, удовлетворяющих условию* $\operatorname{Re}\lambda(\sigma) \le \alpha$, *т.е.* $G_r^\alpha = \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $\{z_i(x,\sigma)\}$ — система фундаментальных решений уравнения (2.3), где $z_i(x,\sigma) = x^{k_i}e^{\lambda_i x}$. Тогда каждое решение уравнения (2.3) можно представить в виде линейной комбинации функций $z_i(x,\sigma)$

$$v(x,\sigma) = \sum_{i=1}^{m} C_i(\sigma) z_i(x,\sigma), \tag{2.6}$$

где $C_i(\sigma)$ — некоторые функции от σ. Обозначим через $v^-(x,\sigma)$ слагаемые в (2.6), в которых $\operatorname{Re}\lambda_i(\sigma) \le \alpha$, а через $\nu_\alpha(\sigma)$ — число этих слагаемых. Покажем, что функция $v^+(x,\sigma) = v(x,\sigma) - v^-(x,\sigma)$ равна тождественно нулю. Действительно, из неравенства (2.5) и построения функции $v^-(x,\sigma)$ следует неравенство

$$|v^+(x,\sigma)| \le |v(x,\sigma)| + |v^-(x,\sigma)| \le C_1(\sigma)(1+x)^{p_1}e^{\alpha x}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n,\ x \ge 0,$$

где $p_1 \ge p$ — некоторое число.

По определению

$$v^+(x,\sigma) = \sum_{i=\nu_\alpha(\sigma)+1}^{m} C_i(\sigma) z_i(x,\sigma),$$

где $z_i(x,\sigma) = x^{k_i}e^{\lambda_i(\sigma)x}$, $\operatorname{Re}\lambda_i(\sigma) > \alpha$. Из этого представления следует, что функция $(1+x)^{-p_1}e^{-\alpha x}v^+(x,\sigma)$ не может быть ограниченной на полуоси $x \ge 0$ при каждом фиксированном σ, если хотя бы один коэффициент $C_i(\sigma)$, $i \ge \nu_\alpha(\sigma)+1$, отличен от нуля. Следовательно, $v^+(x,\sigma) \equiv 0$.

По условию при каждом $\sigma \in \mathbb{R}^n$ система линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1(\sigma)z_1(0,\sigma) + \dots + C_{\nu_\alpha(\sigma)}(\sigma) z_{\nu_\alpha(\sigma)}(0,\sigma) = h_1(\sigma) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1(\sigma)z_1^{(r-1)}(0,\sigma) + \dots + C_{\nu_\alpha(\sigma)}(\sigma) z_{\nu_\alpha(\sigma)}^{(r-1)}(0,\sigma) = h_r(\sigma) \end{cases}$$

имеет решение для любых $h_1(\sigma), \dots, h_r(\sigma)$. Так как функции $z_1(x,\sigma), \dots, z_{\nu_\alpha(\sigma)}(x,\sigma)$ образуют систему фундаментальных решений уравнения $P^{-}_{\nu_\alpha(\sigma)}(\frac{d}{dx},\sigma)v(x,\sigma)=0$, то справедливо равенство

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} z_1(x,\sigma) & \cdots & z_{\nu_\alpha(\sigma)}(x,\sigma) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_1^{(r-1)}(x,\sigma) & \cdots & z^{(r-1)}_{\nu_\alpha(\sigma)}(x,\sigma)\end{pmatrix} = \min\{r,\nu_\alpha(\sigma)\}.$$

Учитывая это равенство и разрешимость приведенной системы для любых $h_1(\sigma),\dots,h_r(\sigma)$, имеем неравенство $\nu_\alpha(\sigma)\geq r$, т.е. $G^\alpha_r=\mathbb{R}^n$. $\square$

3. Функциональные пространства и мультипликаторы в них

Под решением задачи (1.1), (1.2) будем понимать функцию, зависящую гладко от параметра x и удовлетворяющую (1.1), (1.2), как функцию этого параметра. Для уточнения понятия решения задачи (1.1), (1.2) рассмотрим функциональные пространства адекватно отражающие свойства искомых решений по переменным x и y.

Будем использовать общепринятые обозначения пространства быстро убывающих функций S и пространства медленно растущих обобщенных функций S'.

Рассмотрим семейство подпространств S', зависящих от двух параметров s и l

$$H^s_l=\left\{f\in S':\|f\|^s_l\equiv\left[\int(1+|\sigma|^2)^s|\mathcal{F}_y((1+|y|^2)^{l/2}f)|^2d\sigma\right]^{1/2}<+\infty\right\}, \tag{3.1}$$

где $\mathcal{F}_y g$ — преобразование Фурье обобщенной функции $g\in S'$. Это двупараметрическое семейство пространств обладает следующими свойствами [3]:

1) H^s_l — гильбертово пространство, в котором $\|\cdot\|^s_l$ является нормой;

2) сопряженное к пространству H^s_l изоморфно пространству H^{-s}_{-l};

3) вложение H^s_l в $H^{s'}_{l'}$ при $s\geq s',\ l\geq l'$ непрерывно;

4) вложения S в H^s_l и H^s_l в S' непрерывны;

5) пространства H^s_l и H^l_s двойственны относительно преобразования Фурье $\mathcal{F}$;

6) S' является индуктивным пределом семейства пространств H^s_l;

7) S является проективным пределом семейства пространств H_l^s.

Через C_l^s, где $s \geq 0$ — целое, а l — произвольное число, обозначим пространство s раз непрерывно дифференцируемых функций с конечной нормой

$$|\varphi|_l^s = \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n,\\ |\alpha|\leq s}} |(1+|y|^2)^{l/2} D_y^\alpha \varphi(y)|. \tag{3.2}$$

Пространства C_l^s являются банаховыми, для них имеют место аналогичные вложения и пространство S является проективным пределом этого семейства. Из теорем вложения следует эквивалентность семейств $\{C_l^s\}$ и $\{H_l^s\}$ в задании проективной топологии в S.

Так как результаты будут сначала формулироваться для задачи (1.6)–(1.7), полученной преобразованием Фурье по y исходной задачи, то в этом случае будем использовать обозначение H_s^l, сохраняя тем самым в записи первоначальный смысл параметров: s — показатель гладкость, l — показатель роста граничных данных и решения.

Через $C_{\alpha p}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$, где $k \geq 0$ — целое, α и p — действительные числа, обозначим пространство k раз непрерывно дифференцируемых отображение $v(x)$ замкнутой полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ в гильбертово пространство H_l^s, удовлетворяющее условию

$$(1+x)^{-p} e^{-\alpha x} \left\| \frac{d^\nu v(x)}{dx^\nu} \right\|_l^s < c, \quad x \geq 0,\ 0 \leq \nu \leq k. \tag{3.3}$$

Пространство $C_{\alpha p}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$ является банаховым. Норму функции $v(x)$ в этом пространстве будем обозначать $|||v(x)|||_{C_{\alpha p}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)}$:

$$|||v(x)|||_{C_{\alpha p}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)} \equiv \sup_{\substack{x\in\overline{\mathbb{R}}_+,\\ 0\leq\nu\leq k}} \left[(1+x)^{-p} e^{-\alpha x} \left\| \frac{d^\nu v(x)}{dx^\nu} \right\|_l^s\right]. \tag{3.4}$$

Преобразование Фурье по касательным переменным отображает изоморфно пространство $C_{\alpha p}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$ на $C_{\alpha p}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$.

Имеют место непрерывные вложения

$$C_{\alpha p}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s) \subset C_{\alpha' p'}^{k'}(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s), \quad k \geq k',\ \alpha \leq \alpha',\ p \leq p';$$

$$C_{\alpha p}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s) \subset C_{\alpha p}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{l'}^{s'}), \quad s \geq s',\ l \geq l'.$$

Учитывая эти вложения можно с помощью операции объединения построить пространства $C_{\alpha\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$. В топологии индуктивного предела эти пространства являются полными локально выпуклыми [13].

Для этих пространств имеют место вложения, аналогичные приведенным.

Пользуясь свойствами семейства пространств H_l^s, можно определить пространство $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ как проективный предел пространств $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$, а пространство $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$ — как индуктивный предел этих пространств. В указанных топологиях пространства $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ и $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$ являются полными локально выпуклыми пространствами, инвариантными относительно касательного преобразования Фурье.

Функция $u(x)$ принадлежит пространству $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$, если для любых s и l существует такое p, что $u(x) \in C^k_{\alpha p}(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$. Соответственно $u(x) \in C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$, если существуют такие s, l и p, что $u(x) \in C^k_{\alpha p}(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$.

Решение задачи (1.1), (1.2) будут рассматриваться в пространствах $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$, $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$, $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$ при $k \geq \bar{m} = \max\{m, m_1, \ldots, m_r\}$, где m — порядок дифференцирования по x в уравнении (1.1), а m_j — в j-ом граничном условии в (1.2). Граничные данные в (1.2) принадлежат соответственно пространствам S, S', H_l^s.

Задача (1.1), (1.2) в случае однородного уравнения называется корректной в паре пространств $(S, C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S))$, если для любых граничных данных $g_j \in S$, $j = 1, \ldots, r$, существует единственное решение задачи (1.1), (1.2), принадлежащее пространству $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$, $k \geq \bar{m}$, линейно и непрерывно зависящее в нем от граничных данных $g_j \in S$. Аналогично определяется корректность задачи (1.1), (1.2) в парах пространств $(S', C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S'))$, $(H_l^s, C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{l'}^{s'}))$.

Непрерывная зависимость решения $u(x) \in C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ от граничных данных $g_j \in S$ означает, что для любых s, l существуют такие s', l' и p, для которых выполняется неравенство

$$|||u(x)|||_{C^k_{\alpha p}(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)} \leq c \sum_{j=1}^{r} \|g_j\|_{l'}^{s'}. \qquad (3.5)$$

Если же для любых s', l' найдутся такие s, l и p, что из принадлежности $g_j \in H_{l'}^{s'}$, следует принадлежность решения $u(x)$ пространству $C^k_{\alpha p}(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$ и выполняется неравенство (3.5), то имеет место непрерывная зависимость решения $u(x) \in C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$ от граничных данных $g_j \in S'$.

Аналогично пространству $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$ определяется пространство $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, C_l^s)$. В силу эквивалентности семейств $\{C_l^s\}$ и $\{H_l^s\}$ в задании проективной топологии в S неравенство (3.5) равносильно неравенству

$$|||u(x)|||_{C^k_{\alpha p}(\overline{\mathbb{R}}_+, C^s_l)} \le c \sum_{j=1}^{r} |g_j|^s_l \tag{3.5$'$}$$

при тех же предположениях о параметрах.

Принадлежность функции $u(x)$ пространству $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ означает, что для любых целого $s \ge 0$ и вещественного l существует такое p, для которых $u(x) \in C^k_{\alpha p}(\overline{\mathbb{R}}_+, C^s_l)$. Следовательно, справедливы неравенства

$$(1+x)^{-p} e^{-\alpha x} \left| \frac{d^\nu u(x)}{dx^\nu} \right|^s_l < +\infty, \quad x \ge 0,\ 0 \le \nu \le k. \tag{3.6}$$

Пользуясь этими неравенствами можно установить соответствие между функциями из пространства $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ и функциями, заданными на $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n$, обладающими определенной гладкостью по переменным x, y и имеющими определенное поведение на бесконечности.

Лемма 3.1. *Формула $u(x,y) = u(x)(y)$, $x \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $y \in \mathbb{R}^n$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями $u(x) \in C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ и функциями, определенными в $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{R}^n$, k раз непрерывно дифференцируемыми по x, бесконечно дифференцируемыми по y и удовлетворяющими неравенствам*

$$(1+x)^{-p} e^{-\alpha x} (1+|y|^2)^{l/2} |\partial^\nu_x D^\beta_y u(x,y)| < c_{\nu\beta l},$$
$$x \ge 0,\ y \in \mathbb{R}^n,\ 0 \le \nu \le k, \tag{3.6$'$}$$

где β — произвольный мультииндекс, l — произвольное вещественное число, а p зависит от выбора β и l. При этом справедливы равенства

$$\frac{d^\nu u(x)}{dx^\nu}(y) = \partial^\nu_x u(x,y), \quad 0 \le \nu \le k. \tag{3.7}$$

Доказательство. Из непрерывности функции $u(x)$ по x и неравенств (3.6) следует непрерывность по x производной функции $u(x,y)$ по y любого порядка. Действительно,

$$|\partial^\beta_y u(x+\Delta x, y) - \partial^\beta_y u(x,y)| \le |u(x+\Delta x) - u(x)|^{|\beta|}_0,$$

а правая часть этого неравенства стремится к нулю при $\Delta x \to 0$. Неравенства (3.6$'$) при $\nu = 0$ совпадают с неравенствами (3.6).

Если производные по y функции $u(x,y)$ любого порядка непрерывны по x и удовлетворяют неравенствам (3.6$'$), то для любых x, s, l и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|u(x+\Delta x) - u(x)|^s_l < \varepsilon$, если

$|\Delta x| \leq \delta$, т.е. функция $u(x)$ принадлежит пространству $C(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$. Действительно, имеем неравенство

$$\begin{aligned}
&|u(x+\Delta x) - u(x)|_l^s \\
&\qquad = \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n,\\ |\beta|\leq s}} \big[(1+|y|^2)^{l/2}|\partial_y^\beta u(x+\Delta x, y) - \partial_y^\beta u(x,y)|\big] \\
&\qquad \leq \sup_{\substack{|y|\leq R,\\ |\beta|\leq s}} \big[(1+|y|^2)^{l/2}|\partial_y^\beta u(x+\Delta x, y) - \partial_y^\beta u(x,y)|\big] \\
&\qquad\qquad + \sup_{\substack{|y|\geq R,\\ |\beta|\leq s}} \big[(1+|y|^2)^{l/2}|\partial_y^\beta u(x+\Delta x, y) - \partial_y^\beta u(x,y)|\big].
\end{aligned}$$

Выберем R так, чтобы второе слагаемое в правой части неравенства было меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Это можно сделать, пользуясь неравенствами $(3.6')$

$$\sup_{\substack{|y|\geq R,\\ |\beta|\leq s}} \big[(1+|y|^2)^{l/2}|\partial_y^\beta u(x+\Delta x, y) - \partial_y^\beta u(x,y)|\big] \leq \sup_{|\beta|\leq s} C_{0\beta l+1}(1+R^2)^{-1/2}.$$

Выберем теперь δ так, чтобы первое слагаемое в правой части неравенства было меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Это так же можно сделать в силу равномерной непрерывности функции $(1+|y|^2)^{l/2}\partial_y^\beta u(x,y)$ на компактном множестве.

Если функции $D_y^\beta u(x,y)$ имеют непрерывные производные по x и удовлетворяют неравенствам $(3.6')$, то функция $u(x) \in C^1_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ и справедливо равенство (3.7) при $\nu = 1$. Докажем сначала, что функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема. Для любых s и l справедливы равенства

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \partial_x u(x,\cdot)\Big|_l^s \\
&= \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n,\\ |\beta|\leq s}} \Big[(1+|y|^2)^{l/2}\Big|\frac{1}{\Delta x}(\partial_y^\beta u(x+\Delta x, y) - \partial_y^\beta u(x,y)) - \partial_x\partial_y^\beta u(x,y))\Big|\Big] \\
&\qquad = \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}^n,\\ |\beta|\leq s}} (1+|y|^2)^{l/2}\big|\partial_x\partial_y^\beta u(x+s\Delta x, y) - \partial_x\partial_y^\beta u(x,y)\big|,
\end{aligned}$$

где $s = s(y)$ — функция от y, принимающая значение из промежутка $[0,1]$ по теореме Лагранжа о конечных приращениях. Пользуясь непрерывностью функции $\partial_x\partial_y^\beta u(x,y)$ и приведенным выше приемом оценки нормы приращения функции $u(x)$, можно показать, что левая часть полученного равенства стремится к нулю при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$\frac{du(x)}{dx}(y) = \partial_x u(x,y).$$

Из этого равенства и неравенств (3.6′) следуют неравенства (3.6) при $\nu = 1$. Аналогично устанавливается принадлежность функции $u(x)$ пространству $C^{\nu}_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ для всех $\nu \le k$.

Пусть теперь $u(x) \in C^1_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$. Имеем неравенство

$$\Big|\frac{\partial_y^\beta u(x+\Delta x, y) - \partial_y^\beta u(x,y)}{\Delta x} - \partial_y^\beta \frac{du(x)}{dx}(y)\Big| \le \Big|\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \frac{du(x)}{dx}\Big|_0^{|\beta|}.$$

Из него следует существование непрерывной производной по x функции $\partial_y^\beta u(x,y)$, равной $\partial_y^\beta \frac{du(x)}{dx}(y)$. Неравенства (3.6′) при $\nu = 1$ совпадают с неравенствами (3.6) в силу равенства $\partial_x \partial_y^\beta u(x,y) = \partial_y^\beta \frac{du(x)}{dx}(y)$. Аналогично устанавливается непрерывность производных функций $\partial_y^\beta u(x,y)$ по x до порядка ν и справедливость равенства (3.7) при $\nu > 1$. $\square$

Из леммы 3.1 следует, что всякому решению $u(x) \in C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ задачи (1.1), (1.2) соответствует классическое решение этой задачи, удовлетворяющее неравенствам (3.6′) и наоборот, каждому “поточечному” решению задачи (1.1), (1.2), удовлетворяющему неравенствам (3.6′), соответствует “параметрическое” решение этой задачи из пространства $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$.

В дальнейшем через $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ будем обозначать пространство функций на $\overline{\mathbb{R}}_+$, удовлетворяющее таким же оценкам по x, как и $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$. Следовательно, если $u(x) \in C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$, то для любого $y \in \mathbb{R}^n$ $u(x)(y) \in C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Пользуясь теоремами вложения и о следах, можно интерпретировать “параметрические” решения задачи (1.1), (1.2) из пространства $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$ как обобщенные решения задачи из весовых функциональных пространств в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Построение решений задачи (1.6), (1.7) в классах функций $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$, $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$ основано на построении мультипликаторов в пространствах S и S', соответствующим образом зависящих от параметра.

Обозначим через $M(E)$ множество мультипликаторов пространства основных или обобщенных функций E. Известно, что $M(S) =$

$M(S')$ и состоит из функций $a(\sigma) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\partial_\sigma^\beta a(\sigma)| \le c_\beta (1+|\sigma|)^{q_\beta}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{3.8}$$

где β — произвольный мультииндекс, а $q_\beta, c_\beta > 0$ — числа, зависящие от производной функции $a(\sigma)$ порядка β [3].

Лемма 3.2. *Умножение на функцию $a(\sigma) \in M(S)$ является непрерывным отображением из H_s^l в $H_{s-q(l)}^l$, где $q = q(l)$ — некоторая функция от l, зависящая от функции $a(\sigma)$.*

Доказательство леммы основано на одном из методов построения интерполяционных пространств и сводится к доказательству неравенства

$$\|a(\sigma)h\|_{s-q(l)}^l \le C\Big(\max_{|\beta|\le[|l|]+1} c_\beta\Big)\|h\|_s^l, \tag{3.9}$$

где C — константа, зависящая от l, s и не зависящая от функции $a(\sigma)$ [8].

Рассмотрим семейство мультипликаторов $a(x,\sigma)$ в пространстве S, гладко зависящих от параметра $x \ge 0$, для которых выполняется неравенство

$$|\partial_x^\nu \partial_\sigma^\beta a(x,\sigma)| \le c_{\beta\nu}(1+x)^{p_{\beta\nu}} e^{\alpha x}(1+|\sigma|)^{q_{\beta\nu}}, \quad x \ge 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{3.10}$$

где $c_{\beta\nu} > 0$, $p_{\beta\nu}, q_{\beta\nu}$ — числа, зависящие от производных функции $a(x,\sigma)$ соответствующих порядков.

Лемма 3.3. *Умножение на функцию $a(x,\sigma)$, удовлетворяющую неравенствам* (3.10)*, является непрерывным отображением пространства H_s^l в пространство $C^k_{\alpha\bar p(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s-\bar q(l)})$, где k — фиксированное целое, s, l — произвольные числа, $\bar p(l)$ и $\bar q(l)$ — некоторые функции, зависящие от l при данном k и определяемые функцией $a(x,\sigma)$.*

Доказательство. Воспользовавшись леммой 3.2 и неравенствами (3.10), при каждом $x \ge 0$ и $\nu \ge 0$ имеем неравенство

$$\begin{aligned}\|\partial_x^\nu a(x,\sigma)h\|^l_{s-q(l,\nu)} &\\ &\le c_\nu \max_{|\beta|\le[|l|]+1}(c_{\beta\nu}(1+x)^{p_{\beta\nu}}e^{\alpha x})\|h\|_s^l \\ &\le c'_\nu(1+x)^{p(l,\nu)}e^{\alpha x}\|h\|_s^l, \end{aligned} \tag{3.11}$$

где $p(l,\nu) = \max_{|\beta|\le[|l|]+1} p_{\beta\nu}$, $c'_\nu = c_\nu \max_{|\beta|\le[|l|]+1} c_{\beta\nu}$.

Пусть

$$\bar q(l) = \max_{0\le\nu\le k+1} q(l,\nu), \quad \bar p(l) = \max_{0\le\nu\le k+1} p(l,\nu), \quad C = \max_{0\le\nu\le k+1} c'_\nu.$$

Тогда для всех $x \ge 0$ и $\nu \le k+1$ имеем неравенство

$$(1+x)^{-\bar p(l)} e^{-\alpha x} \|\partial_x^\nu a(x,\sigma) h\|^l_{s-\bar q(l)} \le C\|h\|^l_s. \tag{3.12}$$

Покажем, что производная по x функции $\partial_x^\nu a(x,\sigma)h$ в пространстве $H^l_{s-\bar q(l)}$ совпадает с функцией $\partial_x^{\nu+1} a(x,\sigma)h$, т.е. дифференцирование по x оператора умножения на функцию, зависящую от x, в этом пространстве сводится к дифференцированию мультипликатора по параметру x. Воспользовавшись формулой Тейлора с интегральным остаточным членом, рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} b_\nu(x,\Delta x,\sigma) &= \frac{\partial_x^\nu a(x+\Delta x,\sigma) - \partial_x^\nu a(x,\sigma)}{\Delta x} - \partial_x^{\nu+1} a(x,\sigma) \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int\limits_x^{x+\Delta x} \partial_t^{\nu+2} a(t,\sigma)(x+\Delta x - t)\,dt. \end{aligned}$$

При фиксированном Δx функция $b_\nu(x,\Delta x,\sigma)$ имеет такие же свойства, как и функция $\partial_x^{\nu+2} a(x,\sigma)$. Действительно,

$$\begin{aligned} &|\partial_\sigma^\beta b_\nu(x,\Delta x,\sigma)| \\ &\quad\le \frac{1}{|\Delta x|} \int\limits_x^{x+\Delta x} |x+\Delta x - t|\,dt \max_{t\in[x,x+\Delta x]} |\partial_t^{\nu+2}\partial_\sigma^\beta a(t,\sigma)| \\ &\quad\le \frac{|\Delta x|}{2} \max_{t\in[x,x+\Delta x]} |\partial_t^{\nu+2} D_\sigma^\beta a(t,\sigma)| \\ &\quad\le c_{\beta\nu+2}\frac{|\Delta x|}{2} \max_{t\in[x,x+\Delta x]} [(1+t)^{p_{\beta\nu+2}} e^{\alpha t}](1+|\sigma|)^{q_{\beta\nu+2}}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует неравенство, аналогичное (3.11)

$$\|b_\nu(x,\Delta x,\sigma)\|^l_{s-\bar q(l)} \le c''_\nu |\Delta x| \max_{\substack{|\beta|\le[|l|]+1\\ t\in[x,x+\Delta x]}} [c_{\beta\nu+2}(1+t)^{p_{\beta\nu+2}} e^{\alpha t}]\|h\|^l_s. \tag{3.11$'$}$$

Правая часть полученного неравенства стремится к нулю при $\Delta x \to 0$ и фиксированном x. Следовательно, в пространстве $H^l_{s-\bar q(l)}$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dx}(\partial_x^\nu a(x,\sigma)h) = \partial_x^{\nu+1} a(x,\sigma)h, \quad 0\le\nu\le k-1. \tag{3.13}$$

Из этого равенства и неравенства (3.12) следует, что функция $a(x,\sigma)h$ принадлежит пространству $C^k_{\alpha\bar p(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s-\bar q(l)})$, и справедливо неравенство

$$|||a(x,\sigma)h|||_{C^k_{\alpha\bar p(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s-\bar q(l)})} \le C\|h\|^l_s, \tag{3.12$'$}$$

где константа C не зависит от h. Следовательно, умножение на функцию $a(x,\sigma)$, удовлетворяющую неравенствам (3.10) является непрерывным отображением из H^l_s в $C^k_{\alpha\bar p(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s-\bar q(l)})$. $\square$

Из леммы 3.3 следует, что умножение на указанную функцию является непрерывным отображением из S в $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$. Действительно, если $h \in S$, то из неравенства (3.12$'$) следует, что для любых l и s функция $a(x,\sigma)h(\sigma) \in C^k_{\alpha\bar p(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_s)$ и справедливо неравенство

$$|||a(x,\sigma)h(\sigma)|||_{C^k_{\alpha\bar p(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_s)} \le C\|h\|^l_{s+\bar q(l)}.$$

А это, как уже отмечалось, означает непрерывность указанного отображения.

Умножение на функцию, удовлетворяющую неравенствам (3.10), является непрерывным отображением из S' в $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$. Это следует также из леммы 3.3, так как каждый элемент пространства S' принадлежит некоторому пространству H^l_s и сходимость в S' сводится к сходимости в этих пространствах.

В дальнейшем будем неоднократно пользоваться переходом от уравнения вида (1.6) к матричной его записи. Поэтому естественно возникают семейства матричных мультипликаторов вида $e^{x\mathcal{P}(\sigma)}$, где $\mathcal{P}(\sigma)$ — матрица, элементы которой мультипликаторы в S, вещественные части собственных значений которой ограничены. Для таких матричных мультипликаторов справедливы оценки вида (3.10), которые получаются из известных оценок матричной экспоненты.

Лемма 3.4. *Если элементы $a_{ij}(\sigma)$ матрицы $\mathcal{P}(\sigma)$ размера $r\times r$ являются мультипликаторами в S и собственные ее числа $\lambda(\sigma)$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda(\sigma) \le \alpha$, то элементы матрицы $e^{x\mathcal{P}(\sigma)}$ являются мультипликаторами в S, гладко зависящими от параметра x и справедливо неравенство, аналогичное неравенству* (3.10)

$$\|\partial^\nu_x\partial^\beta_\sigma e^{x\mathcal{P}(\sigma)}\| \le c_{\beta\nu}(1+x)^{p_{\beta\nu}}(1+|\sigma|)^{q_{\beta\nu}}e^{\alpha x}, \quad x \ge 0. \tag{3.14}$$

Доказательство. Пользуясь оценкой матричной экспоненты [14], неравенствами $\operatorname{Re}\lambda(\sigma) \le \alpha$ для собственных чисел матрицы $\mathcal{P}(\sigma)$ и неравенствами вида (3.8) для элементов матрицы $\mathcal{P}(\sigma)$ имеем при $x \ge 0$ неравенство

$$\|e^{x\mathcal{P}(\sigma)}\| \le 1 + 2\|\mathcal{P}(\sigma)\|x + (2\|\mathcal{P}(\sigma)\|)^2\frac{x^2}{2!} + \cdots$$
$$+ (2\|\mathcal{P}(\sigma)\|)^{r-1}\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}e^{\alpha x} \le c_0(1+x)^{r-1}(1+|\sigma|)^{q_0}e^{\alpha x},$$

где $c_0 > 0,\ q_0$ — некоторые числа, зависящие от элементов матрицы $\mathcal{P}(\sigma)$.

Пользуясь свойствами элементов матрицы $\mathcal{P}(\sigma)$ с помощью формулы Лейбница и оценки для матричной экспоненты, можно получить неравенство (3.14) для производных матричной функции $e^{x\mathcal{P}(\sigma)}$ по x и σ любого порядка.

Из неравенства (3.14) и леммы 3.3 следует, что умножение на элементы матрицы $e^{x\mathcal{P}(\sigma)}$ является непрерывным отображением из пространства H^l_s в пространство $C^k_{\alpha\bar{p}(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s-\bar{q}(l)})$, а, следовательно, из S в $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ и из S' в $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$. □

Рассмотрим вектор-функцию

$$V(x) = e^{x\mathcal{P}(\sigma)}H(\sigma), \tag{3.15}$$

где $H(\sigma) = (h_1(\sigma), \ldots, h_r(\sigma))^T,\ V(x) = (v_1(x), \ldots, v_r(x))^T$, а матрица $\mathcal{P}(\sigma)$ удовлетворяет условиям леммы 3.4.

Пользуясь обобщением равенства (3.13) на матричные функции, легко убедиться, что вектор-функция $V(x)$ является решением задачи Коши

$$\frac{dV(x)}{dx} = \mathcal{P}(\sigma)V, \quad x \ge 0, \tag{3.16}$$

$$V(0) = H(\sigma). \tag{3.17}$$

Сформулируем более точно приведенные выше утверждения в виде леммы, которой будем неоднократно пользоваться.

Лемма 3.5. *Если $h_i(\sigma) \in S$, $i = 1, \ldots, r$, то элементы $v_i(x)$ вектор-функции $V(x)$, заданной равенством* (3.15) *принадлежат пространству $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ для любого $k \ge 0$, вектор-функция $V(x)$ является решением задачи Коши* (3.16)–(3.17) *и справедливы неравенства*

$$|||v_i(x)|||_{C^k_{\alpha\bar{p}(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s-\bar{q}(l)})} \le C\sum_{j=1}^{r}\|h_i\|^l_s, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{3.18}$$

Если через $\|H(\sigma)\|^l_s$ обозначить норму вектор-функции $H(\sigma)$ в пространстве $[H^l_s]^r$, а через $|||V(x)|||_{C^k_{\alpha\bar{p}(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s-\bar{q}(l)})}$ — норму вектор-функции $V(x)$ в пространстве $C^k_{\alpha\bar{p}(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, [H^l_{s-\bar{q}(s)}]^r)$, то неравенства

(3.18) можно записать одним неравенством

$$|||V(x)|||_{C^k_{\alpha\bar{p}(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s-\bar{q}(l)})} \leq C\|H(\sigma)\|^l_s. \tag{3.18$'$}$$

При построении решений неоднородных уравнений будут использованы интегралы по параметру от функций со значениями в пространствах $C^k_{\gamma\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ и им подобных. Ниже приводятся необходимые для этих целей конструкции и утверждения.

Пусть вектор-функция $G(x) \in C^k_{\gamma\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S^r)$, а матрица $\mathcal{P}(\sigma)$ удовлетворяет условиям леммы 3.4. Тогда вектор-функция $e^{(x-t)\mathcal{P}(\sigma)}G(t)$ определена при всех $x \geq 0$ и $t \leq x$, бесконечно дифференцируема по параметру как функция со значениями в пространстве S. Справедлива также формула

$$\frac{d^\nu}{dx^\nu}(e^{(x-t)\mathcal{P}(\sigma)}G(t)) = \partial^\nu_x e^{(x-t)\mathcal{P}(\sigma)}G(t). \tag{3.13$'$}$$

Она доказывается аналогично равенству (3.13). Так как вектор-функция $e^{(x-t)\mathcal{P}(\sigma)}G(t)$ непрерывна по параметру t как функция со значениями в S, то естественным образом определяется вектор-функция

$$W(x) = \int\limits_0^x e^{(x-t)\mathcal{P}(\sigma)}G(t)\,dt. \tag{3.19}$$

Лемма 3.6. *Если $G(t) \in C^k(\overline{\mathbb{R}}_+, S^r)$, то вектор-функция $W(x)$, определенная равенством* (3.19)*, где матрица $\mathcal{P}(\sigma)$ удовлетворяет условиям леммы* 3.4*, $k+1$ раз непрерывно дифференцируемая по x и удовлетворяет уравнению*

$$\frac{dW(x)}{dx} = \mathcal{P}(\sigma)W(x) + G(x), \quad x \geq 0. \tag{3.20}$$

Доказательство. Покажем, что имеет место равенство (3.20). Для любых l и s имеем неравенство

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{W(x+\Delta x) - W(x)}{\Delta x} &- \mathcal{P}(\sigma)W(x) - G(x)\Big\|^l_s \\ \equiv \Bigg\|\frac{1}{\Delta x}\Bigg(\int\limits_0^{x+\Delta x} &e^{(x+\Delta x-t)\mathcal{P}(\sigma)}G(t)\,dt - \int\limits_0^x e^{(x-t)\mathcal{P}(\sigma)}G(t)\,dt\Bigg) \\ &- \mathcal{P}(\sigma)\int\limits_0^x e^{(x-t)\mathcal{P}(\sigma)}G(t)\,dt - G(x)\Bigg\|^l_s\end{aligned}$$

$$\leq \left\| \int\limits_0^x \Big(\frac{1}{\Delta x}\big(e^{(x+\Delta x-t)\mathcal{P}(\sigma)} - e^{(x-t)\mathcal{P}(\sigma)}\big) - \mathcal{P}(\sigma)e^{(x-t)\mathcal{P}(\sigma)}\Big)G(t)\,dt\right\|_s^l$$

$$+\left\|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} e^{(x+\Delta x-t)\mathcal{P}(\sigma)}G(t)\,dt - G(x)\right\|_s^l. \quad (3.21)$$

Оценим сначала второе слагаемое в правой части неравенства

$$\left\|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} e^{(x+\Delta x-t)\mathcal{P}(\sigma)}G(t)\,dt - G(x)\right\|_s^l$$

$$= \left\|\frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} \big(e^{(x+\Delta x-t)\mathcal{P}(\sigma)}G(t) - G(x)\big)\,dt\right\|_s^l$$

$$\leq \max_{t\in[x,x+\Delta x]} \|e^{(x+\Delta x-t)\mathcal{P}(\sigma)}G(t) - G(x)\|_s^l$$

$$\leq \max_{t\in[x,x+\Delta x]} \|(e^{(x+\Delta x-t)\mathcal{P}(\sigma)} - J)G(t)\|_s^l + \max_{t\in[x,x+\Delta x]} \|G(t) - G(x)\|_s^l,$$

где J — единичная матрица.

Оба слагаемых в правой части неравенства стремятся к нулю при $\Delta x \to 0$. Второе — в силу непрерывности функции $G(x)$, а первое в силу непрерывной зависимости мультипликатора $e^{x\mathcal{P}(\sigma)}$ от параметра x

$$\lim_{x\to x_0} e^{x\mathcal{P}(\sigma)}G(x) = e^{x_0\mathcal{P}(\sigma)}G(x_0).$$

Для оценки первого слагаемого в правой части неравенства (3.21) рассмотрим вектор-функцию

$$A(x,t,\Delta x,\sigma) = \Big[\frac{1}{\Delta x}(e^{\Delta x\mathcal{P}(\sigma)} - J) - \mathcal{P}(\sigma)\Big]e^{(x-t)\mathcal{P}(\sigma)}.$$

При каждом x и t в пространстве H_s^l справедливо равенство

$$\lim_{\Delta x\to 0} A(x,t,\Delta x,\sigma)G(t) = 0,$$

которое следует из равенства (3.13′). Следовательно,

$$\left\|\int\limits_0^x A(x,t,\Delta x,\sigma)G(t)\,dt\right\|_s^l \leq \int\limits_0^x \|A(x,t,\Delta x,\sigma)G(t)\|_s^l\,ds \underset{\Delta x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

□

4. Краевые задачи для однородных уравнений

Рассмотрим сначала одну из простейших краевых задач — задачу Дирихле. Ее касательное преобразование Фурье имеет вид

$$P\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x)=0,\quad x\geq 0, \tag{4.1}$$

$$\frac{d^{j-1}v(x)}{dx^{j-1}}\Big|_{x=0}=h_j,\quad j=1,\ldots,r. \tag{4.2}$$

Необходимые и достаточные условия корректности этой задачи в пространстве быстро убывающих функций по переменной σ содержатся в следующей теореме.

Теорема 4.1. *Задача* (4.1), (4.2) *корректна в паре пространств* $(S, C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S))$, $k\geq m$, *тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1) *уравнение* (4.1) *является α-регулярным порядка r;*

2) *коэффициенты λ-многочлена $P^-_r(\lambda,\sigma)$ являются мультипликаторами в пространстве S.*

Доказательство. Покажем прежде всего достаточность условий 1) и 2) для корректности задачи (4.1), (4.2) в паре пространств $(S, C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S))$. Для этого рассмотрим задачу Коши

$$P^-_r\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x)=0,\quad x\geq 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{d^{j-1}v(x)}{dx^{j-1}}\Big|_{x=0}=h_j,\quad j=1,\ldots,r. \tag{4.4}$$

Решение этой задачи можно получить, воспользовавшись ее матричным представлением

$$\frac{dV(x)}{dx}=\mathcal{P}^-_r(\sigma)V(x),\quad x\geq 0, \tag{4.3$'$}$$

$$V(0)=H(\sigma), \tag{4.4$'$}$$

где

$$V(x)=\Big(v(x),\frac{dv(x)}{dx},\ldots,\frac{d^{r-1}v(x)}{dx^{r-1}}\Big)^T,$$

$$H(\sigma)=(h_1(\sigma),\ldots,h_r(\sigma))^T,$$

$$\mathcal{P}_r^-(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ -a_{r0}^-(\sigma) & -a_{r1}^-(\sigma) & -a_{r2}^-(\sigma) & \vdots & -a_{rr-1}^-(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Из условий 1), 2) и леммы 3.4 следует, что элементы матрицы $e^{x\mathcal{P}_r^-(\sigma)}$ являются мультипликаторами в S при каждом $x \geq 0$, гладко зависящими от x и для них справедливы оценки вида (3.14).

Рассмотрим вектор-функцию

$$V(x) = e^{x\mathcal{P}_r^-(\sigma)} H(\sigma), \quad x \geq 0.$$

Так как по условию $h_i(\sigma) \in S,\ i = 1, \dots, r$, то по лемме 3.5 элементы $v_i(x)$ вектор-функции $V(x)$ принадлежат пространству $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$, для них справедливы оценки вида (3.18), а вектор-функция $V(x)$ является решением задачи (4.3$'$), (4.4$'$).

Первый элемент вектор-функции $V(x)$ является решением задачи (4.3), (4.4), следовательно, и — решением задачи (4.1), (4.2). Таким образом, при выполнении условий 1) и 2) для любых граничных данных $h_j \in S,\ j = 1, \dots, r$, существует решение $v(x)$ задачи (4.1), (4.2), принадлежащее пространству $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S),\ k \geq m$, и для него справедлива оценка

$$|||v(x)|||_{C^k_{\alpha\bar{p}(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_s)} \leq C \sum_{j=1}^{r} \|h_j\|^l_{s+\bar{q}(l)}. \tag{4.5}$$

Следовательно, это решение линейно и непрерывно зависит от граничных данных $h_j,\ j = 1, \dots, r$. Единственность решения задачи (4.1), (4.2) в рассматриваемых пространствах следует из того, что по условию $\operatorname{mes} G_{r+1} = 0$ [7].

Решение задачи (4.1), (4.2) можно представить как сумму произведений граничных данных и решений этой задачи при следующих данных Дирихле: $h_j = \delta_{ij},\ i, j = 1, \dots, r$, где δ_{ij} — функция Кронекера. Построение таких решений аналогично приведенному. Обозначим соответствующее решение задачи (4.1), (4.2) через $q_j(x, \sigma),\ j = 1, \dots, r$. Для этих функций имеют место неравенства вида (3.10), т.е. они являются при каждом $x \geq 0$ мультипликаторами в S, гладко зависящими от x и имеющими определенное поведение по x.

Функция $v(x)=\sum_{j=1}^r q_j(x,\sigma)h_j(\sigma),\ x\geq 0$, является решением задачи (4.1), (4.2), удовлетворяющая требованиям теоремы 4.1. Пользуясь этим представлением, можно описать свойства решения $v(x)$ в зависимости от свойств функций $q_j(x,\sigma)$, которые являются касательными преобразованиями Фурье аналогов ядер Пуассона задачи Дирихле для эллиптических уравнений [11]. Поэтому функции $k_j(x,y)=\mathcal{F}_\sigma^{-1}q_j(x,\sigma),\ j=1,\dots,r$, естественно называть ядрами Пуассона задачи Дирихле для уравнения (1.1). Решение $u(x)$ задачи Дирихле для этого уравнения можно представить в виде

$$u(x)=\sum_{j=1}^r k_j(x,y)*g_j, \tag{4.6}$$

где g_j — данные Дирихле. В рассматриваемом случае ядра Пуассона являются свертывателями в пространстве S, гладко зависящими от параметра x и имеющими определенное поведение по этому параметру на бесконечности. Построение и исследование свойств касательных преобразований Фурье ядер Пуассона для общей граничной задачи (1.1), (1.2) будет основным инструментом исследования ее корректности.

Докажем теперь необходимость условий 1) и 2) в теореме 4.1. Предположим, что задача (4.1), (4.2) корректна в паре пространств $(S, C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)),\ k\geq m$ и $v(x)$ — ее решение. Рассмотрим функцию $v(x)$ как функцию переменных (x,σ): $v(x,\sigma)=v(x)(\sigma)$. Из леммы 3.1 следует, что функция $v(x,\sigma)$ при каждом $\sigma\in\mathbb{R}^n$ принадлежит пространству $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ и является решением задачи

$$P\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x,\sigma)=0,\quad x\geq 0,\ \sigma\in\mathbb{R}^n, \tag{4.1$'$}$$

$$\frac{d^{j-1}v(x,\sigma)}{dx^{j-1}}\Big|_{x=0}=h_j(\sigma),\quad j=1,\dots,r. \tag{4.2$'$}$$

Из равенства (4.1$'$) следует, что для любого $\sigma\in\mathbb{R}^n$ $v(x,\sigma)\in C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$. В (4.2$'$) вектор $(h_1(\sigma),\dots,h_r(\sigma))$ в данной точке $\sigma\in\mathbb{R}^n$ может принимать любые значения из $\mathbb{R}^r$ при соответствующем выборе $h_i(\sigma)\in S$. Поэтому из предположения о корректности задачи (4.1), (4.2) в паре пространств $(S, C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S))$ следует разрешимость задачи (4.1$'$), (4.2$'$) в классе функций $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ при каждом $\sigma\in\mathbb{R}^n$. На основании леммы 2.4 для каждого $\sigma\in\mathbb{R}^n$ существует не менее r корней уравнения (1.5), вещественная часть которых не превосходит α, т.е. $G^\alpha_r=\mathbb{R}^n$.

Уравнение (4.1) является на самом деле α-регулярным порядка r. Предположим, что это не так, т.е. $\operatorname{mes} G^\alpha_{r+1}\neq 0$. По лемме 2.1

множества G_k^α являются полуалгебраическими. Следовательно, существует точка σ_0 множества G_{r+1}^α, в некоторой окрестности $\Omega(\sigma_0)$ которой ровно $r+k,\ k>0$, корней $\lambda_i(\sigma)$ уравнения (1.5) удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda_i(\sigma)\le\alpha$. Действительно, множество G_{r+1}^α можно представить в виде

$$G_{r+1}^\alpha=(G_{r+1}^\alpha\setminus G_{r+2}^\alpha)\cup(G_{r+2}^\alpha\setminus G_{r+3}^\alpha)\cup\dots\cup G_m^\alpha,$$

где все слагаемые полуалгебраические непересекающиеся множества. Отсюда следует, что для некоторого $k>0$, $\operatorname{mes}(G_{r+k}^\alpha\setminus G_{r+k+1}^\alpha)\ne 0$. Возьмем произвольную внутреннюю точку σ_0 множества $G_{r+k}^\alpha\setminus G_{r+k+1}^\alpha$ и некоторую ее окрестность $\Omega(\sigma_0)$, принадлежащую этому множеству. Тогда в окрестности $\Omega(\sigma_0)$ группы корней $\{\lambda_1(\sigma),\dots,\lambda_{r+k}(\sigma)\}$ и $\{\lambda_{r+k+1}(\sigma),\dots,\lambda_m(\sigma)\}$ разделены. Следовательно, коэффициенты оператора

$$P_{r+k}^-\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)=\Big(\frac{d}{dx}-\lambda_1(\sigma)\Big)\dots\Big(\frac{d}{dx}-\lambda_{r+k}(\sigma)\Big)$$

являются бесконечно дифференцируемыми функциями в рассматриваемой окрестности.

Пусть функция $\mu(\sigma)\in C_0^\infty(\Omega(\sigma_0))$. Рассмотрим задачу Коши

$$P_{r+k}^-\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x,\sigma)=0,\quad x\ge 0, \tag{4.7}$$

$$\frac{d^{j-1}v(x,\sigma)}{dx^{j-1}}\Big|_{x=0}=\mu h_j(\sigma),\quad j=1,\dots,r+k, \tag{4.8}$$

где $h_1(\sigma)=h_2(\sigma)=\dots=h_r(\sigma)=0$, а остальные начальные данные принадлежат пространству S и не равны нулю. Так как вне $\Omega(\sigma_0)$ начальные данные этой задачи равны нулю, то уравнение (4.7) можно заменить уравнением

$$\varphi(\sigma)P_{r+k}^-\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x,\sigma)=0,\quad x\ge 0, \tag{4.7$'$}$$

где $\varphi\in C_0^\infty(\Omega(\sigma_0))$ и $\varphi=1$ на $\operatorname{supp}\mu$. Коэффициенты этого уравнения являются мультипликаторами в S.

Для любых $h_j\in S,\ j=r+1,\dots,r+k$, существует решение задачи (4.7), (4.8) в пространстве $C_{\alpha\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+,S),\ k\ge m$. Оно строится аналогично тому, как это было сделано выше для задачи (4.3), (4.4). Это решение является ненулевым решением задачи (4.1), (4.2) с нулевыми данными Дирихле. Это противоречит предположению о корректности задачи (4.1), (4.2). Противоречие возникло из-за предположения, что $\operatorname{mes} G^{\alpha}_{r+1} \neq 0$. Следовательно, $\operatorname{mes} G^{\alpha}_{r+1} = 0$, т.е. уравнение (4.1) является α-регулярным порядка r.

Докажем теперь, что выполнено условие 2). Рассмотрим многочлены $P^-_r(\lambda,\sigma), P^+_r(\lambda,\sigma)$ и соответствующие им дифференциальные операторы $P^-_r(\frac{d}{dx},\sigma), P^+_r(\frac{d}{dx},\sigma)$. Любое решение $v(x,\sigma)$ уравнения (4.1) можно представить в виде

$$v(x,\sigma) = v^-(x,\sigma) + v^+(x,\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G^{\alpha}_{r+1},$$

где слагаемые $v^-(x,\sigma)$ и $v^+(x,\sigma)$ удовлетворяют условиям

$$P^-_r\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v^-(x,\sigma) = 0, \quad P^+_r\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v^+(x,\sigma) = 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G^{\alpha}_{r+1}.$$

Указанное представление следует из равенства

$$P^-_r(\lambda,\sigma)R^-_r(\lambda,\sigma) + P^+_r(\lambda,\sigma)R^+_r(\lambda,\sigma) \equiv 1, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G^{\alpha}_{r+1}, \tag{4.9}$$

где $R^-_r(\lambda,\sigma)$ и $R^+_r(\lambda,\sigma)$ — λ-многочлены.

Равенство (4.9) следует из того, что для $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G^{\alpha}_{r+1}$ λ-многочлены $P^-_r(\lambda,\sigma)$ и $P^+_r(\lambda,\sigma)$ взаимно просты в силу α-регулярности уравнения (4.1) порядка r. Оно может быть получено при помощи алгоритма Евклида для нахождения наибольшего общего делителя этих многочленов [15].

Заменив в равенстве (4.9) λ на $\frac{d}{dx}$ и применив левую и правую его части к функции $v(x,\sigma)$, которая бесконечно дифференцируема по x, получим равенство

$$\begin{aligned} v(x,\sigma) = P^-_r\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)R^-_r\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x,\sigma) \\ + P^+_r\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)R^+_r\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x,\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G^{\alpha}_{r+1}. \end{aligned}$$

Обозначив слагаемые правой части этого равенства соответственно через $v^+(x,\sigma)$ и $v^-(x,\sigma)$, получим искомое представление функции $v(x,\sigma)$. Действительно, для $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G^{\alpha}_{r+1}$ имеем равенства

$$\begin{aligned} P^+_r\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v^+(x,\sigma) = P^+_r\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)P^-_r\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)R^-_r\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x,\sigma) \\ = R^-_r\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)P\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x,\sigma) = 0, \end{aligned}$$

$$P^-_r\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v^-(x,\sigma) = P^-_r\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)P^+_r\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)R^+_r\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x,\sigma)$$

$$= R_r^+\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)P\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x,\sigma) = 0.$$

Докажем, что $v^+(x,\sigma) = 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}$. Это следует из равенства

$$P_r^+\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v^+(x,\sigma) = 0, \quad x \geq 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}. \tag{4.10}$$

Так как корни $\lambda_i(\sigma),\ i = r+1,\dots,m$, уравнения (1.5) вне множества G_{r+1}^α удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda_i(\sigma) > \alpha$, то для любой точки $\sigma_0 \in \mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}$ существует такая ее окрестность $\Omega(\sigma_0)$, что в этой окрестности $\operatorname{Re}\lambda_k(\sigma) > \alpha + \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число.

Для удобства перейдем к матричной записи равенства (4.10)

$$\frac{d}{dx}V^+(x,\sigma) = \mathcal{P}_r^+(\sigma)V^+(x,\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}^\alpha, \tag{4.10$'$}$$

где

$$V^+(x,\sigma) = \Big(v^+(x,\sigma),\dots,\frac{d^{m-r-1}v^+(x,\sigma)}{dx^{m-r-1}}\Big)^T,$$

$$\mathcal{P}_r^+(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{r0}^+(\sigma) & -a_{r1}^+(\sigma) & \dots & -a_{r\,m-r-1}^+(\sigma) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, имеет место равенство

$$V^+(0,\sigma) = e^{-x\mathcal{P}_r^+(\sigma)}V^+(x,\sigma), \quad x \geq 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}^\alpha.$$

Пользуясь оценками матричной экспоненты вида (3.14) в указанной окрестности точки σ_0, имеем неравенство

$$\|V^+(0,\sigma)\| \leq \|e^{-x\mathcal{P}_r^+(\sigma)}\|\|V^+(x,\sigma)\| \\ \leq C_1(1+x)^{m-r-1}e^{-(\alpha+\varepsilon)x}\|V^+(x,\sigma)\|, \quad x \geq 0.$$

Оценив норму вектор-функции $V^+(x,\sigma)$ в этом неравенстве с помощью равенства

$$v^+(x,\sigma) = P_r^-\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)R_R^-\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x,\sigma),$$

получим неравенство

$$\|V^+(0,\sigma)\| \leq C_2(1+x)^{m-r-1}e^{-(\alpha+\varepsilon)x}\Big(|v(x,\sigma)| + \dots + \Big|\frac{d^s v(x,\sigma)}{dx^s}\Big|\Big),$$

$$x \geq 0,\ \sigma \in \Omega(\sigma_0), \quad (4.11)$$

где s — некоторое натуральное число.

По условию $v(x) \in C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$, $k \geq m$. Из неравенства (3.7) следует, что в ограниченной окрестности $\Omega(\sigma_0)$ произвольной точки $\sigma_0 \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\Big|\frac{d^j v(x,\sigma)}{dx^j}\Big| \leq C(\sigma)(1+x)^p e^{\alpha x}, \quad j \leq k,$$

где функция $C(\sigma)$ является ограниченной в этой окрестности. Из уравнения (4.1) следует, что такие же неравенства имеют место и для производных по x функции $v(x,\sigma)$ любого порядка. Используя эти неравенства в (4.11), получим неравенство

$$\|V^+(0,\sigma)\| \leq C_3(1+x)^{p'} e^{-\varepsilon x}, \quad x \geq 0,\ \sigma \in \Omega(\sigma_0),$$

где p' — некоторое число.

Так как $\lim_{x\to\infty}[(1+x)^{p'} e^{-\varepsilon x}] = 0$, то из полученного неравенства следует, что норма вектор-функции $V^+(0,\sigma)$ может быть сколь угодно малой при достаточно большом x в каждой точке окрестности $\Omega(\sigma_0)$. Следовательно, $V^+(0,\sigma) = 0$ в рассматриваемой окрестности. В силу произвольности выбора точки $\sigma_0 \in \mathbb{R}^n \setminus G^\alpha_{r+1}$ отсюда следует, что

$$v^+(x,\sigma) = 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G^\alpha_{r+1}.$$

Таким образом, $v(x,\sigma) = v^-(x,\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G^\alpha_{r+1}$ и, следовательно, является решением задачи

$$P^-_r\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x,\sigma) = 0, \quad x \geq 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G^\alpha_{r+1}, \quad (4.12)$$

$$\frac{d^{j-1}v(x,\sigma)}{dx^{j-1}}\Big|_{x=0} = h_j(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n. \quad (4.13)$$

Перейдя к матричной записи задачи (4.12), (4.13), ее решение $V(x,\sigma) = (v(x,\sigma), \frac{dv(x,\sigma)}{dx}, \ldots, \frac{d^{r-1}v(x,\sigma)}{dx^{r-1}})^T$ можно представить в виде

$$V(x,\sigma) = e^{x\mathcal{P}^-_r(\sigma)}H(\sigma), \quad x \geq 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G^\alpha_{r+1},$$

где $H(\sigma) = (h_1(\sigma), \ldots, h_r(\sigma))^T$.

Из равенств (4.12), (4.13) следует равенство

$$\frac{dV(x,\sigma)}{dx}\Big|_{x=0} = \mathcal{P}^-_r(\sigma)H(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G^\alpha_{r+1}.$$

Так как левая часть полученного равенства по предположению принадлежит пространству S^r, то для каждой вектор-функции $H(\sigma) \in S^r$ вектор-функция $\mathcal{P}_r^-(\sigma)H(\sigma)$ совпадает в $\mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}^\alpha$ с вектор-функцией из S^r.

Пусть $H_1(\sigma) = (h(\sigma), 0, \ldots, 0)$, $h(\sigma) \in S$. Тогда $V_1(0,\sigma) = \mathcal{P}_r^-(\sigma)H_1(\sigma) = (-a_r^-(\sigma)h(\sigma), 0, \ldots, 0)^T$. Следовательно, для любой функции $h(\sigma)$ из S функция $a_{r0}^-(\sigma)h(\sigma)$ совпадает в $\mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}^\alpha$ с функцией из S. Так как множество $\mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}^\alpha$ всюду плотно в $\mathbb{R}^n$, то отсюда следует, что функция $a_{r0}^-(\sigma)$ может быть доопределена в $\mathbb{R}^n$ до бесконечно дифференцируемой функции. При этом отображение, ставящее функцию $h(\sigma) \in S$ в соответствие функцию $a_{r0}^-(\sigma)h(\sigma) \in S$, является непрерывным в S в силу предположения корректности задачи (4.1), (4.2) в паре пространств $(S, C_{\alpha\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, S))$. Действительно, непрерывная зависимость решения $v(x) \in C_{\alpha\infty}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ от граничных данных $h_j \in S$, $j = 1, \ldots, r$ означает, что для любых l, s существуют такие s', l' и p, для которых справедливы неравенства

$$|||v(x)|||_{C_{\alpha p}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)} \leq C \sum_{j=1}^r \|h_j\|_{s'}^{l'}.$$

Если $v(x)$ — первый элемент вектор-функции $V_1(x,\sigma)$, то с учетом приведенного неравенства имеем неравенство

$$\|a_{r0}^-(\sigma)h(\sigma)\|_s^l = \left\|\frac{dV_1(0,\sigma)}{dx}\right\|_s^l \leq |||v_1(x)|||_{C_{\alpha p}^k(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)} \leq C\|h(\sigma)\|_{s'}^{l'}.$$

Следовательно, умножение на функцию $a_{r0}^-(\sigma)$ является непрерывным отображением в S, т.е. функция $a_{r0}^-(\sigma)$ является мультипликатором в S.

Рассматривая начальные данные вида $H_i(\sigma) = (0, \ldots, 0, h, 0, \ldots, 0)$, где все координатные функции, кроме i-й, равны нулю, аналогичными рассуждениями можно показать, что все коэффициенты λ-многочлена $P_r^-(\lambda, \sigma)$ являются мультипликаторами в S, т.е. необходимость условия 2) теоремы 4.1 доказана. □

Рассмотрим теперь общую граничную задачу (1.1), (1.2) для однородного уравнения в классах быстро убывающих функций. После применения касательного преобразования Фурье по переменной y имеем задачу

$$P\Big(\frac{d}{dx}, \sigma\Big)v(x) = 0, \quad x \geq 0, \tag{4.14}$$

$$B_j\Big(\frac{d}{dx}, \sigma\Big)v(x)\Big|_{x=0} = h_j, \quad j = 1, \ldots, r. \tag{4.15}$$

В многочисленных работах, в которых рассматривалась эта задача, предполагалась α-регулярность уравнения (4.14) порядка r и выполнение условия Лопатинского, которое в данном случае может быть представлено в таком виде

$$\det(B'_{jk}(\sigma)) \neq 0, \quad \sigma \in \Omega, \tag{4.16}$$

где $B'_j(\lambda,\sigma) \equiv \sum_{k=1}^{r} B'_{jk}(\sigma)\lambda^{k-1} = B_j(\lambda,\sigma) \pmod{P_r^-(\lambda,\sigma)}$, а множество Ω зависит от классов рассматриваемых функций. О существенности этих условий для корректности задачи (4.14), (4.15) в паре пространств $(S, C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S))$, $k \geq \bar{m} = \max\{m, m_1, \ldots, m_r\}$, где m_j — порядок дифференцирования по x оператора $B_j(\frac{d}{dx}, \sigma)$, свидетельствует следующая теорема.

Теорема 4.2. *Задача* (4.14), (4.15) *корректна в паре пространств* $(S, C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S))$, $k \geq \bar{m}$, *тогда и только тогда, когда выполнены условия:*

1) *уравнение* (4.14) *является α-регулярным порядка r;*

2) *коэффициенты λ-многочлена $P_r^-(\lambda,\sigma)$ являются мультипликаторами в S;*

3) *условие Лопатинского* (4.16) *выполняется для всех $\sigma \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Покажем прежде всего достаточность условий 1)–3) для корректности задачи (4.14), (4.15) в паре пространств $(S, C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S))$. Из условий 2) и 3) следует, что существует матрица, обратная к матрице $\mathcal{B}'(\sigma) = (B'_{jk}(\sigma))$, и ее элементы, как и элементы матрицы $\mathcal{B}'(\sigma)$ являются мультипликаторами в S. Доказательство этого факта основано на оценке

$$|\det \mathcal{B}'(\sigma)| > c(1 + |\sigma|)^{\omega},$$

где $c > 0$, ω — некоторые числа, и которая устанавливается с помощью теоремы Зайденберга–Тарского [8].

Тогда матричное уравнение

$$\mathcal{B}'(\sigma)V(\sigma) = H(\sigma),$$

где $V(\sigma) = (v_0(\sigma), \ldots, v_{r-1}(\sigma))^T$, $H(\sigma) = (h_1(\sigma), \ldots, h_r(\sigma))^T$ имеет единственное решение в пространстве S^r, если $h_j(\sigma) \in S$, $j = 1, \ldots, r$. Из теоремы 4.1 следует существование единственного решения уравнения (4.14) в пространстве $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ с данными Дирихле

$v_0(\sigma), \dots, v_{r-1}(\sigma)$. Это решение по построению будет решением задачи (4.14), (4.15), непрерывно зависящее от граничных данных $h_j(\sigma)$, т.е. задача (4.14), (4.15) корректна в указанной паре пространств. Условие Лопатинского 3) обеспечивает эквивалентность общей граничной задачи и задачи Дирихле.

Более полную информацию о решении задачи (4.14), (4.15) можно получить с помощью касательного преобразования Фурье ядер Пуассона этой задачи. Рассмотрим функции $q_i(x,\sigma),\ i = 1, \dots, r$, являющиеся решениями задачи

$$P_r^-\Big(\frac{d}{dx}, \sigma\Big) q(x,\sigma) = 0, \quad x \geq 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{4.17}$$

$$B_j\Big(\frac{d}{dx}, \sigma\Big) q(x,\sigma)\Big|_{x=0} = \delta_{ji}, \quad i,j = 1, \dots, r,\ \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{4.18}$$

Для всякого решения уравнения (4.17) граничные условия (4.18) равносильны условиям

$$B_j'\Big(\frac{d}{dx}, \sigma\Big) q(x,\sigma)\Big|_{x=0} = \delta_{ji}, \quad i,j = 1, \dots, r,\ \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{4.18$'$}$$

Пусть $q_i(x,\sigma)$ — решение задачи (4.17), (4.18) и $Q_i(x,\sigma) = (q_i(x,\sigma), \dots, \frac{d^{r-1}q_i(x,\sigma)}{dx^{r-1}})^T$. Тогда условие (4.18$'$) имеет вид

$$\mathcal{B}'(\sigma) Q_i(0,\sigma) = \Omega_i, \quad i = 1, \dots, r, \tag{4.18$''$}$$

где $\Omega_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0)^T$.

Так как элементы матрицы $\mathcal{B}'(\sigma)^{-1}$ являются мультипликаторами в S, то такими же свойствами обладают элементы вектор-функции

$$Q_i(0,\sigma) = \mathcal{B}'(\sigma)^{-1}\Omega_i,$$

т.е. для любого мультииндекса β существуют такие числа $c_{\beta i}$ и $\nu_{\beta i}$, что выполняются неравенства

$$\|D_\sigma^\beta Q_i(0,\sigma)\| \leq c_{\beta_i}(1 + |\sigma|)^{\nu_{\beta i}}, \quad i = 1, \dots, r.$$

В матричной форме уравнение (4.17) имеет вид

$$\frac{dQ(x,\sigma)}{dx} = \mathcal{P}_r^-(\sigma) Q(x,\sigma), \quad x \geq 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{4.17$'$}$$

Решение $Q_i(x,\sigma)$ задачи (4.17$'$), (4.18$''$) можно представить в виде

$$Q_i(x,\sigma) = e^{x\mathcal{P}_r^-(\sigma)} Q_i(0,\sigma).$$

Рассуждая как и при доказательстве леммы 3.4, получим оценки для производных вектор-функций $Q_i(x,\sigma)$ по x и σ любого порядка

$$\left\|\frac{d^\nu}{dx^\nu}\partial_\sigma^\beta Q_i(x,\sigma)\right\| \le c_{\beta\nu i}(1+x)^{r_{\beta\nu i}}e^{\alpha x}(1+|\sigma|)^{\mu_{\beta\nu i}},$$
$$x\ge 0,\ \sigma\in\mathbb{R}^n,\ i=1,\dots,r. \quad (4.19)$$

Из неравенств (4.19) и леммы 3.3 следует, что умножение на элементы вектор-функции $Q_i(x,\sigma), i=1,\dots,r$, является непрерывным отображением пространства S в пространство $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+,S)$.

Свойства построенных функций $q_i(x,\sigma)$ позволяют представить решение задачи (4.14), (4.15) для $h_i(\sigma)\in S,\ i=1,\dots,r$, в следующем виде

$$v(x,\sigma)=\sum_{i=1}^r q_i(x,\sigma)h_i(\sigma). \quad (4.20)$$

Пользуясь леммой 3.3 и неравенствами (4.19), можно показать, что для любых l и s существуют такие $C,\bar p(l),\bar q(l)$, при которых справедливы неравенства

$$|||v(x)|||_{C^k_{\alpha\bar p(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+,H^l_s)} \le C\sum_{i=1}^r \|h_i\|^l_{s+\bar q(l)}.$$

Эти неравенства означают, что решение $v(x)$ в пространстве $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+,S)$ непрерывно зависит от граничных данных $h_i(\sigma),\ i=1,\dots,r$, принадлежащих пространству S.

Пусть $k_i(x,y)$ — обратное касательное преобразование Фурье функции $q_i(x,y)$, т.е. ядра Пуассона задачи (1.1), (1.2). По построению они являются свертывателями в пространстве S, гладко зависящими от параметра x. Решение $u(x)$ задачи (1.1), (1.2) в случае однородного уравнения можно представить в виде

$$u(x)=\sum_{i=1}^r k_i(x,y)*g_i. \quad (4.21)$$

Представления (4.20) и (4.21) позволяют уточнять свойства решений в зависимости от конкретных особенностей задачи.

Докажем необходимость условий 1)–3) в теореме 4.2. Как и при доказательстве теоремы 4.1 воспользуемся переходом от параметрических решений к точечным. Пусть $v(x)$ решение задачи (4.14), (4.15), принадлежащее пространству $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+,S),\ k\ge\bar m=\max\{m,m_1,\dots,m_r\}$. Тогда функция $v(x,\sigma)=v(x)(\sigma)$ по переменной

σ принадлежит пространству $S(\mathbb{R}^n)$, а по переменной x пространству $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ и при каждом $\sigma \in \mathbb{R}^n$ является решением задачи

$$P\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x,\sigma)=0, \quad x\ge 0,\ \sigma\in\mathbb{R}^n, \tag{4.14$'$}$$

$$B_j\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x,\sigma)\Big|_{x=0}=h_j(\sigma), \quad j=1,\dots,r. \tag{4.15$'$}$$

Из предположения о корректности задачи (4.14), (4.15) в паре пространств $(S, C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S))$ следует разрешимость задачи (4.14$'$), (4.15$'$) при каждом $\sigma \in \mathbb{R}^n$ в пространстве $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Действительно, для любой точки $\sigma_0 \in \mathbb{R}^n$ и вектора $(a_1,\dots,a_r)\in\mathbb{R}^r$ существуют такие функции $h_1(\sigma),\dots,h_r(\sigma)$ из $S(\mathbb{R}^n)$, что $h_1(\sigma_0)=a_1,\dots,h_r(\sigma_0)=a_r$. Тогда решение задачи (4.14), (4.15), соответствующее граничным данным, будет решением задачи (4.14$'$), (4.15$'$) из пространства $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, соответствующее граничным данным $a_1,\dots,a_r$ в точке σ_0.

Из корректности задачи (4.14), (4.15) в паре пространств $(S, C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S))$ следует непрерывная зависимость решения $v(x,\sigma_0)$ от граничных данных.

Из разрешимости задачи (4.14$'$), (4.15$'$) следует, что при каждом $\sigma\in\mathbb{R}^n$ уравнение (1.5) имеет не менее r α-регулярных корней. Действительно, пусть $\nu(\sigma)$ — количество α-регулярных корней в точке σ, а $z_1(x,\sigma),\dots,z_{\nu(\sigma)}(x,\sigma)$ — соответствующие им элементы фундаментальной системы решений уравнения (4.14$'$) вида $z_i(x,\sigma)=x^{k_i}e^{x\lambda_i(\sigma)}$, где k_i зависит от кратности корня $\lambda_i(\sigma)$. Тогда для любых $h_j(\sigma)$, $j=1,\dots,r$, существуют такие $c_i(\sigma)$, что функция

$$v(x,\sigma)=\sum_{i=1}^{\nu(\sigma)}c_i(\sigma)z_i(x,\sigma)$$

является решением задачи (4.14$'$), (4.15$'$). Так как

$$B_j\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x,\sigma)\Big|_{x=0}=\sum_{i=1}^{\nu(\sigma)}f_{ij}(\sigma)c_i(\sigma), \quad j=1,\dots,r,$$

то система линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{\nu(\sigma)}f_{ij}(\sigma)c_i(\sigma)=h_j(\sigma), \quad j=1,\dots,r,$$

при каждом $\sigma\in\mathbb{R}^n$ имеет решение для любых $h_j(\sigma)$, $j=1,\dots,r$. Отсюда следует, что количество неизвестных в этой системе не менее r, т.е. $\nu(\sigma)\ge r$.

Обоснование того, что уравнение (4.14) является α-регулярным порядка r, аналогично приведенному в доказательстве теоремы 4.1. Если $\operatorname{mes} G^{\alpha}_{r+1} \neq 0$, то существует $\sigma_0 \in G^{\alpha}_{r+1}$ и ее окрестность $\Omega_0 \subset G^{\alpha}_{r+1}$, в которой коэффициенты λ-многочлена $P^{-}_{r+k}(\lambda, \sigma),\ k > 0$, построенного по α-регулярным корням, бесконечно дифференцируемые функции. Тогда граничные операторы $B_j(\frac{d}{dx}, \sigma)$ можно представить в виде

$$B_j\Big(\frac{d}{dx}, \sigma\Big) = P^{-}_{r+k}\Big(\frac{d}{dx}, \sigma\Big) R_j\Big(\frac{d}{dx}, \sigma\Big) + B''_j\Big(\frac{d}{dx}, \sigma\Big), \tag{4.22}$$

где $\deg_\lambda B''_j(\lambda, \sigma) \le r + k - 1$ и коэффициенты $B''_{ji}(\sigma)$ операторов $B''_j(\frac{d}{dx}, \sigma)$ бесконечно дифференцируемые функции в рассматриваемой окрестности.

Система линейных уравнений

$$\begin{gathered} B''_{1r+k-1}(\sigma) v_{r+k}(\sigma) + \dots + B''_{10}(\sigma) v_1(\sigma) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_{rr+k-1}(\sigma) v_{r+k}(\sigma) + \dots + B_{r0}(\sigma) v_1(\sigma) = 0 \end{gathered} \tag{4.23}$$

имеет ненулевое решение $(v_1(\sigma), \dots, v_{r+k}(\sigma)),\ v_i(\sigma) \in C^{\infty}_0(\Omega_0)$. Пусть существует точка $\sigma_1 \in \Omega_0$, в которой $\operatorname{rang}(B''_{ji}(\sigma_1)) = r$. Тогда существуют такие r столбцов матрицы $(B''_{ji}(\sigma_1))$ размера $r \times k$, что определитель матрицы, составленной из этих столбцов, отличен от нуля в некоторой окрестности $\Omega_1 \subset \Omega_0$ точки σ_1. Выбрав функции $v_i(\sigma)$ с номерами, отличными от номеров этих столбцов, произвольно из пространства $C^{\infty}_0(\Omega_1)$, остальные найдем как решение системы r линейных уравнений с r неизвестными, определитель которой бесконечно дифференцируемая функция, не имеющая нулей в Ω_1. Они будут принадлежать пространству $C^{\infty}_0(\Omega_1)$.

Построим решение задачи Дирихле для уравнения

$$P^{-}_{r+k}\Big(\frac{d}{dx}, \sigma\Big) v(x, \sigma) = 0$$

с данными Дирихле $v_1(\sigma), \dots, v_{r+k}(\sigma)$ как в доказательстве теоремы 4.1. Оно принадлежит пространству $C^{k}_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ и является нулевым решением задачи (4.14), (4.15) в силу (4.22) и (4.23). Это противоречит предположению о корректности этой задачи в рассматриваемом пространстве.

Если же $\operatorname{rang}(B''_{ji}(\sigma)) < r$ для всех $\sigma \in \Omega_0$, то это означает, что в матрице есть строка, которая является линейной комбинацией остальных с коэффициентами, гладкими в некотором множестве $\Omega'_0 \subset \Omega_0$. Если все такие строки отбросить, то найдется точка и ее окрестность, в которой ранг новой системы будет равен количеству строк. А тогда можно повторить предыдущие рассуждения.

Таким образом, из предположения о том, что $\operatorname{mes} G^{\alpha}_{r+1} \neq 0$, следует существование нетривиального решения задачи (4.14), (4.15) с нулевыми граничными данными. А это противоречит предположению о корректности этой задачи в рассматриваемых пространствах. Следовательно, $\operatorname{mes} G^{\alpha}_{r+1} = 0$, т.е. уравнение (4.14) является α-регулярным порядка r.

Всякое решение $v(x)$ задачи (4.14), (4.15) из пространства $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ является решением задачи

$$P^-_r\Big(\frac{d}{dx}, \sigma\Big)v(x,\sigma) = 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G^{\alpha}_{r+1},\ x \geq 0, \tag{4.24}$$

$$B_j\Big(\frac{d}{dx}, \sigma\Big)v(x,\sigma)\Big|_{x=0} = h_j(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n,\ j = 1, \dots, r. \tag{4.25}$$

Это доказывается аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 4.1 для задачи Дирихле. Если мы покажем, что данные Коши для решений задачи (4.24), (4.25) из пространства $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ совпадают с пространством S^r, то отсюда будет следовать разрешимость задачи Коши для уравнения (4.24) в пространстве $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ для любых начальных данных из S. Тогда рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 4.1, позволят сделать вывод о выполнении условия 2) в теореме 4.2.

Каждому решению $v(x,\sigma) \in C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ задачи (4.14), (4.15) поставим в соответствие вектор-функцию $V_0 = (v(0,\sigma), \dots, \frac{d^{r-1}v(0,\sigma)}{dx^{r-1}})^T$. Для этой вектор-функции справедливо равенство

$$\mathcal{B}'(\sigma)V_0(\sigma) = H(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G^{\alpha}_{r+1}, \tag{4.26}$$

где $H(\sigma) = (h_1(\sigma), \dots, h_r(\sigma))^T$. Для любой функции $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n)$ существуют решения $q^{\varphi}_i(x,\sigma) \in C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$, $i = 1, \dots, r$, задачи (4.14), (4.15), а, следовательно, и (4.24), (4.25), соответствующие граничным данным $\varphi\delta_{ij} \in S$. Это следует из предположения о корректности исходной задачи в рассматриваемых пространствах. В силу единственности решения этой задачи имеет место следующее представление функции $\varphi(\sigma)v(x,\sigma)$

$$\varphi(\sigma)v(x,\sigma) = \sum_{i=1}^{r} q^{\varphi}_i(x,\sigma)h_i(\sigma), \quad x \geq 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n.$$

Из этого представления следует равенство

$$\varphi(\sigma)V_0(\sigma) = Q^{\varphi}(0,\sigma)H(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{4.27}$$

где матрица $Q^\varphi(x,\sigma)$ составлена из производных по x функций $q_i^\varphi(x,\sigma)$ до порядка $r-1$

$$Q^\varphi(x,\sigma) = \Big(\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} q_i^\varphi(x,\sigma)\Big), \quad i,j = 1,\dots,r.$$

Умножив равенство (4.26) на φ и подставив в него (4.27), получим равенство

$$\varphi(\sigma)\mathcal{B}'(\sigma)V_0(\sigma) = \mathcal{B}'(\sigma)Q^\varphi(0,\sigma)H(\sigma) = \varphi(\sigma)H(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}.$$

В силу произвольности выбора функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ отсюда следует, что

$$\det \mathcal{B}'(\sigma) \neq 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}^\alpha, \tag{4.28}$$

т.е. условие Лопатинского выполнено в $\mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}^\alpha$. Кроме того, справедливо равенство

$$\mathcal{B}'(\sigma)^{-1} = Q^\varphi(0,\sigma), \quad \sigma \in \{\sigma : \varphi(\sigma) = 1,\ \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}^\alpha\}.$$

Из равенства (4.26) следует равенство

$$V_0(\sigma) = \mathcal{B}'(\sigma)^{-1}H(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}^\alpha. \tag{4.29}$$

Так как для любого $H(\sigma) \in S^r$ по построению $V_0(\sigma) \in S^r$, то из равенства (4.29) следует, что элементы матрицы $\mathcal{B}'(\sigma)^{-1}$ являются мультипликаторами в S. Действительно, для $H_1(\sigma) = (h(\sigma), 0, \dots, 0)^T$, где $h(\sigma) \in S$, вектор-функция $V_{01}(\sigma) = (\tilde{b}_{11}(\sigma)h(\sigma), \dots, \tilde{b}_{r1}(\sigma)h(\sigma))^T \in S^r$, где $\tilde{b}_{ij}(\sigma)$ — элементы матрицы $\mathcal{B}'(\sigma)^{-1}$. Следовательно, для любой функции $h(\sigma) \in S$ функции $\tilde{b}_{i1}(\sigma)h(\sigma)$, $i = 1,\dots,r$, принадлежат пространству S. В силу корректности задачи (4.14), (4.15) они непрерывно зависят от $h(\sigma)$. Поэтому $\tilde{b}_{i1}(\sigma) \in M(S)$. Рассматривая функции $H_j(\sigma) = (\underbrace{0,\dots,0}_{j-1}, h, 0, \dots, 0)$, $j = 1,\dots,r$, приходим к выводу, что все элементы матрицы $\mathcal{B}'(\sigma)^{-1}$ являются мультипликаторами в S.

Из равенства

$$\det \mathcal{B}'(\sigma) \cdot \det \mathcal{B}'(\sigma)^{-1} = 1, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus G_{r+1}^\alpha$$

и дифференцируемости функции $\det \mathcal{B}'(\sigma)^{-1}$ в $\mathbb{R}^n$, следует, что $\det \mathcal{B}'(\sigma)$ имеет естественное продолжение на $\mathbb{R}^n$ и

$$\det \mathcal{B}'(\sigma) \neq 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n,$$

т.е. условие Лопатинского 3) теоремы 4.2 выполнено в предположении корректности задачи (4.14), (4.15) в паре пространств $(S, C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S))$.

Пользуясь свойствами элементов матрицы $\mathcal{B}'(\sigma)^{-1}$ и оценкой

$$|\det \mathcal{B}'(\sigma)| \le c(1+|\sigma|)^{\mu}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n,$$

которая следует из построения матрицы $\mathcal{B}'(\sigma)$ и неравенств для λ-корней уравнения (1.5) [8]

$$|\lambda_j(\sigma)| \le C(1+|\sigma|)^{q}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n,$$

можно доказать, что элементы матрицы $\mathcal{B}'(\sigma)$ являются мультипликаторами в S. А тогда для любой вектор-функции $V_0(\sigma) \in S^r$ существует такая вектор-функция $H(\sigma) \in S^r$, что

$$H(\sigma) = \mathcal{B}'(\sigma) V_0(\sigma).$$

Данные Дирихле решения $v(x,\sigma)$ задачи (4.14), (4.15), соответствующие выбранным граничным данным $h_1(\sigma), \ldots, h_r(\sigma)$, совпадают с $V_0(\sigma)$ в силу единственности решения уравнения (4.26).

Таким образом, из корректности задачи (4.14), (4.15) в паре пространств $(S, C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S))$ следует корректность задачи Дирихле для уравнения (4.14) в этой паре пространств. Из теоремы 4.1 следует, что коэффициенты многочлена $P_r^-(\lambda,\sigma)$ являются мультипликаторами в S, т.е. выполнено условие 2) теоремы 4.2. Доказательство теоремы завершено. □

Корректность задачи (4.14), (4.15) в пространстве основных функций S влечет ее разрешимость в пространстве медленно растущих обобщенных функций S', т.е. существование решения этой задачи для любых $h_k \in S'$, $k = 1, \ldots, r$, непрерывно зависящего от h_k.

Теорема 4.3. *Если задача* (4.14), (4.15) *корректна в паре пространств* $(S, C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S))$, $k \ge \bar{m}$, *то она разрешима в паре пространств* $(S', C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S'))$.

Доказательство. Из условия теоремы следует выполнение условий 1)–3) теоремы 4.2. С их помощью, как показано в доказательстве теоремы 4.2, можно построить решения $q_i(x,\sigma)$, $i = 1, \ldots, r$, задачи (4.14), (4.15), соответствующие граничным данным $h_{ij} = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, r$, и удовлетворяющие неравенствам (4.19).

Тогда решением задачи (4.14), (4.15) будет обобщенная функция

$$v(x) = \sum_{i=1}^{r} q_i(x,\sigma) h_i, \quad h_i \in S', \ x \ge 0,$$

которая, как следует из леммы 3.3, принадлежит пространству $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$ и непрерывно зависит от граничных данных. $\square$

Неравенства (4.19) позволяют получить оценки для указанного решения. Для любых $h_i \in S'$, $i = 1, \ldots, r$, существуют такие l и s, что $h_i \in H^l_s$. По лемме 3.3 функция $v(x)$ принадлежит пространству $C^k_{\alpha\bar{p}(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s-\bar{q}(l)})$, где функции $\bar{p}(l)$ и $\bar{q}(l)$ определяются параметрами, входящими в неравенство (4.19), и справедливо неравенство

$$|||v(x)|||_{C^k_{\alpha\bar{p}(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s-\bar{q}(l)})} \leq C \sum_{i=1}^{r} \|h_i\|^l_s. \tag{4.30}$$

Таким образом, теорему 4.3 можно уточнить.

Теорема 4.4. *Если задача* (4.14), (4.15) *корректна в паре пространств* $(S, C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S))$, $k \geq \bar{m}$, *то она разрешима в шкале пространств* $(H^l_s, C^k_{\alpha\bar{p}(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s-\bar{q}(l)}))$, *где* $\bar{p}(l), \bar{q}(l)$ *— некоторые функции от* l *и* k, *определяемые параметрами, входящими в оценки касательных преобразований Фурье ядер Пуассона задачи* (4.14), (4.15), *и ее решения удовлетворяют неравенству* (4.30).

Нулевое решение $v(x)$ задачи (4.14), (4.15) из пространства $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$, т.е. решение удовлетворяющее нулевым граничным данным, сосредоточено при каждом $x \geq 0$ на множестве $G^\alpha_{r+1} \cup N$, где N — множество, на котором не выполняется условие Лопатинского. При этом существуют нулевые решения любого порядка сингулярности $s > \frac{1}{2}\operatorname{codim}(G^\alpha_{r+1} \cup N)$ [8]. Поэтому условие $G^\alpha_{r+1} \cup N = \varnothing$ является необходимым условием корректности задачи (4.14), (4.15) в паре пространств $(S', C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S'))$.

Теорема 4.5. *Если задача* (4.14), (4.15) *корректна в паре пространств* $(S', C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S'))$, *то она корректна и в паре пространств* $(S, C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S))$.

Доказательство. Действительно, из условия теоремы следует, что $G^\alpha_{r+1} \cup N = \emptyset$. А отсюда следует выполнение условий теоремы 4.2. Выполнение условия 3) очевидно. Условие 2) следует из разделимости групп корней $\{\lambda_1(\sigma), \ldots, \lambda_r(\sigma)\}$ и $\{\lambda_{r+1}(\sigma), \ldots, \lambda_m(\sigma)\}$. Из условия $G^\alpha_{r+1} \cup N = \emptyset$ следует, что граничная задача (4.14), (4.15) равносильна задаче Дирихле (4.1), (4.2). Из корректности задачи Дирихле (4.1), (4.2) в паре пространств $(S', C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S'))$ следует ее “поточечная” разрешимость, т.е. для произвольной точки σ_0 и произвольных чисел

$a_1, \dots, a_r$ существует решение $v(x,\sigma_0) \in C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ уравнения (4.14), удовлетворяющее условиям Дирихле

$$\frac{d^{j-1}v(x,\sigma_0)}{dx^{j-1}}\Big|_{x=0} = a_j, \quad j = 1,\dots,r. \tag{4.31}$$

Для доказательства этого утверждения рассмотрим задачу Дирихле (4.1), (4.2) для $h_j = a_j\delta(\sigma-\sigma_0)$, где $\delta(\sigma-\sigma_0)$ — дельта-функция, сосредоточенная в точке σ_0. По предположению существует решение этой задачи $v(x) \in C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$. Тогда решением уравнения (4.1) будет и функция $(\sigma-\sigma_0)v(x) \in C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$. Но это функция имеет нулевые данные Дирихле, так как $(\sigma-\sigma_0)\delta(\sigma-\sigma_0) = 0$. Следовательно, $(\sigma-\sigma_0)v(x) \equiv 0$, отсюда следует, что $v(x) = v(x,\sigma_0)\delta(\sigma-\sigma_0)$. Так как $v(x) \in C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$, то $v(x,\sigma_0) \in C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Действительно, для любой функции $\varphi \in S$ функция $(v(x),\varphi) \in C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Но $(v(x),\varphi) = (v(x,\sigma_0)\delta(\sigma-\sigma_0),\varphi) = v(x,\sigma_0)\varphi(\sigma_0)$.

Функция $v(x,\sigma_0)$ является решением уравнения (4.1) при $\sigma = \sigma_0$ и удовлетворяет условиям (4.31)

$$\Big(P\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x),\varphi\Big) = \Big(\delta(\sigma-\sigma_0), P\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x,\sigma_0)\varphi\Big)$$
$$= P\Big(\frac{d}{dx},\sigma_0\Big)v(x,\sigma_0)\varphi(\sigma_0) = 0.$$

Таким образом, для любого $\sigma_0 \in \mathbb{R}^n$ и любых $a_1,\dots,a_r$ существует решение уравнения (4.1) в пространстве $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, удовлетворяющее условиям Дирихле (4.31). Из леммы 2.4 следует, что уравнение (1.5) имеет не менее r корней $\lambda(\sigma)$, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}\lambda(\sigma) \le 0$, т.е. $G^\alpha_r = \mathbb{R}^n$. А так как $G^\alpha_{r+1} = \emptyset$, то уравнение (4.14) является α-регулярным порядка r. □

В построении решений задачи (4.14), (4.15) важную роль играли касательные преобразования Фурье ядер Пуассона этой задачи. Их свойства определяют свойства решений краевой задачи.

Теорема 4.6. *Решения $q_i(x,\sigma)$, $i = 1,\dots,r$, задачи* (4.17), (4.18) *для регулярного уравнения* (4.14) *порядка r являются семействами мультипликаторов в S, гладко зависящими от параметра $x \ge 0$ и удовлетворяющими неравенствам вида* (4.19) *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

1) *коэффициенты многочлена $P^-_r(\lambda,\sigma)$ являются мультипликаторами в S;*

2) *условие Лопатинского* (4.16) *выполнено для всех $\sigma \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Если условия 1), 2) выполнены, то решения $q_i(x,\sigma)$, $i=1,\dots,r$, задачи (4.17), (4.18) обладают указанными в теореме свойствами. Это доказано в теореме 4.2.

Пусть теперь известно, что решения $q_i(x,\sigma)$, $i=1,\dots,r$, задачи (4.17), (4.18) обладают указанными в теореме 4.6 свойствами. Тогда для любых граничных данных $h_j \in S$, $j=1,\dots,r$, можно построить решение задачи (4.14), (4.15)

$$v(x)=\sum_{j=1}^{r} q_j(x,\sigma)h_j,$$

которое принадлежит пространству $C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+,S)$ и непрерывно зависит в нем от h_j. Единственность решения в этом пространстве следует из условия регулярности уравнения. Таким образом, задача (4.14), (4.15) корректна в паре пространств $(S, C^k_{\alpha\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+,S))$, $k\ge m$,. Из этого следует, как показано в доказательстве теоремы 4.2, справедливость условий 1) и 2). □

5. Краевые задачи для неоднородных уравнений

Рассмотрим задачу (1.1), (1.2) в случае, когда уравнение (1.1) является неоднородным. Исследование корректности этой задачи сводится к изучению корректности краевой задачи для однородного уравнения, рассмотренной в предыдущем пункте, и построению в указанных там пространствах решения неоднородного уравнения, касательное преобразование Фурье которого имеет вид

$$P\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x)=g(x),\quad x\ge 0. \tag{5.1}$$

Учитывая необходимые условия корректности краевой задачи для однородного уравнения в рассматриваемых пространствах, будем предполагать, что уравнение (5.1) является α-регулярным порядка r, и коэффициенты операторов $P_r^-(\frac{d}{dx},\sigma)$ и $P_r^+(\frac{d}{dx},\sigma)$ являются мультипликаторами в пространстве S.

Рассмотрим систему уравнений

$$P_r^+\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)v(x)=w(x),\quad x\ge 0, \tag{5.2}$$

$$P_r^-\Big(\frac{d}{dx},\sigma\Big)w(x)=g(x),\quad x\ge 0. \tag{5.3}$$

Функция $v(x)$, удовлетворяющая системе (5.2), (5.3), является решением уравнения (5.1). Следовательно, построение решения этого уравнения сводится к построению решения системы (5.2), (5.3).

Лемма 5.1. *Для любой функции* $g(x) \in C^k_{\beta\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ *существует решение* $w(x)$ *уравнения* (5.3), *принадлежащее пространству* $C^{r+k}_{\gamma\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$, *где* $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$, *и непрерывно зависящее от* $g(x)$.

Доказательство. Запишем уравнение (5.3) в матричном виде

$$\frac{dW(x)}{dx} = \mathcal{P}^-_r(\sigma)W(x) + G(x), \quad x \geq 0, \tag{5.3$'$}$$

где $W(x) = (w(x), \ldots, \frac{d^{r-1}w(x)}{dx^{r-1}})^T$, $G(x) = (0, \ldots, g(x))^T$. Его решением является вектор-функция

$$W(x) = \int\limits_0^x e^{(x-t)\mathcal{P}^-_r(\sigma)}G(t)\,dt, \quad x \geq 0.$$

Из предположений об уравнении (5.1) и леммы 3.4 следует, что матричная функция $e^{x\mathcal{P}^-_r(\sigma)}$ при каждом $x \geq 0$ является мультипликатором в пространстве S, гладко зависящем от x. По лемме 3.6 вектор-функция $W(x)$ дифференцируема как функция со значениями в пространстве S^r и удовлетворяет уравнению (5.3$'$). Первый элемент вектор-функции $W(x)$ (функция $w(x)$) является решением уравнения (5.3).

По условию функция $g(x)$ принадлежит пространству $C^k_{\beta\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$, т.е. для любых l и s существует такое число ρ, что справедливы неравенства

$$(1+x)^{-\rho}e^{-\beta x}\left\|\frac{d^\nu g(x)}{dx^\nu}\right\|^l_s < c, \quad x \geq 0,\ 0 \leq \nu \leq k, \tag{5.4}$$

где константа c зависит от l и s.

Оценим норму вектор-функции $W(x)$ в пространстве $[H^l_s]^r$ при $x \geq 0$, пользуясь оценкой матричной экспоненты (3.14) и леммой 3.3:

$$\|W(x)\|^l_s \leq \int\limits_0^x \|e^{(x-t)\mathcal{P}^-_r(\sigma)}G(t)\|^l_s\,dt$$

$$\leq C_1\int\limits_0^x (1+x-t)^{p(l)}e^{\alpha(x-t)}\|G(t)\|^l_{s+q(l)}\,dt,$$

где $C_1 > 0,\ p(l) > 0,\ q(l)$ — числа, зависящие от l, матрицы $\mathcal{P}_r^-(\sigma)$ и не зависящие от вектор-функции $G(t)$. Используя неравенства (5.4) при $\nu = 0$ из полученной оценки имеем при $x \geq 0$ неравенство

$$\|W(x)\|_s^l$$
$$\leq C_1 e^{\alpha x} \int_0^x (1+x-t)^{p(l)} (1+t)^{\rho} e^{(\beta-\alpha)t} (1+t)^{-\rho} e^{-\beta t} \|G(t)\|_{s+q(l)}^l \, dt$$
$$\leq C_2 (1+x)^{p(l)} e^{\alpha x} \int_0^x (1+t)^{p(l)+\rho} e^{(\beta-\alpha)t} \, dt |||g(x)|||_{C^0_{\beta\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s+q(l)})}.$$

Интеграл в правой части полученного неравенства можно оценить следующим образом

$$\int_0^x (1+t)^{p(l)+\rho} e^{(\beta-\alpha)t} \, dt \leq C_3 \begin{cases} (1+x)^{p(l)+\rho+1} e^{(\beta-\alpha)x}, & \text{если } \beta > \alpha, \\ (1+x)^{p(l)+\rho+1}, & \text{если } \beta \leq \alpha. \end{cases}$$

Окончательная оценка нормы вектор-функции $W(x)$ в пространстве $[H_s^l]^r$ имеет вид

$$\|W(x)\|_s^l \leq C_4 (1+x)^{d(l)} e^{\max\{\alpha,\beta\} x} |||g(x)|||_{C^0_{\beta\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s+q(l)})}, \tag{5.5}$$

где $d(l) = 2p(l) + \rho + 1$.

Пользуясь неравенством (5.5), оценим норму функции $w(x)$ в пространстве $C^{r-1}_{\gamma p'}(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$. При $0 \leq \nu \leq r-1$ имеем неравенство

$$(1+x)^{-p'} e^{-\gamma x} \left\| \frac{d^\nu w(x)}{dx^\nu} \right\|_s^l \leq (1+x)^{-p'} e^{-\gamma x} \|W(x)\|_s^l$$
$$\leq C_4 (1+x)^{d(l)-p'} e^{(\max\{\alpha,\beta\}-\gamma)x} |||g(x)|||_{C^0_{\beta\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s+q(l)})}.$$

Функция от x в правой чисти полученного неравенства ограничена на $\overline{\mathbb{R}}_+$ при любом p' тогда и только тогда, когда $\max\{\alpha,\beta\} < \gamma$, т.е. когда и $\beta < \gamma$, и $\alpha < \gamma$. Если же $\max\{\alpha,\beta\} = \gamma$, то ограниченность этой функции на $\overline{\mathbb{R}}_+$ можно обеспечить за счет выбора параметра p'.

Из полученного неравенства при выполнении указанных условий следует неравенство

$$|||w(x)|||_{C^{r-1}_{\gamma p'}(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)} \leq C_0 |||g(x)|||_{C^0_{\beta\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s+q(l)})}. \tag{5.6}$$

Пользуясь равенством (5.3′) и неравенствами (5.4) и (5.5), получим оценку нормы вектор-функции $\frac{dW(x)}{dx}$ в пространстве $[H_s^l]^r$:

$$\left\|\frac{dW(x)}{dx}\right\|_s^l \le \|\mathcal{P}_r^-(\sigma)W(x)\|_s^l + \|G(x)\|_s^l$$
$$\le C'\|W(x)\|_{s+q'}^l + \|G(x)\|_s^l$$
$$\le C''(1+x)^{d(l)}e^{\max\{\alpha,\beta\}x}|||g(x)|||_{C^0_{\beta\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+,H^l_{s+q'+q(l)})}$$
$$+ (1+x)^\rho e^{\beta x}|||g(x)|||_{C^0_{\beta\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+,H^l_s)}.$$

Если $q'+q(l)\le 0$, то вложение $H^l_s \subset H^l_{s+q'+q(l)}$ непрерывно, и полученное неравенство можно заменить неравенством

$$\left\|\frac{dW(x)}{dx}\right\|_s^l \le C'''(1+x)^{d'}e^{\max\{\alpha,\beta\}x}|||g(x)|||_{C^0_{\beta\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+,H^l_s)}. \qquad (5.5')$$

При $q+q'>0$ в оценке $(5.5')$ показатель s нужно заменить на $s+q'+q(l)$.

При условии $\beta\le\gamma$ и $\alpha\le\gamma$ из неравенства $(5.5')$ следует неравенство

$$|||w(x)|||_{C^r_{\gamma p''}(\overline{\mathbb{R}}_+,H^l_s)} \le C_1|||g(x)|||_{C^0_{\beta\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+,H^l_{s+q''})}, \qquad (5.6')$$

где p'' и q'' — некоторые числа, зависящие от l и определяемые из приведенных выше неравенств.

Последовательно дифференцируя равенство $(5.3')$ и пользуясь приведенными оценками, получим неравенства, обобщающие неравенства $(5.5')$ и $(5.6')$

$$\left\|\frac{d^{\nu+r}w(x)}{dx^{\nu+r}}\right\|_s^l \le c_\nu(1+x)^{d_\nu}e^{\max\{\alpha,\beta\}x}|||g(x)|||_{C^\nu_{\beta\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+,H^l_{s+q_\nu})}, \qquad (5.7)$$

$$|||w(x)|||_{C^{\nu+r}_{\gamma p_\nu}(\overline{\mathbb{R}}_+,H^l_s)} \le C_\nu|||g(x)|||_{C^\nu_{\beta\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+,H^l_{s+q_\nu})}. \qquad (5.8)$$

На основании этих неравенств можно сделать вывод, что для любой функции $g(x)\in C^k_{\beta\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+,H^l_s)$ существует решение $w(x)$ уравнения (5.3), принадлежащее пространству $C^{r+k}_{\gamma\bar p}(\overline{\mathbb{R}}_+,H^l_{s-\bar q})$, где $\gamma\ge\alpha,\ \gamma\ge\beta$, $\bar p$ и $\bar q$ — некоторые числа, не зависящие от $g(x)$. Из этих утверждений следует справедливость леммы 5.1. □

Рассмотрим теперь первое уравнение системы (5.2), (5.3). Пусть $w(x)$ — решение уравнения (5.3), принадлежащее пространству $C^{r+k}_{\gamma\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+,S)$ и удовлетворяющее неравенствам (5.7) и (5.8). Перейдем к матричной записи уравнения (5.2)

$$\frac{dV(x)}{dx} = \mathcal{P}_r^+(\sigma)V(x) + \tilde W(x), \quad x\ge 0, \qquad (5.9)$$

где $V(x) = (v(x),\dots,\frac{d^{m-r-1}v(x)}{dx^{m-r-1}})^T$, $\tilde W(x) = (0,\dots,0,\frac{1}{P_m(x)}w(x))^T$, матрица $\mathcal{P}_r^+(\sigma)$ определена в $(4.10')$.

Так как по предположению $P_m(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, то функция $\frac{1}{P_m(\sigma)}$ является мультипликатором в S [8]. Следовательно, функция $\frac{1}{P_m(\sigma)} w(x)$ принадлежит пространству $C^{r+k}_{\gamma\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ и для нее справедливы неравенства, аналогичные неравенствам (5.7) и (5.8).

Одним из решений уравнения (5.9) будет вектор-функция

$$V(x) = -\int\limits_x^\infty e^{(x-t)\mathcal{P}_r^+(\sigma)} \tilde{W}(t)\, dt, \quad x \geq 0. \tag{5.10}$$

Существование этой вектор-функции и ее дифференцируемость устанавливается аналогично тому, как это было сделано для вектор-функции $W(x)$. Для подынтегральной матричной экспоненты справедлива оценка

$$\|e^{(x-t)\mathcal{P}_r^+(\sigma)}\| \leq C(1+t-x)^\tau e^{\underline{\alpha}_{r+1}(x-t)}(1+|\sigma|)^\mu, \quad t \geq x, \tag{5.11}$$

где C, τ, μ — некоторые числа, зависящие от матрицы $\mathcal{P}_r^+(\sigma)$, а $\underline{\alpha}_{r+1} = \inf_{\sigma\in\mathbb{R}^n} \operatorname{Re} \lambda_{r+1}(\sigma)$. Неравенство (5.11) получается непосредственным применением использованной ранее оценки матричной экспоненты с учетом того, что при $t \geq x$ $(x-t)\mathcal{P}_r^+(\sigma) = (t-x)(-\mathcal{P}_r^+(\sigma))$, а собственные числа матрицы $-\mathcal{P}_r^+(\sigma)$ равны $-\lambda_{r+1}(\sigma), \dots, -\lambda_m(\sigma)$ и, следовательно,

$$\sup_{\sigma\in\mathbb{R}^n} (-\operatorname{Re} \lambda_{r+1}(\sigma)) = -\inf_{\sigma\in\mathbb{R}^n} (\operatorname{Re} \lambda_{r+1}(\sigma)) = -\underline{\alpha}_{r+1}.$$

Как и в случае матричной экспоненты $e^{x\mathcal{P}_r^-(\sigma)}$ имеют место оценки, обобщающие неравенства (5.11) и аналогичные неравенствам (3.14)

$$\|\partial_x^\nu D_\sigma^\beta e^{(x-t)\mathcal{P}_r^+(\sigma)}\| \leq c_{\beta\nu}(1+t-x)^{\tau_{\beta\nu}} e^{\underline{\alpha}_{r+1}(x-t)}(1+|\sigma|)^{\mu_{\beta\nu}}, \quad t \geq x. \tag{5.11$'$}$$

Пользуясь леммой 3.3, неравенствами (5.5) и (5.11′), можно оценить норму подынтегрального выражения в (5.10) в пространстве H^l_s

$$\begin{aligned} &\|e^{(x-t)\mathcal{P}_r^+(\sigma)}\tilde{W}(t)\|^l_s \\ &\qquad \leq C_1(1+t-x)^{\tau(l)} e^{\underline{\alpha}_{r+1}(x-t)} \|\tilde{W}(t)\|^l_{s+q(l)} \\ &\qquad \leq C_2(1+t-x)^{\tau(l)}(1+t)^{d(l)} e^{\underline{\alpha}_{r+1}(x-t)+\max\{\alpha,\beta\}t} \\ &\qquad\qquad \times |||g(x)|||_{C^0_{\beta\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s+\bar{q}(l)})}. \end{aligned}$$

Из полученного неравенства следует, что интеграл в (5.10) существует, если $a = \max\{\alpha, \beta\} - \underline{\alpha}_{r+1} < 0$. Из этого условия следует, что должно выполняться неравенство $\alpha < \underline{\alpha}_{r+1}$. При этом параметр β может принимать любые значения из промежутка $(-\infty, \underline{\alpha}_{r+1})$.

При указанном условии интеграл в (5.10) можно дифференцировать по параметру x под знаком интеграла, и вектор-функция $V(x)$, определенная в (5.10), является решением уравнения (5.9)

$$\frac{dV(x)}{dx} = -\int\limits_x^\infty \mathcal{P}_r^+(\sigma) e^{(x-t)\mathcal{P}_r^+(\sigma)} \tilde{W}(t)\,dt + \tilde{W}(x) = \mathcal{P}_r^+(\sigma)V(x) + \tilde{W}(x).$$

Оценим норму вектор-функции $V(x)$ в пространстве H_s^l, пользуясь приведенной оценкой нормы подынтегрального выражения в (5.10)

$$\|V(x)\|_s^l \le (1+x)^{\tau(l)} e^{\underline{\alpha}_{r+1} x} \int\limits_x^\infty (1+t)^{\tau(l)+d(l)} e^{at}\,dt |||g(x)|||_{C^0_{\beta\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s+\bar{q}(l)})}.$$

Интеграл в правой части полученного неравенства при условии $a < 0$ можно оценить при $b = \tau(l) + d(l) > 0$, пользуясь неравенством

$$\int\limits_x^N (1+t)^b e^{at}\,dt \le \int\limits_x^N (1+t)^{[b]+1} e^{at}\,dt$$
$$= e^{at}\Big(\frac{(1+t)^{[b]+1}}{a} - \frac{([b]+1)(1+t)^{[b]}}{a^2} + \dots + (-1)^{[b]+1}\frac{([b]+1)!}{a^{[b]+1}}\Big)\Big|_x^N.$$

Из него следует неравенство

$$\int\limits_x^\infty (1+t)^{\tau(l)+d(l)} e^{at}\,dt$$
$$= \lim_{N\to\infty} \int\limits_x^N (1+t)^{\tau(l)+d(l)} e^{at}\,dt \le C e^{ax}(1+x)^{\tau(l)+d(l)+1}.$$

В случае, если $\tau(l)+d(l) \le 0$, рассматриваемый интеграл оценивается функцией e^{ax}.

Из приведенных неравенств следуют оценки нормы функции $v(x)$ и ее производных до порядка $\nu \le m-r-1$ в пространстве H_s^l

$$\Big\|\frac{d^\nu v(x)}{dx^\nu}\Big\| \le C(1+x)^{\mu(l)} e^{\max\{\alpha,\beta\}x} |||g(x)|||_{C^0_{\beta\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s+\bar{q}(l)})}, \tag{5.12}$$

где $\mu(l) = 2\tau(l)+d(l)+1$. Последовательно дифференцируя равенство (5.9), пользуясь приведенной оценкой и оценками (5.5) и (5.7) для производных функции $w(x)$, получим неравенства (5.12) для производных функции $v(x)$ порядка $\nu \le m$. Из этих неравенств следует оценка нормы функции $v(x)$ в пространстве $C^m_{\gamma\mu(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_s)$ при условии $\gamma \ge \alpha$ и $\beta \in (-\infty, \gamma)$

$$|||v(x)|||_{C^m_{\gamma\mu(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_s)} \le C_1 |||g(x)|||_{C^0_{\beta\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s+\bar{q}(l)})}. \tag{5.13}$$

Используя оценки (5.8), (5.13), дифференцированием равенства (5.9) может быть получено неравенство

$$|||v(x)|||_{C^{m+\nu}_{\gamma\mu(l)}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_s)} \le C_\nu |||g(x)|||_{C^\nu_{\beta\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_{s+\bar{q}(l)})}.$$

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 5.1. *Если уравнение* (5.1) *является α-регулярным порядка r и $\underline{\alpha}_{r+1} = \inf \operatorname{Re} \lambda_{r+1} > \alpha$, то для любой функции $g(x) \in C^k_{\beta\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ существует решение уравнения* (5.1)*, принадлежащее пространству $C^{m+k}_{\gamma\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$, где $\gamma > \max\{\alpha, \beta\}$ и непрерывно зависящее в нем от $g(x)$.*

Условие $\underline{\alpha}_{r+1} > \alpha$ означает, что $G^\alpha_{r+1} = \emptyset$. Отсюда следует, что коэффициенты λ-многочленов $P^-_r(\lambda, \sigma)$ и $P^+_r(\lambda, \sigma)$ являются мультипликаторами в S. Корректность задачи (1.1), (1.2) в этом случае обеспечивается выполнением условия Лопатинского.

Если же $G^\alpha_{r+1} \ne \emptyset$, то $\underline{\alpha}_{r+1} = \alpha$. Анализируя построение решения уравнения (5.3) в теореме 5.1, можно заметить, что в оценках параметр α можно заменить на $\overline{\alpha}_r = \sup_{\sigma \in \mathbb{R}^n} \lambda_r(\sigma)$. И тогда условие $\underline{\alpha}_{r+1} > \alpha$ в теореме 5.1 можно заменить на условие $\overline{\alpha}_r < \underline{\alpha}_{r+1}$.

Теорема 5.2. *Если уравнение* (5.1) *является α-регулярным порядка r и $\overline{\alpha}_r < \underline{\alpha}_{r+1}$, то для любой функции $g(x) \in C^k_{\beta\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ существует решение уравнения* (5.1)*, принадлежащее пространству $C^{m+k}_{\gamma\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$, где $\gamma > \max\{\overline{\alpha}_r, \beta\}$ и непрерывно зависящее в нем от $g(x)$.*

В силу свойства инвариантности множества решений уравнения (5.1) относительно умножения на мультипликатор в пространстве S приведенные теоремы можно обобщить следующим образом.

Для произвольного множества Ω рассмотрим числа

$$\overline{\alpha}_r(\Omega) = \sup_{\sigma \in \Omega} \operatorname{Re} \lambda_r(\sigma), \quad \underline{\alpha}_{r+1}(\Omega) = \inf_{\sigma \in \Omega} \operatorname{Re} \lambda_{r+1}(\sigma).$$

Предположим, что $\overline{\alpha}_r(G^\alpha_{r+1}) < \underline{\alpha}_{r+1}(G^\alpha_{r+1})$. В силу замкнутости множества G^α_{r+1} существует такая его окрестность $\Omega(G^\alpha_{r+1})$, в которой это неравенство сохраняется:

$$\overline{\alpha}_r(\Omega(G^\alpha_{r+1})) < \underline{\alpha}_{r+1}(\Omega(G^\alpha_{r+1})). \tag{5.14}$$

Выберем функцию $\varphi \in M(S)$ так, чтобы $\varphi(\sigma) = 1$, $\sigma \in G^{\alpha}_{r+1}$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega(G^{\alpha}_{r+1})$. Тогда функцию $g(x) \in C^k_{\beta\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ можно представить в виде

$$g(x) = \varphi(\sigma)g(x) + (1 - \varphi(\sigma))g(x).$$

По построению функции $g_1(x) = \varphi(\sigma)g(x)$ и $g_2(x) = (1 - \varphi(\sigma))g(x)$ принадлежат пространству $C^k_{\beta\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$. Для каждого $x \geq 0$ в окрестности носителя функции $g_1(x)$ выполнено условие (5.14). Пользуясь приведенными выше построениями и способами получения оценок можно доказать, что существует решение $v_1(x)$ уравнения (5.1), соответствующее $g_1(x)$.

Так как вне G^{α}_{r+1} выполняется неравенство $\operatorname{Re}\lambda_{r+1}(\sigma) > \alpha$, то $\inf_{\sigma\in\mathbb{R}^n\setminus\Omega(G^{\alpha}_{r+1})}\operatorname{Re}\lambda_{r+1}(\sigma) > \alpha$. Следовательно, для каждого $x \geq 0$ в некоторой окрестности носителя функции $g_2(x)$ (одинаковой для всех x) $\overline{\alpha}_r(\mathbb{R}^n \setminus \Omega(G^{\alpha}_{r+1})) < \underline{\alpha}_{r+1}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega(G^{\alpha}_{r+1}))$. Точно также можно построить решение $v_2(x)$ уравнения (5.1), соответствующего функции $g_2(x)$. Тогда функция $v(x) = v_1(x) + v_2(x)$ является решением уравнения (5.1), соответствующее функции $g(x)$. Точный смысл приведенных рассуждений содержится в следующей теореме.

Теорема 5.3. *Если уравнение* (5.1) *является α-регулярным порядка r и $\overline{\alpha}_r(G^{\alpha}_{r+1}) < \underline{\alpha}_{r+1}(G^{\alpha}_{r+1})$, то для любой функции $g(x) \in C^k_{\beta\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ существует решение уравнения* (5.1), *принадлежащее пространству $C^{m+k}_{\gamma\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$, где $\gamma > \max\{\alpha, \beta\}$ и непрерывно зависящее в нем от $g(x)$.*

Условие $\overline{\alpha}_r(G^{\alpha}_{r+1}) < \underline{\alpha}_{r+1}(G^{\alpha}_{r+1})$ равносильно условию

$$\Lambda(\sigma) \equiv \prod_{\substack{1\leq k\leq r\\ r<j\leq m}} |\operatorname{Re}\lambda_k(\sigma) - \operatorname{Re}\lambda_j(\sigma)|^2 \neq 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{5.15}$$

которое использовалось в работе [8] для доказательства корректности задачи (1.1), (1.2) для однородного уравнения в рассматриваемых пространствах.

Теорема 5.4. *Если уравнение* (1.1) *является α-регулярным порядка r, выполнено условие* (5.15) *и условие Лопатинского для всех $\sigma \in \mathbb{R}^n$, то задача* (1.1), (1.2) *корректна в тройке пространств $(S, C^k_{\beta\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S), C^{m+k}_{\gamma\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S))$, где $\gamma > \max\{\alpha, \beta\}$, т.е. для любых граничных данных $g_i \in S$, $j = 1, \dots, r$, и любой правой части $f(x) \in C^k_{\beta\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ существует и единственно решение задачи* (1.1), (1.2), *линейно и непрерывно зависящее от $f(x), g_1, \dots, g_r$.*

Доказательство теоремы состоит в последовательном применении теорем (5.3) и (4.2).

Приведенное выше построение решения уравнения (5.1) в классах $C^k_{\gamma\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S)$ сохраняется и для классов функций $C^k_{\gamma\infty}(\overline{\mathbb{R}}_+, S')$, так как используется один и тот же класс мультипликаторов.

Литература

[1] И. Г. Петровский, *Избранные труды. Системы уравнений с частными производными*, М.: Наука, 1986.

[2] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, М.: Физматгиз, 1958.

[3] Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, *Задача Коши и связанные с ней задачи для уравнений в свертках* // Успехи мат. наук, **27** (1972), N 3, 65–143.

[4] Г. В. Дикополов, Г. Е. Шилов, *О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве* // Изв. АН СССР, серия матем., **24** (1960), 369–380.

[5] Г. В. Дикополов, Г. Е. Шилов, *О корректных краевых задачах в полупространстве для уравнений в частных производных с правой частью* // Сиб. матем. ж., **1** (1960), N 1, 45–61.

[6] В. П. Паламодов, *О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве* // Изв. АН СССР, серия матем., **24** (1960), 381–386.

[7] Г. В. Дикополов, *О краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве* // Матем. сб., **59(101)** (1962), 215–228.

[8] А. Л. Павлов, *Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве* // Матем. сб., **103(145)** (1977), N 3(7), 367–391.

[9] Н. Е. Товмасян, *Общие краевые задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными в полупространтсве в классе обобщенных функций* // Диф. уравнения, **20** (1984), N 12.

[10] Н. Е. Товмасян, *Корректность граничных задач для уравнений в частных производных в полупространстве в классе обобщенных функций* // Сиб. матем. ж., **28** (1987), N 12.

[11] С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг, *Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях, ч. 1*, М.: ИЛ, 1962.

[12] Э. Гурса, *Курс математического анализа, т. II*, М.–Л: Гостехиздат, 1933.

[13] А. И. Кострикин, *Введение в алгебру*, М.: Наука, 1977.

[14] Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, М.: Мир, 1971.

[15] Г. Е. Шилов, *Математический анализ. Второй специальный курс*, М.: Физматгиз, 1965.

Сведения об авторах

Александр Леонидович Павлов

Донецкий национальный университет
ул. Университетская 24,
83055, Донецк,
Украина
E-Mail: alex4909@gmail.com