Український математичний вісник
Том 7 (**2010**), № 1, 1 – 38

# Характеризація розв'язків одного класу ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова

Степан Д. Івасишен, Василь В. Лаюк

**Анотація.** Для одного класу ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова доведено теореми про коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків задачі Коші, початкові дані в якій належать до спеціальних вагових просторів функцій та узагальнених борельових мір. На основі цих теорем одержано повну характеризацію відповідних класів розв'язків розглянутих рівнянь.

**2000 MSC.** 35K65, 35K70.

**Ключові слова та фрази.** Ультрапараболічне рівняння, задача Коші, інтеграл Пуассона, об'ємний потенціал, коректна розв'язність, характеризація розв'язків.

## Вступ

У статті розглядається один клас вироджених параболічних рівнянь другого порядку, який є узагальненням класичного рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова і є підкласом ультрапараболічних рівнянь. Цей клас характеризується деякою сталою матрицею $B$, елементи якої входять у коефіцієнти молодших членів рівняння. Коли матриця $B$ має найпростіший вигляд, то розглядуваний клас є класом $\mathbf{E_{22}}$ з праці [1]. У працях [2–21] вивчаються, взагалі кажучи, ширші класи рівнянь з матрицею $B$ загальнішого вигляду. Одержані в нашій статті результати є новими як для рівнянь із класу $\mathbf{E_{22}}$, так і для рівнянь із [2–21], якщо матриця $B$ має такий самий вигляд, як у нас.

Мотивацію вивчення ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова можна знайти в [1–21].

Доведені тут теореми були анонсовані в праці [22]. У доведеннях істотно використовуються результати цієї праці, які стосуються фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК).

*Стаття надійшла в редакцію* 28.12.2009

ISSN 1810 – 3200. 

## 1. Рівняння, припущення, необхідні відомості про ФРЗК

Вважатимемо, що $n$-вимірна просторова змінна $x$ складається з $n_1$-вимірної змінної $x_1 := (x_{11}, \ldots, x_{1n_1})$, $n_2$-вимірної змінної $x_2 := (x_{21}, \ldots, x_{2n_2})$ і $n_3$-вимірної змінної $x_3 := (x_{31}, \ldots, x_{3n_3})$, тобто $x := (x_1, x_2, x_3)$. Тут $n_1$, $n_2$ і $n_3$ — такі натуральні числа, що $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ і $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Далі $T$ — задане додатне число, $\Pi_{(0,T]} := \{(t,x) | \, t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n\}$, $\Pi_{[0,T]} := \{(t,x) | \, t \in [0,T], x \in \mathbb{R}^n\}$.

Розглянемо рівняння вигляду

$$L(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x) := (S_B - A(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = f(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad (1.1)$$

де

$$S_B := \partial_t - (x, BD_x) := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} \Big( \sum_{s=1}^{n_1} b^1_{sj} x_{1s} \Big) \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} \Big( \sum_{s=1}^{n_2} b^2_{sj} x_{2s} \Big) \partial_{x_{3j}}, \quad (1.2)$$

$$A(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t,x) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x) \partial_{x_{1j}} + a_0(t,x), \quad (1.3)$$

$B$ — матриця розміру $n \times n$, яка має вигляд

$$B := \begin{pmatrix} O & B^1 & O \\ O & O & B^2 \\ O & O & O \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

$B^1$, $B^2$ — матриці, складені відповідно з дійсних чисел $b^1_{sj}$, $s \in \{1, \ldots, n_1\}$, $j \in \{1, \ldots, n_2\}$, $b^2_{sj}$, $s \in \{1, \ldots, n_2\}$, $j \in \{1, \ldots, n_3\}$, $O$ — нульові матриці відповідних розмірів, $D_x := \mathrm{col}(\partial_{x_{11}}, \ldots, \partial_{x_{1n_1}}, \partial_{x_{21}}, \ldots, \partial_{x_{2n_2}}, \partial_{x_{31}}, \ldots, \partial_{x_{3n_3}})$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$.

Для рівняння (1.1) будемо припускати виконаними такі умови:

**$\boldsymbol{\alpha_1}$)** матриця (1.4), в якій блоки $B^1$ і $B^2$ записані відповідно у вигляді $\begin{pmatrix} B^1_1 \\ B^1_2 \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} B^2_1 \\ B^2_2 \end{pmatrix}$, де $B^1_1$, $B^1_2$, $B^2_1$ і $B^2_2$ — матриці відповідно розмірів $n_2 \times n_2$, $(n_1 - n_2) \times n_2$, $n_3 \times n_3$ і $(n_2 - n_3) \times n_3$, задовольняє умови $\det B^j_1 \neq 0$, $j \in \{1, 2\}$;

**$\boldsymbol{\alpha_2}$)** існує така стала $\delta > 0$, що для кожної точки $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 := (\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re} \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t,x) \sigma_{1j} \sigma_{1s} \geq \delta |\sigma_1|^2.$$

Припущення щодо гладкості коефіцієнтів диференціального виразу $A$, які зробимо нижче, гарантують лише існування розв'язків рівняння (1.1) у певному послабленому сенсі. Наведемо відповідні означення.

**Означення 1.1.** *Функція $u$ називається диференційовною за Лі в точці $(t,x)$ відносно векторного поля, заданого диференціальним виразом (1.2), якщо існує скінченна границя*

$$(S_B^L u)(t,x) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(u(\gamma(t,x,h)) - u(\gamma(t,x,0))),$$

*де $\gamma(t,x,h) := (t-h,(e^{hB'}x')')$, $h\in\mathbb{R}^n$, — інтегральна крива заданого векторного поля, яка проходить через точку $(t,x)$ (тут і далі штрих означає транспонування матриці). Границя $(S_B^L u)(t,x)$ називається похідною Лі від функції $u$ в точці $(t,x)$ відносно заданого векторного поля.*

Зауважимо, що якщо існують похідні $\partial_t u$, $\partial_{x_{2j}} u$ і $\partial_{x_{3j}} u$ в точці $(t,x)$, то $(S_B^L u)(t,x) = (S_B u)(t,x)$.

**Означення 1.2.** *Функцію $u$ називатимемо $L$-розв'язком рівняння (1.1) в $\Pi_{(0,T]}$, якщо існують у $\Pi_{(0,T]}$ неперервні похідна Лі $S_B^L u$ та звичайні похідні $\partial_{x_{1j}} u$ і $\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} u$, $\{j,s\}\subset\{1,\ldots,n_1\}$, і в кожній точці $(t,x)\in\Pi_{(0,T]}$ задовольняється рівняння*

$$(S_B^L - A(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = f(t,x).$$

Надалі під розв'язками рівняння (1.1) розумітимемо $L$-розв'язки, а під виразом $S_B u$ — похідну Лі $S_B^L u$.

Використовуючи структуру матриці $B$, описану в умові $\boldsymbol{\alpha_1}$, легко переконатись, що

$$(e^{hB'}x')' = X(h) := (X_1(h), X_2(h), X_3(h)),$$

$$X_s(h) := (X_{s1}(h),\ldots,X_{sn_s}(h)), \quad s\in\{1,2,3\},$$

$$X_{1j}(h) := x_{1j}, \quad j\in\{1,\ldots,n_1\},$$

$$X_{2j}(h) := x_{2j} + h\sum_{k=1}^{n_1} b_{kj}^1 x_{1k},\ j\in\{1,\ldots,n_2\},$$

$$X_{3j}(h) := x_{3j} + h\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 x_{2s} + \frac{h^2}{2}\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 b_{ks}^1 x_{1k}, \quad j\in\{1,\ldots,n_3\},$$

$$\gamma(t,x,h) = (t-h, X(h)), \quad h\in\mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Зауважимо, що крім точки $X(h)$ будемо використовувати інші аналогічні точки, побудовані не за змінною $x$, а за іншими змінними (наприклад, точка $\Xi(h)$, яка побудована за змінною $\xi$).

Щоб сформулювати наступні припущення щодо коефіцієнтів виразу (1.3) введемо поняття гельдерових функцій.

**Означення 1.3.** *Функцію $f(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, називатимемо $B$-гельдеровою з показником $\alpha \in (0,1]$ в $\Pi_{[0,T]}$, якщо існує така стала $H > 0$, що для будь-яких $\{(t,x),(\tau,\xi)\} \subset \Pi_{[0,T]}$ виконується нерівність*

$$|f(t,x) - f(\tau,\xi)| \leq H\,(d(t,X(t-\tau);\tau,\xi))^{\alpha}\,,$$

*де*

$$d(x,\xi) := \sum_{s=1}^{3} |x_s - \xi_s|^{1/(2s-1)}, \quad d(t,x;\tau,\xi) := |t-\tau|^{1/2} + d(x,\xi) \ - \tag{1.6}$$

*спеціальні відстані відповідно між точками $x$ і $\xi$ та $(t,x)$ і $(\tau,\xi)$.*

Крім умов $\boldsymbol{\alpha_1}$ і $\boldsymbol{\alpha_2}$ використовуватимемо ще такі умови:

**$\boldsymbol{\alpha_3}$)** коефіцієнти виразу $A(t,x,\partial_{x_1})$ — обмежені та $B$-гельдерові з показником $\alpha \in (0,1)$ в $\Pi_{[0,T]}$;

**$\boldsymbol{\alpha_4}$)** коефіцієнти виразу $A(t,x,\partial_{x_1})$ мають обмежені та $B$-гельдерові з показником $\alpha \in (0,1)$ в $\Pi_{[0,T]}$ похідні того самого вигляду, при яких вони стоять.

Якщо виконуються умови $\boldsymbol{\alpha_1}$–$\boldsymbol{\alpha_3}$, то згідно з [22] для рівняння (1.1) існує ФРЗК $Z$, для якого справджуються оцінки

$$\begin{gathered}|\partial_{x_1}^{k_1} Z(t,x;\tau,\xi)| \leq C(t-\tau)^{-M-|k_1|/2} E_c(t,x;\tau,\xi),\\ k_1 := (k_{11},\ldots,k_{1n_1}) \in \mathbb{Z}_+^{n_1}, \quad |k_1| := k_{11} + \cdots + k_{1n_1} \leq 2,\end{gathered} \tag{1.7}$$

$$|S_B Z(t,x;\tau,\xi)| \leq C(t-\tau)^{-M-1} E_c(t,x;\tau,\xi), \tag{1.8}$$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_1}^{k_1} Z(t,x;\tau,\xi)\,d\xi \right| \leq C(t-\tau)^{-1+\alpha/2}, \quad |k_1| = 2, \tag{1.9}$$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} SZ(t,x;\tau,\xi)\,d\xi \right| \leq C(t-\tau)^{-1+\alpha/2}, \tag{1.10}$$

в яких $M := (n_1 + 3n_2 + 5n_3)/2$,

$$E_c(t,x;\tau,\xi) := \exp\Big\{ -c\sum_{s=1}^{3} (t-\tau)^{1-2s} |X_s(t-\tau) - \xi_s|^2 \Big\},$$

$0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $C$ і $c$ — додатні сталі.

За додаткової умови $\boldsymbol{\alpha_4}$ для $Z$ виконується формула згортки

$$Z(t, x; \tau, \xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \lambda, y) Z(\lambda, y; \tau, \xi)\, dy,$$
$$0 \leq \tau < \gamma < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad (1.11)$$

і ФРЗК $Z$ є нормальним, тобто функція

$$Z^*(\tau, \xi; t, x) := \overline{Z(t, x; \tau, \xi)}, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (1.12)$$

(тут і далі риска зверху означає комплексне спряження) є ФРЗК для спряженого до (1.1) рівняння

$$L^*(\tau, \xi, \partial_\tau, \partial_\xi) v := S_B^* v - \sum_{j,s=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1j}} \partial_{\xi_{1s}} (\overline{a_{js}(\tau, \xi)} v)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1j}} (a_j(\tau, \xi) v) - a_0(\tau, \xi) v = g(\tau, \xi), \quad (\tau, \xi) \in \Pi_{[0,T)}, \quad (1.13)$$

в якому

$$S_B^* := -\partial_\tau + \sum_{j=1}^{n_2} \Bigg( \sum_{s=1}^{n_1} b_{sj}^1 \xi_{1s} \Bigg) \partial_{\xi_{2j}} + \sum_{j=1}^{n_3} \Bigg( \sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 \xi_{2s} \Bigg) \partial_{\xi_{3j}}$$

або похідна Лі відносно векторного поля, заданого цим виразом.

## 2. Формулювання основних результатів

Наведені вище результати про ФРЗК дозволяють дослідити властивості відповідних потенціалів і на їх основі довести для рівняння (1.1) теореми про коректну розв'язність задачі Коші та інтегральне зображення розв'язків.

ФРЗК $Z$ породжує інтеграл Пуассона функції $\varphi$

$$(P\varphi)(t, x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) \varphi(\xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (2.1)$$

інтеграл Пуассона узагальненої борельової міри $\mu$

$$(P_0\mu)(t, x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)\, d\mu(\xi), \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad (2.2)$$

та об'ємний потенціал густини $f$

$$(Vf)(t,x) := \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \qquad (2.3)$$

Оскільки при $|x| \to \infty$ функція $Z$ прямує до нуля, то густини потенціалів (2.1)–(2.3) можуть відповідно зростати. При цьому самі потенціали, а отже, і розв'язки можуть експоненціально зростати при $|x| \to \infty$. Як відомо з [1] в аналогічних випадках, порядки такого зростання визначаються порядками рівнянь, а типи зростання описуються спеціальними функціями від $t$. За аналогією з [1] для рівняння (1.1) означимо відповідні набори функцій $\vec{k}(t,\vec{a}) := (k_1(t,a_1), k_2(t,a_2), k_3(t,a_3))$ і $\vec{l}(t) := (l_1(t), l_2(t), l_3(t))$, $t \in [0,T]$, формулами

$$k_s(t,a_s) := c_0 a_s (c_0 - a_s t^{2s-1})^{-1}, \quad s \in \{1,2,3\};$$

$$l_1(t) := k_1(t,a_1) + 2t^2 \|B^1\|^2 k_2(t,a_2) + t^4 (\|B^1\| \|B^2\|)^2 k_3(t,a_3),$$

$$l_2(t) := 2k_2(t,a_2) + 4t^2 \|B^2\|^2 k_3(t,a_3), \quad l_3(t) := 4k_3(t,a_3),$$

де $c_0 \in (0,c)$, $c$ — стала з оцінок (1.7) і (1.8), $\vec{a} := (a_1,a_2,a_3)$ — набір таких невід'ємних чисел, що $T < \min_{s\in\{1,2,3\}} (c_0/a_s)^{1/(2s-1)}$, $\|B^1\|$ і $\|B^2\|$ — норми відповідно матриць $B^1$ і $B^2$.

Запровадимо позначання

$$\left.\begin{aligned} \Phi_r(t,x) &:= \exp\left\{ r \sum_{s=1}^{3} k_s(t,a_s) |X_s(t)|^2 \right\}, \\ \Psi_r(t,x) &:= \exp\left\{ r \sum_{s=1}^{3} l_s(t) |x_3|^2 \right\}, \end{aligned}\right\} \quad r \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що

$$\begin{gathered} \vec{k}(0,\vec{a}) = \vec{a}, \quad k_s(t,a_s) \ge a_s, \quad s \in \{1,2,3\}; \\ \left.\begin{aligned} k_1(t-\tau, k_1(\tau,a_1)) &= k_1(t,a_1), \\ k_s(t-\tau, k_s(\tau,a_s)) &\le k_s(t,a_s), \end{aligned}\right. \quad s \in \{2,3\}, \\ 0 \le \tau \le t \le T, \end{gathered} \qquad (2.4)$$

а також справджується нерівність

$$E_{c_0}(t,x;\tau,\xi)\Phi_1(\tau,\xi) \le \Phi_1(t,x), \quad 0 \le \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \in \mathbb{R}^n. \qquad (2.5)$$

Використовуючи означення точок $X_s(t)$, $s \in \{1,2,3\}$, з (1.5) та нерівності $|a+b|^2 \le 2(|a|^2+|b|^2)$, $|a+b+c|^2 \le 4(|a|^2+|b|^2+|c|^2)$, $\{a,b,c\} \in \mathbb{R}^m$, маємо

$$
\begin{aligned}
|X_2(t)|^2 = \big|x_2 + t((B^1)'{x_1}')'\big|^2 \\
\le 2\big(\,|x_2|^2 + t^2|((B^1)'{x_1}')'|^2\big) \\
\le 2\big(\,|x_2|^2 + t^2||B^1||^2|x_1|^2\big),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|X_3(t)|^2 &= \left|x_3 + t((B^2)'{x_2}')' + \frac{1}{2}\,t^2[(B^2)'(B^1)'{x_1}']'\right|^2 \\
&\le 4\left(|x_3|^2 + |t((B^2)'{x_2}')'|^2 + \left|\frac{1}{2}t^2((B^2)'(B^1)'{x_1}')'\right|^2\right) \\
&\le 4\left(|x_3|^2 + t^2\|B^2\|^2|x_2|^2 + 2^{-2}t^4\|B^1\|^2\|B^2\|^2|x_1|^2\right). \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Тому

$$
\Psi_{-1}(t,x) \le \Phi_{-1}(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}. \qquad (2.7)
$$

Нехай $p \in [1,\infty]$ і $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, — задана комплекснозначна функція, вимірна за $x$ при будь-якому $t \in [0,T]$. Для кожного $t \in [0,T]$ означимо норми

$$
\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} := \|u(t,\cdot)\Phi_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},
$$

$$
\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{l}(t)} := \|u(t,\cdot)\Psi_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.
$$

Використовуватимемо такі простори:
$L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$, $t \in [0,T]$, $p \in [1,\infty]$, — простори вимірних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких є скінченними норми $\|\varphi\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$; $L_p^{\vec{a}} := L_p^{\vec{k}(0,\vec{a})}$;
$M^{\vec{a}}$ — простір зліченно адитивних функцій $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ (узагальнених борельових мір в $\mathbb{R}^n$), які задовольняють умову

$$
\|\mu\|^{\vec{a}} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi_{-1}(0,x)\, d|\mu|(x) < \infty,
$$

де $\mathcal{B}$ — $\sigma$-алгебра борельових множин в $\mathbb{R}^n$, а $|\mu|$ — повна варіація $\mu$;
$L_1^{-\vec{l}(T)}$ — простір вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ зі скінченною нормою

$$
\|\psi\|_1^{-\vec{l}(T)} := \|\psi(\cdot)\Psi_1(T,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)};
$$

$C_0^{-\vec{l}(T)}$ — простір таких неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, що $|\psi(x)| \times \Psi_1(T,x) \to 0$ при $|x| \to \infty$; для $\psi \in C_0^{-\vec{l}(T)}$ покладемо $\|\psi\|_\infty^{-\vec{l}(T)} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(|\psi(x)|\Psi_1(T,x))$.

Зауважимо, що з (2.5) випливає нерівність

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{l}(t)} \le \|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}, \quad t \in [0,T], \quad p \in [1,\infty]. \tag{2.8}$$

а оскільки $l_1(t) \ge a_1$, $l_s(t) > a_s$, $s \in \{2,3\}$, $t \in [0,T]$, то для $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$ маємо

$$\|\varphi\|_p^{\vec{l}(t)} \le \|\varphi\|_p^{\vec{a}}, \quad t \in [0,T], \quad p \in [1,\infty]. \tag{2.9}$$

Сформулюємо основні теореми для рівняння (1.1). При цьому для його правої частини будемо використовувати умови

**$\boldsymbol{\beta_p}$)** функція $f : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}$ неперервна, локально гельдерова за $x$ відносно відстані $d(x,\xi)$ із (1.5) рівномірно щодо $t$ та для будь-якого $t \in (0,T]$ є скінченними величини $\|f(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$ і $F_p(t) := \int_0^t \|f(\tau,\cdot)\|_p^{\vec{k}(\tau,\vec{a})} d\tau$, $p \in [1,\infty]$.

**Теорема 2.1.** *Нехай виконуються умови $\boldsymbol{\alpha_1}$–$\boldsymbol{\alpha_4}$. Тоді є правильними такі твердження:*

1) *для довільної функції $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$ та будь-якої функції $f$, яка задовольняє умову $\boldsymbol{\beta_p}$, $p \in [1,\infty]$, формула*

$$u(t,x) = (P\varphi)(t,x) + (Vf)(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{2.10}$$

*де оператори $P$ і $V$ означено в (2.1) і (2.3), визначає єдиний розв'язок рівняння (1.1), для якого справджується оцінка*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C(\|\varphi\|_p^{\vec{a}} + F_p(t)), \quad t \in (0,T], \tag{2.11}$$

*при $p \in [1,\infty)$ — співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \|u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\vec{l}(t)} = 0, \tag{2.12}$$

*а при $p = \infty$ — співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) u(t,x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)\, dx \tag{2.13}$$

*для будь-якої функції $\psi \in L_1^{-\vec{l}(T)}$;*

2) *для будь-якої узагальненої міри* $\mu \in M^{\vec{a}}$ *і функції* $f$, *що задовольняє умову* $\boldsymbol{\beta_1}$, *формулою*

$$u(t,x) = (P_0\mu)(t,x) + (Vf)(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{2.14}$$

*де оператори* $P_0$ *і* $V$ *означено в* (2.2) *і* (2.3), *визначається єдиний розв'язок рівняння* (1.1), *для якого справджується оцінка*

$$\|u(t,\cdot)\|_1^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C(\|\mu\|^{\vec{a}} + F_1(t)), \quad t \in (0,T], \tag{2.15}$$

*і співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t,x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,d\mu(x) \tag{2.16}$$

*для довільної функції* $\psi \in C_0^{-\vec{l}(T)}$.

Наступна теорема є в певному сенсі оберненою до теореми 2.1.

**Теорема 2.2.** *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1.1) *виконуються умови* $\boldsymbol{\alpha_1}$–$\boldsymbol{\alpha_4}$, *для його правої частини* $f$ — *умова* $\boldsymbol{\beta_p}$, *а для його розв'язку* $u$, *визначеного в* $\Pi_{(0,T]}$, *справджується нерівність*

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C, \quad t \in (0,T], \tag{$2.17_p$}$$

*з деякими сталими* $C > 0$ *і* $p \in [1,\infty]$. *Тоді при* $p \in (1,\infty]$ *існує єдина функція* $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$, *а при* $p = 1$ — *єдина узагальнена міра* $\mu \in M^{\vec{a}}$ *такі, що розв'язок* $u$ *зображується відповідно у вигляді* (2.10) *і* (2.14).

**Наслідок 2.1.** *З теорем* 2.1 *і* 2.2 *випливає, що за умов на коефіцієнти та праву частину* $f$ *рівняння* (1.1) *є правильними такі твердження:*

1) *простори* $L_p^{\vec{a}}$ *і* $M^{\vec{a}}$ *є множинами початкових значень розв'язків рівняння* (1.1) *тоді й тільки тоді, коли ці розв'язки задовольняють умову* ($2.17_p$) *при* $p \in (1,\infty]$ *і* $p = 1$ *відповідно;*

2) *для зображення розв'язків рівняння* (1.1) *у вигляді* (2.10) *чи* (2.14) *з* $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$ *і* $\mu \in M^{\vec{a}}$ *необхідно й досить, щоб виконувалась умова* ($2.17_p$);

3) *розв'язки рівняння* (1.1), *для яких виконується умова* ($2.17_p$), *задовольняють початкові умови при* $t = 0$ *в сенсі* (2.12), (2.13) *і* (2.16).

**Наслідок 2.2.** *Нехай $p \in [1,\infty]$, виконуються умови $\boldsymbol{\alpha_1}$–$\boldsymbol{\alpha_4}$, $U_p$ — клас усіх розв'язків рівняння (1.1) з $f = 0$, які належать до простору $L_p^{\vec{k}(t,\vec{a})}$ як функції $x$ при кожному фіксованому $t \in (0,T]$ і для яких виконується умова $(2.17_p)$. З теорем 2.1 і 2.2 і наслідку 2.1 випливає, що класи $U_p$, $p \in (1,\infty]$, і $U_1$ є множинами значень операторів $P$ і $P_0$, визначених формулами (2.1) і (2.2) на відповідно просторах $L_p^{\vec{a}}$ і $M^{\vec{a}}$, причому ці оператори встановлюють відповідно гомеоморфізми $L_p^{\vec{a}} \leftrightarrow U_p$ і $M^{\vec{a}} \leftrightarrow U_1$.*

У наступних пунктах наведемо доведення теорем 1.1 і 1.2.

## 3. Властивості інтегралів Пуассона

Вивчимо властивості інтегралів (2.1) і (2.2). Припускатимемо, що виконуються умови $\boldsymbol{\alpha_1}$–$\boldsymbol{\alpha_3}$.

**Лема 3.1.** *Якщо $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$, $p \in [1,\infty]$, то для функції $u_1 := P\varphi$ справджується оцінка*

$$\|u_1(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C\|\varphi\|_p^{\vec{a}}, \quad t \in (0,T]. \tag{3.1}$$

*Доведення.* Нехай спочатку $p = \infty$. На підставі оцінок (1.7) для $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$ маємо

$$\begin{aligned} |u_1(t,x)| &\le C \int\limits_{\mathbb{R}^n} |Z(t,x;0,\xi)||\varphi(\xi)|\, d\xi \\ &\le C \int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M} E_c(t,x;0,\xi)(|\varphi(\xi)|\Phi_{-1}(0,\xi))\Phi_1(0,\xi)\, d\xi \\ &\le C\|\varphi\|_\infty^{\vec{a}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M} E_{c-c_0}(t,x;0,\xi)(E_{c_0}(t,x;0,\xi)\Phi_1(0,\xi))\, d\xi. \end{aligned}$$

Використовуючи нерівність (2.5) і те, що для $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ і $\delta > 0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M} E_\delta(t,x;0,\xi)\, d\xi = C, \tag{3.2}$$

одержуємо

$$|u_1(t,x)| \le C\|\varphi\|_\infty^{\vec{a}} \Phi_1(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]},$$

звідки випливає оцінка (3.1) для $p = \infty$.

Розглянемо випадок, коли $p \in (1,\infty)$. За допомогою оцінок (1.7) і (2.5), а також нерівності Гельдера маємо

$$
\begin{aligned}
|u_1(t,x)| \le C \int\limits_{\mathbb{R}^n} (|\varphi(\xi)|\Phi_{-1}(0,\xi)) E_{(c-c_0)/2}(t,x;0,\xi) \\
\times E_{(c+c_0)/2}(t,x;0,\xi)\Phi_1(0,\xi) t^{-M}\, d\xi \\
\le C \Bigg( \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)|^p \Phi_{-p}(0,\xi) E_{p(c-c_0)/2}(t,x;0,\xi)\, d\xi \Bigg)^{1/p} \\
\times \Bigg( \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{p'(c+c_0)/2}(t,x;0,\xi)\Phi_{p'}(0,\xi)\, d\xi \Bigg)^{1/p'} t^{-M} \\
\le C \Bigg( \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)|^p \Phi_{-p}(0,\xi) E_{p(c-c_0)/2}(t,x;0,\xi) t^{-M}\, d\xi \Bigg)^{1/p} \\
\times \Phi_1(t,x) \Bigg( \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{p'(c-c_0)/2}(t,x;0,\xi) t^{-M}\, d\xi \Bigg)^{1/p'}, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]},
\end{aligned}
$$

де число $p'$ таке, що $1/p + 1/p' = 1$. На підставі рівності (3.2) та аналогічної рівності

$$
\int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{-M} E_\delta(t,x;0,\xi)\, dx = C, \quad t>0, \quad \delta>0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{3.3}
$$

звідси одержуємо

$$
\begin{aligned}
&\|u_1(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \\
&\le C \Bigg( \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Bigg( \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)|^p \Phi_{-p}(0,\xi) E_{p(c-c_0)/2}(t,x;0,\xi) t^{-M}\, d\xi \Bigg) dx \Bigg)^{1/p} \\
&= C \Bigg( \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)|^p \Phi_{-p}(0,\xi) \Bigg( \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{p(c-c_0)/2}(t,x;0,\xi) t^{-M}\, dx \Bigg) d\xi \Bigg)^{1/p} \\
&\qquad = C\|\varphi\|_p^{\vec{a}}, \quad t \in (0,T].
\end{aligned}
$$

Якщо $p=1$, то за допомогою нерівностей (1.7) і (2.5) маємо

$$
\begin{aligned}
&|u_1(t,x)| \\
&\le C \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)|\Phi_{-1}(0,\xi) E_{c-c_0}(t,x;0,\xi) E_{c_0}(t,x;0,\xi)\Phi_1(0,\xi) t^{-M}\, d\xi
\end{aligned}
$$

$$\le C\Phi_1(t,x)\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\varphi(\xi)|\Phi_{-1}(0,\xi)E_{c-c_0}(t,x;0,\xi)t^{-M}\,d\xi,$$

$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]},$$

звідки, враховуючи рівність (3.3), одержуємо для $t\in(0,T]$

$$\|u_1(t,\cdot)\|_1^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\varphi(\xi)|\Phi_{-1}(0,\xi)\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}E_{c-c_0}(t,x;0,\xi)t^{-M}\,dx\Bigg)\,d\xi = C\|\varphi\|_1^{\vec{a}}.$$

□

З'ясуємо, в якому сенсі функція $u_1$ задовольняє початкову умову.

**Лема 3.2.** *Нехай $\varphi\in L_p^{\vec{a}}$, $p\in[1,\infty]$. Тоді при $p\in[1,\infty)$*

$$\lim_{t\to0}\|u_1(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{\vec{l}(t)}=0, \tag{3.4}$$

*а при $p=\infty$ $u_1(t,\cdot)\underset{t\to0}{\to}\varphi$ слабко, тобто для будь-яких $\psi\in L_1^{-\vec{l}(T)}$ справджується співвідношення*

$$\lim_{t\to0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u_1(t,x)\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\varphi(x)\,dx. \tag{3.5}$$

*Доведення.* Нехай $p\in[1,\infty)$. Треба довести, що для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta\in(0,T)$ таке, що для будь-яких $t\in(0,\delta)$ справджується нерівність

$$\|(P\varphi)(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{\vec{l}(t)}<\varepsilon. \tag{3.6}$$

Для $R>0$ розглянемо функцію $\varphi^{(R)}$, що визначається рівностями

$$\varphi^{(R)}(x):=\begin{cases}\varphi(x), & x\in B_R,\\ 0, & x\in\mathbb{R}^n\setminus B_R,\end{cases}$$

де $B_R:=\{x\in\mathbb{R}^n\mid d(x,0)\le R\}$. Маємо

$$\|(P\varphi)(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{\vec{l}(t)}\le\|(P(\varphi-\varphi^{(R)}))(t,\cdot)\|_p^{\vec{l}(t)} + \|(P\varphi^{(R)})(t,\cdot)-\varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{\vec{l}(t)}+\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_p^{\vec{l}(t)},\quad t\in(0,T]. \tag{3.7}$$

На підставі леми 3.1 справджується нерівність

$$\|(P(\varphi-\varphi^{(R)}))(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_p^{\vec{a}}, \quad t\in(0,T]. \tag{3.8}$$

Використовуючи нерівності (2.8), (2.9), (3.7) і (3.8), одержуємо

$$\|(P\varphi)(t,\cdot)-\varphi(\cdot)\|_p^{\vec{l}(t)} \le (C+1)\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_p^{\vec{a}} + \|(P\varphi^{(R)})(t,\cdot)-\varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{\vec{l}(t)}, \quad t\in(0,T].$$

Нехай $\varepsilon>0$ задане. Виберемо $R>0$ так, щоб

$$\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_p^{\vec{a}} = \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_R} |\varphi(x)|^p\Phi_{-p}(0,x)\,dx\Bigg)^{1/p} < \varepsilon/(2(C+1)).$$

Оскільки

$$\|(P\varphi^{(R)})(t,\cdot)-\varphi^{(R)}(\cdot)\|_p^{\vec{l}(t)} \le \|(P\varphi^{(R)})(t,\cdot)-\varphi^{(R)}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} =: I^{1/p},$$

то для доведення (3.6) досить довести існування такого $\delta\in(0,T)$, що для будь-якого $t\in(0,\delta)$ виконується нерівність

$$I^{1/p} < \varepsilon/2. \tag{3.9}$$

Запишемо $I$ у вигляді $I=I_1+I_2$, де

$$I_1 := \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}} \Bigg|\int\limits_{B_R} Z(t,x;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)\,d\xi\Bigg|^p dx,$$

$$I_2 := \int\limits_{B_{2R}} \Bigg|\int\limits_{B_R} Z(t,x;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)\,d\xi - \varphi^{(R)}(x)\Bigg|^p dx.$$

При $p=1$ одержуємо

$$I_1 \le C\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}} \Bigg(\int\limits_{B_R} |\varphi^{(R)}(\xi)|E_c(t,x;0,\xi)t^{-M}\,d\xi\Bigg)dx = C\int\limits_{B_R}|\varphi^{(R)}(\xi)|\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}} E_c(t,x;0,\xi)t^{-M}\,dx\Bigg)d\xi. \tag{3.10}$$

Зауважимо, що існує число $\delta_0 \in (0,1)$ таке, що для будь-яких $t \in (0,\delta_0)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R}$ і $\xi \in B_R$ справджується оцінка

$$\rho(t,x,\xi) := \sum_{s=1}^{3} t^{1-2s}|X_s(t)-\xi_s|^2 \geq t^{-1}(R/2)^2. \qquad (3.11)$$

Справді, для $t \in (0,1)$ маємо

$$\rho(t,x,\xi) \geq t^{-1}|X(t)-\xi|^2 \geq t^{-1}\big||X(t)|-|\xi|\,\big|^2. \qquad (3.12)$$

Далі, використовуючи позначення

$$\begin{aligned} Y(t) := \Bigg( &\underbrace{0,\dots,0}_{n_1}, -t\sum_{k=1}^{n_1} b^1_{k1}x_{1k}, \dots, -t\sum_{k=1}^{n_1} b^1_{kn_2}x_{1k}, \\ &-t\sum_{s=1}^{n_2} b^2_{s1}x_{2s} - 2^{-1}t^2\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{s=1}^{n_2} b^2_{s1}b^1_{ks}x_{1k}, \dots, \\ &-t\sum_{s=1}^{n_2} b^2_{sn_3}x_{2s} - 2^{-1}t^2\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{s=1}^{n_2} b^2_{sn_3}b^1_{ks}x_{1k}\Bigg), \end{aligned}$$

для $t \in (0,1)$ одержуємо

$$|X(t)| = |x - Y(t)| \geq \big||x| - |Y(t)|\,\big|, \qquad (3.13)$$

$$\begin{aligned} |Y(t)| \leq \Bigg( &t^2\sum_{j=1}^{n_2}\Bigg(\sum_{k=1}^{n_1}|b^1_{kj}||x_{1k}|\Bigg)^2 + t^2\sum_{j=1}^{n_3}\Bigg(\sum_{s=1}^{n_2}|b^2_{sj}||x_{2s}|\Bigg)^2 \\ &+ 4^{-1}t^4\sum_{j=1}^{n_3}\Bigg(\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{s=1}^{n_2}|b^2_{sj}||b^1_{ks}||x_{1k}|\Bigg)^2\Bigg)^{1/2} \leq c_1 t|x|. \qquad (3.14) \end{aligned}$$

Нехай число $\delta_0 > 0$ таке, що $c_1\delta_0 \leq 1/4$, тоді з (3.14) для будь-яких $t \in (0,\delta_0)$ і $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R}$ випливає нерівність $|X(t)| \geq (3/4)|x| \geq 3R/2$, а тоді з (3.12) одержуємо (3.11).

З нерівності (3.10) за допомогою оцінки (3.11) і рівності (3.3) випливає, що

$$\begin{aligned} I_1 \leq C\exp\{c_1R^2t^{-1}\}\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi^{(R)}(\xi)|\Bigg(\int_{\mathbb{R}^n} E_{c_0}(t,x;0,\xi)t^{-M}\,dx\Bigg)d\xi \\ = C\|\varphi^{(R)}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\exp\{-c_1R^2t^{-1}\}, \quad t \in (0,\delta_0), \quad (3.15) \end{aligned}$$

де $c_1 := (c - c_0)/4$.

При $p > 1$ за допомогою (1.7), (3.2), (3.12) і нерівності Гельдера для $t \in (0, \delta_0)$ і $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R}$ маємо

$$\begin{aligned}
&\left|\int\limits_{B_R} Z(t,x;0,\xi)\varphi^{(R)}(\xi)\,d\xi\right| \\
&\qquad\le C\Bigg(\int\limits_{B_R} |\varphi^{(R)}(\xi)|^p E_{p(c-c_0)/2}(t,x;0,\xi)t^{-M}\,d\xi\Bigg)^{1/p} \\
&\times\Bigg(\int\limits_{B_R} E_{p'(c+c_0)/2}(t,x;0,\xi)t^{-M}\,d\xi\Bigg)^{1/p'} \le C\exp\{-c_1R^2t^{-1}/2\} \\
&\qquad\times\Bigg(\int\limits_{B_R} |\varphi^{(R)}(\xi)|^p E_{p(c-c_0)/2}(t,x;0,\xi)t^{-M}\,d\xi\Bigg)^{1/p} \\
&\times\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{p'c_0}(t,x;0,\xi)t^{-M}\,d\xi\Bigg)^{1/p'} = C\exp\{-c_1R^2t^{-1}/2\} \\
&\qquad\times\Bigg(\int\limits_{B_R} |\varphi^{(R)}(\xi)|^p E_{p(c-c_0)/2}(t,x;0,\xi)t^{-M}\,d\xi\Bigg)^{1/p},
\end{aligned}$$

звідки одержуємо

$$\begin{aligned}
I_1 &\le C\exp\{-pc_1R^2t^{-1}/2\} \\
&\quad\times\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}}\Bigg(\int\limits_{B_R} |\varphi^{(R)}(\xi)|^p E_{p(c-c_0)/2}(t,x;0,\xi)t^{-M}\,d\xi\Bigg)dx \\
&\le C\|\varphi^{(R)}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\exp\{-pc_1R^2t^{-1}/2\}, \quad t\in(0,\delta_0). \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Оцінимо $I_2$. Нехай $\varphi_h^{(R)}$ — середня функція для $\varphi^{(R)}$. Для неї (на підставі властивостей середніх функцій) справджується співвідношення

$$\|\varphi^{(R)} - \varphi_h^{(R)}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0 \qquad (3.17)$$

і при фіксованому $h > 0$ рівномірно щодо $x \in B_{2R}$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi_h^{(R)}(\xi)\,d\xi - \varphi_h^{(R)}(x)\right| \underset{t\to 0}{\to} 0. \qquad (3.18)$$

Маємо

$$I_2^{1/p} \le \left( \int\limits_{B_{2R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)(\varphi^{(R)}(\xi) - \varphi_h^{(R)}(\xi))\, d\xi \right|^p dx \right)^{1/p}$$

$$+ \left( \int\limits_{B_{2R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi_h^{(R)}(\xi)\, d\xi - \varphi_h^{(R)}(x) \right|^p dx \right)^{1/p}$$

$$+ \left( \int\limits_{B_{2R}} |\varphi_h^{(R)}(x) - \varphi^{(R)}(x)|^p\, dx \right)^{1/p}.$$

Повторивши для першого доданка оцінки, аналогічні до проведених при доведенні леми 1.1 (тільки без вагової функції), і використавши співвідношення (3.17) і (3.18), одержимо, що існує така стала $\delta_2 > 0$, що для будь-яких $t \in (0, \delta_2)$ виконується нерівність

$$I_2 < (1/2)(\varepsilon/2)^p. \tag{3.19}$$

З нерівностей (3.15) і (3.16) випливає існування такого $\delta_1 > 0$, що для будь-яких $t \in (0, \delta_1)$ справджується нерівність $I_1 < (1/2)(\varepsilon/2)^p$. Звідси і з (3.19) випливає виконання нерівності (3.9) для всіх $t \in (0, \delta)$, де $\delta$ — найменше з чисел $\delta_1$ і $\delta_2$.

Доведемо співвідношення (3.5). Спочатку зауважимо, що інтеграли з (3.5) мають сенс при будь-яких $\varphi \in L_\infty^{\vec{a}}$, $\psi \in L_1^{-\vec{l}(T)}$ і $t \in (0, T]$, оскільки на підставі нерівності (2.8) і леми 3.1 $\|u(t,\cdot)\|_\infty^{\vec{l}(t)} < \infty$ для будь-яких $t \in (0, T]$, якщо $\varphi \in L_\infty^{\vec{a}}$. Справді, на підставі того, що для будь-яких $t \in (0, T]$ $a_s \le l_s(t) \le l_s(T)$, $s \in \{1, 2, 3\}$, маємо

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) u_1(t,x)\, dx \right| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} (|\psi(x)| \Psi_1(T,x))$$

$$\times (|u_1(t,x)| \Psi_{-1}(t,x))\, dx \le \|\psi\|_1^{-\vec{l}(T)} \|u_1(t,\cdot)\|_\infty^{\vec{l}(t)} < \infty,$$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \varphi(x)\, dx \right| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} (|\psi(x)| \Psi_1(T,x))$$

$$\times (|\varphi(x)| \Phi_{-1}(0,x))\, dx \le \|\psi\|_1^{-\vec{l}(T)} \|\varphi\|_\infty^{\vec{a}} < \infty.$$

На підставі (2.1) для доведення (3.5) досить установити, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (v(t,\xi) - \psi(\xi))\varphi(\xi)\, d\xi \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

де

$$v(t,\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\psi(x)\,dx.$$

Оскільки $\varphi \in L_\infty^{\vec{a}}$, то маємо

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} (v(t,\xi)-\psi(\xi))\varphi(\xi)\,d\xi \right| \le \|\varphi\|_\infty^{\vec{a}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |v(t,\xi)-\psi(\xi)|\Phi_1(0,\xi)\,d\xi$$

і для доведення (3.5) треба довести, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |v(t,\xi)-\psi(\xi)|\Phi_1(0,\xi)\,d\xi \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{3.20}$$

Оскільки $a_s < k_s(T,a_s)$, $s \in \{1,2,3\}$, то існує таке $\gamma > 0$, що $l_s(T) \ge k_s(T,a_s) \ge g_s(t) := c_0 k_s(T,a_s)/(c_0 + k_s(T,a_s)t^{2s-1}) \ge a_s$, $s \in \{1,2,3\}$, для всіх $t \in [0,\gamma]$. Тому

$$G(t,\xi) := \exp\left\{ \sum_{s=1}^{3} g_s(t)|\xi_s|^2 \right\} \ge \Phi_1(0,\xi), \quad t \in [0,\gamma], \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

і для доведення (3.20) досить для будь-якого $\varepsilon > 0$ довести існування такого $\delta \in (0,\gamma)$, що для всіх $t \in (0,\delta)$ справджується нерівність

$$\|v(t,\cdot\,)-\psi(\cdot)\|_1^{-\vec{g}(t)} := \|(v(t,\cdot\,)-\psi(\cdot))G(t,\cdot\,)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon, \tag{3.21}$$

де $\vec{g}(t) := (g_1(t), g_2(t), g_3(t))$.

Доведення (3.21) аналогічне до доведення (3.6). Для функції $\psi$ введемо функцію $\psi^{(R)}$ так само, як там для $\varphi$ була введена функція $\varphi^{(R)}$. Для $t \in (0,\gamma)$ маємо

$$\|v(t,\cdot\,)-\psi(\cdot)\|_1^{-\vec{g}(t)} \le \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)(\psi-\psi^{(R)})(x)\,dx \right\|_1^{-\vec{g}(t)}$$
$$+ \left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\psi^{(R)}(x)\,dx - \psi^{(R)}(\xi) \right\|_1^{-\vec{g}(t)} + \|\psi-\psi^{(R)}\|_1^{-\vec{g}(t)} =: \sum_{j=1}^{3} J_j. \tag{3.22}$$

Оцінимо $J_1$. За допомогою оцінки (1.7) маємо

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)(\psi-\psi^{(R)})(x)\,dx \right|$$

$$\leq C\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c-c_0}(t,x;0,\xi)\left(E_{c_0}(t,x;0,\xi)\exp\left\{-\sum_{s=1}^{3}k_s(T,a_s)|X_s(t)|^2\right\}\right)$$
$$\times|(\psi-\psi^{(R)})(x)|\Psi_1(T,x)t^{-M}\,dx$$
$$\leq C(G(t,\xi))^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c-c_0}(t,x;0,\xi)(|(\psi-\psi^{(R)})(x)|\Psi_1(T,x))t^{-M}\,dx. \tag{3.23}$$

Тут використані нерівність

$$\sum_{s=1}^{3}k_s(T,a_s)|X_s(t)|^2\leq\sum_{s=1}^{3}l_s(T)|x|^2,\quad t\geq 0,\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{3.24}$$

яка справджується на підставі (2.6) та означення $\vec{l}(T)$, і нерівність

$$E_{c_0}(t,x;0,\xi)\exp\left\{-\sum_{s=1}^{3}k_s(T,a_s)|X_s(t)|^2\right\}\leq(G(t,\xi))^{-1},$$
$$t\geq 0,\quad\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{3.25}$$

яка доводиться так само, як (2.5).

З (3.23) за допомогою рівності (3.2) випливає, що

$$J_1\leq C\|\psi-\psi^{(R)}\|_1^{-\vec{l}(T)},\quad t\in(0,\gamma). \tag{3.26}$$

На підставі того, що $g_s(t)\leq g_s(T)$, $t\in(0,\gamma)$, $s\in\{1,2,3\}$, маємо

$$J_3\leq\|\psi-\psi^{(R)}\|_1^{-\vec{l}(T)},\quad t\in(0,\gamma),$$

тому

$$J_1+J_3\leq(C+1)\|\psi-\psi^{(R)}\|_1^{-\vec{l}(T)},\quad t\in(0,\gamma).$$

Оскільки

$$\|\psi-\psi^{(R)}\|_1^{-\vec{l}(T)}=\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_R}|\psi(x)|\Psi_1(T,x)\,dx\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

то

$$J_1+J_3\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0,\quad t\in(0,\gamma). \tag{3.27}$$

Розглянемо вираз $J_2$. Запишемо його у вигляді

$$J_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) \psi^{(R)}(x)\, dx \right| G(t, \xi)\, d\xi$$
$$+ \int\limits_{B_{2R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) \psi^{(R)}(x)\, dx - \psi^{(R)}(\xi) \right| G(t, \xi)\, d\xi =: J_2^{'} + J_2^{''}.$$

Так само, як (3.26), доводиться нерівність

$$\left\| \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) \psi^{(R)}(x)\, dx \right\|_1^{\vec{g}(t)} \leq C \|\psi^{(R)}\|_1^{-\vec{l}(T)}, \quad t \in (0, \gamma),$$

звідки випливає, що

$$J_2^{'} \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0, \quad t \in (0, \gamma). \tag{3.28}$$

Для $J_2^{''}$ маємо

$$J_2^{''} \leq \int\limits_{B_{2R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) \psi^{(R)}(x)\, dx - \psi^{(R)}(\xi) \right| d\xi.$$

Провівши для останнього інтеграла міркування, аналогічні до проведених вище для $I_2$, одержимо $J_2^{''} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$, $R > 0$, звідки та із співвідношень (3.22), (3.27), (3.28) випливає твердження (3.21). □

**Лема 3.3.** *Нехай $\mu \in M^{\vec{a}}$. Тоді для функції $u_2 := P_0 \mu$ справджується оцінка*

$$\|u_2(t, \cdot)\|_1^{\vec{k}(t, \vec{a})} \leq C \|\mu\|^{\vec{a}}, \quad t \in (0, T]. \tag{3.29}$$

*і $u_2(t, \cdot) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \mu$ слабко, тобто для будь-яких $\psi$ з простору $C_0^{-\vec{l}(T)}$ справджується співвідношення*

$$\lim_{t \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x) u_2(t, x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, d\mu(x). \tag{3.30}$$

*Доведення.* Використовуючи нерівності (1.7) і (2.5), одержуємо

$$|u_2(t, x)|$$
$$\leq C \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c - c_0}(t, x; 0, \xi) (\ E_{c_0}(t, x; 0, \xi) \Phi_1(0, \xi)) \Phi_{-1}(0, \xi) t^{-M} d|\mu|(\xi)$$

$$\leq C\Phi_1(t,x)\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c-c_0}(t,x;0,\xi)\Phi_{-1}(0,\xi)\,d|\mu|(\xi), \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},$$

звідки за допомогою рівності (3.3) випливає оцінка (3.29).

Доведемо співвідношення (3.30). На підставі означення функцій $l_s$, $s\in\{1,2,3\}$, та оцінки (3.29) інтеграли з (3.30) мають сенс для будь-яких $\psi\in C_0^{-\vec{l}(T)}$, $\mu\in M^{\vec{a}}$ і $t\in(0,T]$. Використовуючи формулу (2.2), одержуємо

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u_2(t,x)\,dx-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,d\mu(x)\right|\leq \|v(t,\cdot\,)-\psi(\cdot)\|_\infty^{-\vec{a}}\|\mu\|^{\vec{a}},$$

де

$$v(t,\xi):=\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\psi(x)\,dx.$$

Тому досить довести, що

$$\|v(t,\cdot\,)-\psi(\cdot)\|_\infty^{-\vec{g}(t)}\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0, \tag{3.31}$$

де функція $\vec{g}$ така сама, як у лемі 3.2.

Нехай $R>0$ і $\theta_R$ — функція з простору $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ така, що $0\leq\theta_R\leq 1$ в $\mathbb{R}^n$, $\theta_R=1$ в $B_{R/2}$ и $\theta_R=0$ в $\mathbb{R}^n\setminus B_R$. Покладемо $\varphi^{(R)}:=\theta_R\varphi$. Для $t\in(0,\gamma)$ маємо

$$\begin{aligned}\|v(t,\cdot\,)-\varphi(\cdot)\|_\infty^{-\vec{g}(t)}&\leq\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)(\varphi-\varphi^{(R)})(x)\,dx\right\|_\infty^{-\vec{g}(t)}\\&+\left\|\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi^{(R)}(x)\,dx-\varphi^{(R)}(\xi)\right\|_\infty^{-\vec{g}(t)}\\&+\|\varphi^{(R)}-\varphi\|_\infty^{-\vec{g}(t)}=:\sum_{j=1}^3 K_j.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Так само, як при доведенні нерівностей (3.23), за допомогою рівності (3.3) одержуємо

$$\begin{aligned}&\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)(\varphi-\varphi^{(R)})(x)\,dx\right|\\&\qquad\leq C\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_\infty^{-\vec{l}(T)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{c-c_0}(t,x;0,\xi)t^{-M}\,dx(G(t,\xi))^{-1},\end{aligned}$$

звідки випливає нерівність

$$K_1 \leq C\|\varphi - \varphi^{(R)}\|_\infty^{-\vec{l}(T)}, \quad t \in (0, \gamma). \tag{3.33}$$

На підставі нерівностей $g_s(t) \leq l_s(T)$, $t \in [0, \gamma)$, $s \in \{1, 2, 3\}$, маємо

$$K_3 \leq \|\varphi - \varphi^{(R)}\|_\infty^{-\vec{l}(T)}, \quad t \in [0, \gamma),$$

тому, внаслідок (3.33),

$$K_1 + K_3 \leq (C + 1)\|\varphi - \varphi^{(R)}\|_\infty^{-\vec{l}(T)}, \quad t \in [0, \gamma).$$

Оскільки

$$\|\varphi - \varphi^{(R)}\|_\infty^{-\vec{l}(T)} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{R/2}} (|\varphi(x)|\Psi_1(T, x)) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

то

$$K_1 + K_3 \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad t \in (0, \gamma). \tag{3.34}$$

Далі маємо

$$K_2 \leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R}} \left( \left| \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)\varphi^{(R)}(x)\, dx \right| G(t, \xi) \right)$$
$$+ \exp\Big\{ \max_{s \in \{1,2,3\}} g_s(T)(2R)^2 \Big\} \sup_{\xi \in B_{2R}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)\varphi^{(R)}(x)\, dx - \varphi^{(R)}(\xi) \right|$$
$$=: K_2' + K_2''. \tag{3.35}$$

Для оцінки $K_2'$ будемо користуватися нерівністю (3.11) для будь-яких $t \in (0, \delta_0)$, $x \in B_R$ і $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2R}$. Ця нерівність для таких точок доводиться аналогічно до випадку, який розглядався при доведенні леми 3.2. Замість нерівностей (3.12) і (3.13) використовуються відповідно нерівності

$$\rho(t, x, \xi) \geq t^{-1}\big||\xi| - |X(t)|\big|^2, \quad |X(t)| \leq |x| + |Y(t)|,$$

потім за допомогою (3.14), вибравши $\delta_0$ так, щоб $c_1\delta_0 \leq 1/2$, одержимо

$$|X(t)| \leq (3/2)|x| \leq 3R/2, \quad \rho(t, x, \xi) \geq t^{-1}(2R - 3R/2) = t^{-1}(R/2)^2.$$

Використовуючи оцінку (1.7), нерівності (3.11), (3.24) і (3.25), рівність (3.3), маємо

$$K_2' \le \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n\setminus B_{2R}} \Bigg( C\int\limits_{B_R} E_{c-c_0}(t,x;0,\xi)(E_{c_0}(t,x;0,\xi)\Phi_{-1}(t,x))$$

$$\times (|\varphi^{(R)}(x)|\Psi_1(T,x))t^{-M}\,dxG(t,\xi)\Bigg)$$

$$\le C\exp\{c_1R^2t^{-1}/2\}\|\varphi^{(R)}\|_\infty^{-\vec{l}(T)}\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{(c-c_0)/2}(t,x;0,\xi)t^{-M}\,dx$$

$$= C\|\varphi\|_\infty^{-\vec{l}(T)}\exp\{-c_1R^2t^{-1}/2\}\underset{t\to 0}{\to} 0, \quad R>0. \quad (3.36)$$

Оскільки $\varphi^{(R)}$ — неперервна та обмежена функція, то на підставі властивості ФРЗК для спряженого рівняння (1.13), маємо

$$K_2'' \underset{t\to 0}{\to} 0, \quad R>0. \quad (3.37)$$

Із співвідношень (3.32)–(3.37) випливає необхідне співвідношення (3.31) □

## 4. Властивості об'ємного потенціалу

Наведемо деякі властивості об'ємного потенціалу (2.3), при цьому припускатимемо виконаними умови $\boldsymbol{\alpha_1}$–$\boldsymbol{\alpha_3}$.

**Лема 4.1.** *Якщо функція $f$ задовольняє умову $\boldsymbol{\beta_p}$, $p\in[1,\infty]$, то функція $v := Vf$ має неперервні похідні $\partial_{x_1}^{k_1}v$, $|k_1|\le 2$, і $S_Bv$, для яких є правильними формули*

$$\partial_{x_{1j}}v(t,x) = \int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_{1j}}Z(t,x;\tau,\xi)f(\tau,\xi)\,d\xi, \quad j\in\{1,\dots,n_1\},$$

$$\partial_{x_1}^{k_1}v(t,x) = \int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z(t,x;\tau,\xi)\big(f(\tau,\xi)-f(\tau,X(t-\tau))\big)\,d\xi$$

$$+\int\limits_0^t\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z(t,x;\tau,\xi)\,d\xi\Bigg)f(\tau,X(t-\tau))d\tau, \quad |k_1|=2,$$

$$S_Bv(t,x) = f(t,x)+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}S_BZ(t,x;\tau,\xi)\big(f(\tau,\xi)-f(\tau,X(t-\tau))\big)\,d\xi$$

$$+\int\limits_0^t \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} S_B Z(t,x;\tau,\xi)\,d\xi\right) f(\tau, X(t-\tau))d\tau, \quad (t,x)\in \Pi_{(0,T]}.$$

*Доведення* леми здійснюється на основі оцінок (1.7)–(1.10) за допомогою стандартної методики, яка використовувалася в монографії [1] для вивчення властивостей об'ємного потенціалу для рівномірно параболічних рівнянь.

**Лема 4.2.** *Якщо функція* $f$ *задовольняє умову* $\boldsymbol{\beta_p}$, $p\in[1,\infty]$, *то функція* $v := Vf$ *є розв'язком рівняння* (1.1), *який має такі властивості:*

$$\|v(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le CF_p(t), \quad t\in(0,T], \tag{4.1}$$

$$\lim_{t\to 0}\|v(t,\cdot)\|_p^{\vec{l}(t)} = 0. \tag{4.2}$$

*Доведення.* Те, що функція $v$ є розв'язком рівняння (1.1), випливає з леми 4.1 і того, що $Z$ є розв'язком відповідного однорідного рівняння. Для доведення леми досить установити лише правильність оцінки (4.1). З неї на підставі нерівності (2.8) і того, що $F_p(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$, випливає (4.2).

Зауважимо, що виконується нерівність

$$\|v(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le \int\limits_0^t \|P(t,\tau,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} d\tau, \quad t\in(0,T], \tag{4.3}$$

де

$$P(t,\tau,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\,d\xi.$$

Для $p\in\{1,\infty\}$ нерівність (4.3) очевидна, а для $p\in(1,\infty)$ вона справджується на підставі нерівності Мінковського. За допомогою нерівностей (2.5), (1.7) і (2.4) так само, як оцінка (3.1), доводиться оцінка

$$\|P(t,\tau,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C\|f(\tau,\cdot)\|_p^{\vec{k}(\tau,\vec{a})}, \quad 0\le\tau<t\le T.$$

З неї і нерівності (4.3) випливає оцінка (4.1). □

## 5. Інтегральні зображення розв'язків задачі Коші

Наведемо лему про зображення у вигляді інтегралів Пуассона розв'язків задачі Коші для однорідного рівняння (1.1). Припускатимемо виконаними умови $\boldsymbol{\alpha_1}$–$\boldsymbol{\alpha_4}$.

**Лема 5.1.** *Нехай* $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$, $p \in [1, \infty]$, *і* $\mu \in M^{\vec{a}}$. *Тоді є правильними такі твердження:*

1) *розв'язок* $u$ *однорідного рівняння* (1.1), *який задовольняє умову*

$$\|u(t, \cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \leq C, \quad t \in (0, T], \tag{5.1$_p$}$$

*з деякою сталою* $C > 0$, *умови* (2.12) *і* (2.13) *відповідно для* $p \in [1, \infty)$ *і* $p = \infty$, *зображується у вигляді* $u = P\varphi$;

2) *розв'язок* $u$ *однорідного рівняння* (1.1), *для якого виконуються умова* (5.1$_1$) *і співвідношення* (2.16), *зображується у вигляді* $u = P_0\mu$.

*Доведення.* Використовуватимемо таку формулу Гріна–Остроградського:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{B_R} (\overline{v}Lu - u\overline{L^*v})(\theta, y)\, dy \\
&\qquad = \int_{B_R} (\overline{v}u)(\theta, y)\Big|_{\theta=t_1}^{t_2} dy - \int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\Gamma_R} \biggl( \sum_{j=1}^{n_2} \biggl( \sum_{s=1}^{n_1} b_{sj}^1 y_{1s} \biggr) \mu_{2j} \\
&\qquad\qquad + \sum_{j=1}^{n_3} \biggl( \sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 y_{2s} \biggr) \mu_{3j} \biggr) (\overline{v}u)(\theta, y) dS_y \\
&\qquad\qquad\qquad + \int_{t_1}^{t_2} d\theta \int_{\Gamma_R} \sum_{j=1}^{n_1} B^j[v, u](\theta, y) \mu_{1j} dS_y,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

де $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$, $B_R$ — куля в $\mathbb{R}^n$ радіуса $R$ з центром у початку координат, $\Gamma_R$ — її межа, $(\mu_{11}, \ldots, \mu_{1n_1}, \mu_{21}, \ldots, \mu_{2n_2}, \mu_{31}, \ldots, \mu_{3n_3})$ — орт зовнішньої нормалі до $\Gamma_R$, $L$ і $L^*$ — диференціальні вирази з (1.1) і (1.13),

$$B^j[v, u] := -\sum_{l=1}^{n_1} (a_{jl}\partial_{y_{1l}} u\overline{v} - u\partial_{y_{1l}}(a_{jl}\overline{v})) + a_j u\overline{v}, \quad j \in \{1, \ldots, n_1\},$$

$u$ і $v$ — досить гладкі функції.

Зауважимо, що формула (5.2) є правильною і для функцій $u$ і $v$, які мають неперервні похідні за $x_1$ до другого порядку та похідні Лі $S_B u$ і $S_B^* v$. Це одержується, якщо розглянути апроксимовні для $u$ і $v$ послідовності досить гладких функцій, записати для них формулу (5.2) і перейти в ній до границі.

1) Нехай $u$ — розв'язок, для якого виконуються умови леми. Нехай $V_R := (0,T] \times B_R$; $\zeta$ — досить гладка на $[0,\infty)$ функція така, що $\zeta = 1$ на $[0,1/2]$, $\zeta = 0$ на $[3/4,\infty)$ і $\zeta' \le 0$; $\zeta_R(x) := \zeta(|x|/R)$; $(t,x)$ — довільно фіксована точка з $V_{R_0/4}$, де $R_0$ — довільно взяте додатне число. Покладемо в формулі (5.2) замість $t_1$, $t_2$, $\theta$, $y$, $u(\theta,y)$ і $v(\theta,y)$ відповідно $h$, $t-\varepsilon$, $\tau$, $\xi$, $u(\tau,\xi)$ і $v(\tau,\xi) = Z^*(\tau,\xi;t,x)\zeta_R(\xi)$, де $R \ge R_0$, $0 < h < t/2$, $0 < \varepsilon < t/2$. Використовуючи властивості функції $\zeta_R$, рівність (1.12) і те, що $Lu = 0$, одержуємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;t-\varepsilon,\xi)\zeta_R(\xi)u(t-\varepsilon,\xi)\,d\xi$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)\zeta_R(\xi)u(h,\xi)\,d\xi$$

$$- \int\limits_h^{t-\varepsilon} d\tau \int\limits_{B_{3R/4}\setminus B_{R/2}} \overline{(L^*(Z^*(\tau,\xi;t,x)\zeta_R(\xi)))}u(\tau,\xi)\,d\xi,$$

а після переходу до границі при $\varepsilon \to 0$ прийдемо до рівності

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)\zeta_R(\xi)u(h,\xi)\,d\xi$$

$$- \int\limits_h^{t} d\tau \int\limits_{B_{3R/4}\setminus B_{R/2}} \overline{L^*(Z^*(\tau,\xi;t,x)\zeta_R(\xi))}u(\tau,\xi)\,d\xi$$

$$=: I_1^{(R)} + I_2^{(R)}. \quad (5.3)$$

Перейдемо в (5.3) до границі при $R \to \infty$. Доведемо, що при цьому $I_1^{(R)}$ прямує до інтеграла

$$I_1 := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)u(h,\xi)\,d\xi.$$

За допомогою оцінки (1.7) маємо

$$|I_1 - I_1^{(R)}| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)(1-\zeta_R(\xi))u(h,\xi)\,d\xi\right|$$

$$\le C(t-h)^{-M} \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus B_{R/2}} E_{c-c_0}(t-h,x;0,\xi)\big(E_{c_0}(t-h,x;0,\xi)\Phi_1(h,\xi)\big)$$

$$\times\,(|u(h,\xi)|\Phi_{-1}(h,\xi))\,d\xi. \quad (5.4)$$

Скористаємось для функцій $E_{c_0}$ і $\rho$ нерівностями

$$E_{c_0}(t-h,x;0,\xi)\Phi_1(h,\xi) \le E_{c_0}(t-h,x;0,\xi)\Psi_1(h,\xi)$$
$$\le \exp\left\{\sum_{s=1}^{3} k_s(t-h,l_s(h))|X_s(t-h)|^2\right\} \le c_1, \quad (5.5)$$

$h$ — досить мале число таке, що

$$0 < t-h \le T < H(h) := \min_{s\in\{1,2,3\}} (c_0/l_s(h))^{1/(2s-1)}, \quad x \in B_{R_0/4},\ \xi \in \mathbb{R};$$

$$\begin{gathered}\rho(t-h,x,\xi) \ge (t-h)^r (R/4)^2, \\ 0 < t-h \le T, \quad x \in B_{R_0/4}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus B_{R/2},\end{gathered} \quad (5.6)$$

де $c_1 > 0$, $r = -1$ при $0 < t-h \le 1$ і $r = -5$ при $t-h > 1$, $R$ — досить велике число, $R_0$ — фіксоване число, причому $0 < R_0 < R$.

Друга нерівність з (5.5) доводиться так само, як нерівність (2.5), а перша і третя — очевидні на підставі нерівностей (1.5) та означення функцій $l_s$, $s \in \{1,2,3\}$. Доведення нерівності (5.6) аналогічне до доведення нерівності (3.11). Як і там, маємо

$$\rho(t-h,x,\xi) \ge (t-h)^r \big||\xi| - |X(t-h)|\big|^2,$$

$$|X(t-h)| \le |x| + |Y(t-h)|$$
$$\le |x| + \left(T^2 \sum_{j=1}^{n_2}\left(\sum_{k=1}^{n_1} |b_{kj}^1||x_{1k}|\right)^2 + T^2 \sum_{j=1}^{n_3}\left(\sum_{s=1}^{n_2} |b_{sj}^2||x_{2s}|\right)^2\right.$$
$$\left. + 4^{-1}T^4 \sum_{j=1}^{n_3}\left(\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{s=1}^{n_2} |b_{sj}^2||b_{ks}^1||x_{1k}|\right)^2\right)^{1/2}$$
$$\le (1+c_2)|x| \le (1+c_2)R_0/4,$$

і, отже,

$$\rho(t-h,x,\xi) \ge (t-h)^r |R/2 - (1+c_2)R_0/4|^2 \ge (t-h)^r (R/4)^2$$

для всіх $R \ge (1+c_2)R_0$.

З нерівностей (5.4)–(5.6) випливає, що

$$|I_1 - I_1^{(R)}| \le C\exp\{-((c-c_0)/2)(t-h)^r (R/4)^2\}(t-h)^{-M}$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{(c-c_0)/2}(t-h,x;0,\xi)(|u(h,\xi)|\Phi_{-1}(h,\xi))\,d\xi. \quad (5.7)$$

Якщо $p=1$, то звідси зразу випливає, що при фіксованому $h$

$$|I_1 - I_1^{(R)}| \le C(t-h)^{-M}\exp\{-((c-c_0)/2)(t-h)^r(R/4)^2\} \\ \times \|u(h,\cdot)\|_1^{\vec{k}(h,\vec{a})} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Якщо $p\in(1,\infty)$, то за допомогою нерівності Гельдера одержуємо

$$|I_1 - I_1^{(R)}| \le C(t-h)^{-M/p}\exp\{-((c-c_0)/2)(t-h)^r(R/4)^2\} \\ \times \|u(h,\cdot)\|_p^{\vec{k}(h,\vec{a})}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{p'(c-c_0)/2}(t-h,x;0,\xi)(t-h)^{-M}\,d\xi\right)^{1/p'} \\ = C(t-h)^{-M/p}\|u(h,\cdot)\|_p^{\vec{k}(h,\vec{a})}\exp\{-((c-c_0)/2)(t-h)^r(R/4)^2\} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

при фіксованому $h$. Для $p=\infty$ при фіксованому $h$ маємо

$$|I_1 - I_1^{(R)}| \le C\|u(h,\cdot)\|_\infty^{\vec{k}(h,\vec{a})}\exp\{-((c-c_0)/2)(t-h)^r(R/4)^2\} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Тепер доведемо, що $I_2^{(R)} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Для цього зауважимо, що

$$L^*(Z^*\zeta_R) = (L^*Z^*)\zeta_R \\ + \sum_{j=1}^{n_2}\left(\sum_{s=1}^{n_1} b_{sj}^1\xi_{1s}\right)\partial_{\xi_{2j}}\zeta_R Z^* + \sum_{j=1}^{n_3}\left(\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2\xi_{2s}\right)\partial_{\xi_{3j}}\zeta_R Z^* \\ + \sum_{j,s=1}^{n_1}\Big(\partial_{\xi_{1j}}(\overline{a}_{js}Z^*)\partial_{\xi_{1s}}\zeta_R - \partial_{\xi_{1s}}(\overline{a}_{js}Z^*)\partial_{\xi_{1j}}\zeta_R\Big) \\ + Z^*\left(\sum_{j=1}^{n_1}\overline{a}_j\partial_{\xi_{1j}}\zeta_R - \sum_{j,s=1}^{n_1}\overline{a}_{js}\partial_{\xi_{1j}}\partial_{\xi_{1s}}\zeta_R\right). \quad (5.8)$$

Оскільки $L^*Z^*(\tau,\xi;t,x)=0$ при $\tau<t$, то весь вираз (5.8), на підставі властивостей функції $\zeta_R$, дорівнює нулеві в $\mathbb{R}^n\setminus(B_{3R/4}\setminus B_{R/2})$. Використовуючи те, що для $\xi\in B_{3R/4}\setminus B_{R/2}$

$$|\xi_{1s}\partial_{\xi_{2j}}\zeta_R(\xi)|\le C, \quad |\xi_{2s}\partial_{\xi_{3j}}\zeta_R(\xi)|\le C, \quad |\partial_{\xi_{1j}}\zeta_R(\xi)|\le CR^{-1},$$

$$|\partial_{\xi_{1j}}\partial_{\xi_{1s}}\zeta_R(\xi)|\le CR^{-2},$$

рівність (1.12) та оцінки (1.7), при $R \geq 1$ одержуємо

$$|L^*(Z^*(\tau,\xi;t,x)\zeta_R(\xi))| \leq C(t-\tau)^{-M-1+\alpha}E_c(t,x;\tau,\xi), \quad \alpha > 0.$$

За допомогою цієї оцінки так само, як вище для $I_1 - I_1^{(R)}$, встановлюємо, що

$$\left| \int\limits_{B_{3R/4}\setminus B_{R/2}} \overline{L^*(Z^*(\tau,\xi;t,x)\zeta_R(\xi))} u(\tau,\xi)\, d\xi \right| \\ \leq C\|u(\tau,\cdot)\|_p^{\vec{k}(\tau,\vec{a})} \exp\{-((c-c_0)/2)(t-\tau)^r(R/4)^2\}(t-\tau)^{-\beta},$$

де $\beta = M+1-\alpha$ при $p=1$, $\beta = (M/p)+1-\alpha$ при $1<p<\infty$ і $\beta = 1-\alpha$ при $p=\infty$. Звідси, використовуючи нерівність

$$\exp\{-((c-c_0)/2)(t-\tau)^r(R/4)^2\}(t-\tau)^{-\beta} \leq C\exp\{-\varepsilon(t-\tau)^r R^2\},$$

$$0 \leq \tau < t, \quad R \geq 1, \quad \varepsilon > 0,$$

і умову ($5.1_p$), одержуємо

$$|I_2^{(R)}| \leq C\exp\{-\varepsilon(t-\tau)^r R^2\} \underset{R\to\infty}{\to} 0.$$

Отже, після переходу в (5.3) до границі при $R \to \infty$ одержуємо

$$u(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)u(h,\xi)\, d\xi. \tag{5.9}$$

У рівності (5.9) перейдемо до границі при $h \to 0$ і доведемо, що

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)u(h,\xi)\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\, d\xi. \tag{5.10}$$

Звідси буде випливати правильність зображення $u = P\varphi$.

Запишемо різницю

$$\Delta_h := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)u(h,\xi)\, d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\, d\xi$$

у вигляді

$$\Delta_h = J_1^{(h)} + J_2^{(h)}, \tag{5.11}$$

де

$$J_1^{(h)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_h^0 Z(t,x;h,\xi)u(h,\xi)\, d\xi \tag{5.12}$$

(тут і далі використовується позначення $\Delta_h^0 f(\cdot\,, h, \cdot\,) := f(\cdot\,, h, \cdot\,) - f(\cdot\,, 0, \cdot\,))$, а

$$J_2^{(h)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)(u(h, \xi) - \varphi(\xi))\, d\xi,$$

якщо $p \in [1, \infty)$, і

$$J_2^{(h)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi) u(h, \xi)\, d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; 0, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi$$

при $p = \infty$.

Для $p \in \{1, \infty\}$ безпосередньо, а для $p \in (1, \infty)$ за допомогою нерівності Гельдера маємо

$$\begin{gathered} |J_1^{(h)}| \le J_{1p}^{(h)} \|u\|_p^{\vec{k}(h,\vec{a})}, \\ J_{1p}^{(h)} := \|\Delta_h^0 Z(t, x; h, \xi)\Phi_1(h, \xi)\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}, \end{gathered} \tag{5.13}$$

де $p' = \infty$ для $p = 1$, $p' = p/(p-1)$ для $p \in (1, \infty)$ і $p' = 1$ для $p = \infty$. Аналогічно для $p \in [1, \infty)$ одержуємо

$$\begin{gathered} |J_2^{(h)}| \le J_{2p}^{(h)} \|u(h, \cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\vec{l}(h)}, \\ J_{2p}^{(h)} := \|Z(t, x; 0, \cdot)\Psi_1(h, \cdot\,)\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)}. \end{gathered} \tag{5.14}$$

Доведемо, що

$$J_s^{(h)} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0, \quad s \in \{1, 2\}. \tag{5.15}$$

На підставі умови ($5.1_p$) співвідношення (5.15) для $s = 1$ буде доведене, якщо встановимо, що

$$J_{1p}^{(h)} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{5.16}$$

При доведенні цього співвідношення будемо використовувати таке твердження: для довільних фіксованих $t \in (0, T]$ і $x \in \mathbb{R}^n$ існують такі сталі $C_1 > 0$, $c_1 \in (c_0, c)$ ($c$ — стала з оцінки (1.7)) і $h_0 > 0$, що для будь-яких $h \in (0, h_0)$ і $\xi \in \mathbb{R}^n$ справджується нерівність

$$|Z(t, x; h, \xi)| \le C_1 t^{-M} E_{c_1}(t, x; 0, \xi). \tag{5.17}$$

Доведемо це твердження. На підставі оцінки (1.7) маємо

$$|Z(t, x; h, \xi)| \le C t^{-M} \exp\Big\{ - c \sum_{s=1}^{3} t^{1-2s} |X_s(t-h) - \xi_s|^2 \Big\}.$$

Оскільки для $c > 0$ існують сталі $C_1 > 0$ і $c_1 \in (c_0, c)$ такі, що для будь-яких $\{u, v\} \subset \mathbb{R}$, $|v| \leq 1$, виконується нерівність

$$\exp\{-c|u - v|^2\} \leq C_1 \exp\{-c_1|u|^2\},$$

то

$$\begin{aligned}
&\exp\{-ct^{-3}|X_2(t-h) - \xi_2|^2\} \\
&\qquad = \exp\{-c|t^{-3/2}(X_2(t) - \xi_2) - t^{-3/2}h(B^1)'x_1'|^2\} \\
&\qquad\qquad \leq C_1 \exp\{-c_1 t^{-3}|X_2(t) - \xi_2|^2\},
\end{aligned}$$

якщо $h$ брати таким, щоб $ht^{-3/2}\|B^1\||x_1| \leq 1$, і

$$\begin{aligned}
&\exp\{-ct^{-5}|X_3(t-h) - \xi_3|^2\} \\
&\qquad = \exp\{-c|t^{-5/2}(X_3(t) - \xi_3) - t^{-5/2}(B^2)'(hx_2' \\
&\qquad\qquad + ht(B^1)'x_1' - h^2(B^1)'x_1'/2)|^2\} \\
&\qquad\qquad\qquad \leq C_1 \exp\{-c_1 t^{-5}|X_3(t) - \xi_3|^2\},
\end{aligned}$$

якщо $h$ брати таким, щоб

$$(h(t\|B^1\||x_1| + |x_2|) + h^2\|B^1\||x_1|/2)t^{-5/2}\|B^2\| \leq 1.$$

На підставі оцінок (1.7), (5.17) і нерівностей, які відрізняються від (5.5) заміною $t - h$ на $t$, маємо

$$\begin{aligned}
&|\Delta_h^0 Z(t, x; h, \xi)\Phi_1(h, \xi)| \leq Ct^{-M}E_{c_1}(t, x; 0, \xi)\Phi_1(h, \xi) \\
&\qquad \leq Ct^{-M}E_{c_1 - c_0}(t, x; 0, \xi)\big(E_{c_0}(t, x; 0, \xi)\Psi_1(h, \xi)\big) \\
&\qquad \leq Ct^{-M}E_{c_1 - c_0}(t, x; 0, \xi)\exp\left\{\sum_{s=1}^{3} k_s(t, l_s(h))|X_s(t)|^2\right\} \\
&\qquad\qquad \leq CE_{c_1 - c_0}(t, x; 0, \xi),
\end{aligned}$$

де $h$ — довільне число з $(0, h_0)$ таке, що виконується нерівність $T < H(h)$ ($H(h)$ з (5.5)). Враховуючи цю нерівність і те, що на підставі неперервності функції $Z$ $\Delta_h^0 Z(t, x; h, \xi)\Phi_1(h, \xi) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$, за допомогою теореми Лебега про мажорантну збіжність одержуємо співвідношення (5.16) для $p \in [1, \infty]$.

Співвідношення (5.15) для $s = 2$ і $p \in [1, \infty)$ випливає з рівності (2.12) і того, що на підставі нерівностей (1.7), (5.5) і рівності (3.2) справджуються такі нерівності для всіх досить малих $h$:

$$J_{2p}^{(h)} \le C\biggl(\int\limits_{\mathbb{R}^n} E_{p'c}(t,x;0,\xi)\Psi_{p'}(h,\xi)t^{-Mp'}\,d\xi\biggr)^{1/p'}$$
$$\le C\exp\biggl\{\sum_{s=1}^{3} k_s(t,l_s(h))|X_s(t)|^2\biggr\}t^{-M/p} \le Ct^{-M/p}, \quad p\in(1,\infty);$$

$$J_{2p}^{(h)} \le C\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}(t^{-M}E_c(t,x;0,\xi)\Psi_1(h,\xi))$$
$$\le Ct^{-M}\exp\biggl\{\sum_{s=1}^{3} k_s(t,l_s(h))|X_s(t)|^2\biggr\} \le Ct^{-M}, \quad p=1.$$

Оскільки при $0<t\le T_0<H(T)$, $T_0\le T$, функція $\psi(\xi):=Z(t,x;0,\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}^n$, на підставі оцінки (1.7) і нерівності

$$E_{c_0}(t,x;0,\xi)\Psi_1(T,\xi) \le \exp\biggl\{\sum_{s=1}^{3} k_s(t,l_s(T))|X_s(t)|^2\biggr\},$$

задовольняє нерівність

$$|\psi(\xi)|\Psi_1(T,\xi) \le Ct^{-M}E_{c-c_0}(t,x;0,\xi)\exp\biggl\{\sum_{s=1}^{3} k_s(t,l_s(T))|X_s(t)|^2\biggr\},$$
$$\xi\in\mathbb{R}^n, \quad (5.18)$$

і, отже, $\psi\in L_1^{-\vec{l}(T)}$, то на основі умови (2.13) одержуємо при $0<t\le T_0$ і $p=\infty$ рівність

$$\lim_{h\to0} J_2^{(h)} = 0. \quad (5.19)$$

З (5.11), (5.15), (5.19) випливає співвідношення (5.10) і, отже, формула $u=P\varphi$ для будь-якої точки $(t,x)$ шару $\Pi_{(0,T]}$ у випадку $p\in[1,\infty)$ і шару $\Pi_{(0,T_0]}$ при $p=\infty$. Щоб упевнитися в правильності цієї формули при $p=\infty$ для будь-якої точки $(t,x)\in\Pi_{(0,T]}$, треба скористатися формулою (5.9) для $h\le T_0$, формулою $u=P\varphi$ при $t=h$ і формулою згортки (1.11).

2) Якщо розв'язок однорідного рівняння (1.1) задовольняє умову $(5.1_1)$, то, як встановлено при доведенні першої частини теореми, для нього правильною є формула (5.9). Перейдемо в ній до границі при $h\to0$. Для цього розглянемо різницю

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;h,\xi)u(h,\xi)\,d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi) = J_1^{(h)} + J_3^{(h)}, \quad (5.20)$$

де $J_1^{(h)}$ визначено формулою (5.12), а

$$J_3^{(h)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)u(h,\xi)\,d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi).$$

Для $J_1^{(h)}$ є правильним співвідношення (5.15). З нерівності (5.18) випливає, що при $t \in (0,T_0]$ функція $\psi(\xi) := Z(t,x;0,\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, належить до простору $C_0^{-\vec{l}(T)}$. Тому на підставі умови (2.16) правильним є співвідношення $\lim_{h\to 0} J_3^{(h)} = 0$, з якого і (5.9), (5.19), (5.20) випливає правильність формули $u = P_0\mu$ для $(t,x) \in \Pi_{(0,T_0]}$. Ця формула є правильною для будь-яких $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$. Це випливає з формул (5.9) для $h \le T_0$, $u = P_0\mu$ при $t = h$ і (1.11). $\square$

## 6. Доведення теорем 2.1 і 2.2

На основі результатів пп. 3–5 доведемо теореми 2.1 і 2.2.

*Доведення теореми* 2.1. З лем 3.1–3.3 випливає, що при довільних $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$, $p \in [1,\infty]$, і $\mu \in M^{\vec{a}}$ для функцій $P\varphi$ і $P_0\mu$ справджуються оцінки (3.1) і (3.29) та співвідношення (3.4), (3.5) і (3.30). Оскільки ФРЗК $Z$ є розв'язком відповідного (1.1) однорідного рівняння, то на підставі оцінок (1.7) і (1.8) для $Z$ звідси випливає, що розв'язками цього рівняння є функції $P\varphi$ і $P_0\mu$. А якщо використати лему 4.2, згідно з якою функція $Vf$ за умов $\boldsymbol{\beta_p}$ на $f$ є розв'язком неоднорідного рівняння (1.1), для якого справджуються оцінка (4.1) та співвідношення (4.2), то одержимо, що формули (2.10) і (2.14) визначають розв'язки рівняння (1.1), для яких є правильними оцінки (2.11) і (2.15) та співвідношення (2.12), (2.13) і (2.16). Єдиність цих розв'язків випливає з леми 5.1. $\square$

*Доведення теореми* 2.2. Розглянемо функцію

$$v(t,x) := u(t,x) - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\,d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}.$$

З умови $(2.17_p)$ і леми 4.2 випливає нерівність

$$\|v(t,\cdot)\|_p^{\vec{k}(t,\vec{a})} \le C, \quad t \in (0,T], \tag{$6.1_p$}$$

причому $v$ є розв'язком у $\Pi_{(0,T]}$ однорідного рівняння (1.1).

Отже, для доведення теореми 2.2 досить довести таке твердження: нехай $v$ — розв'язок однорідного рівняння (1.1), який задовольняє умову ($6.1_p$), тоді при $p \in (1, \infty]$ існує єдина функція $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$, а при $p = 1$ — єдина узагальнена міра $\mu \in M^{\vec{a}}$ такі, що розв'язок $v$ зображується відповідно у вигляді

$$v(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{6.2}$$

і

$$v(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi), \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{6.3}$$

Нехай $p \in (1, \infty]$. З умови ($6.1_p$) випливає, що послідовність функцій

$$\{v(1/\nu,x)\Phi_{-1}(1/\nu,x),\, x \in \mathbb{R}^n : \nu \geq 1\} \tag{6.4}$$

обмежена в просторі $L_p(\mathbb{R}^n)$. Простір $L_p(\mathbb{R}^n)$ ізометричний простору, спряженому з $L_{p'}(\mathbb{R}^n)$, $p' := p/(p-1)$. Якщо використати теорему про слабку компактність обмеженої множини в спряженому просторі, то одержимо, що послідовність (6.4) слабко компактна в $L_p(\mathbb{R}^n)$. Тому існує її підпослідовність

$$\{v(1/\nu(r),x)\Phi_{-1}(1/\nu(r),x),\, x \in \mathbb{R}^n : r \geq 1\} \tag{6.5}$$

і функція $\chi \in L_p(\mathbb{R}^n)$ такі, що для будь-якої $\psi \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(\xi)}\Phi_{-1}(1/\nu(r),\xi)v(1/\nu(r),\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(\xi)}\chi(\xi)\,d\xi. \tag{6.6}$$

Покладемо $\varphi(\xi) := \chi(\xi)\Phi_1(0,\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тоді $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$ і співвідношення (6.6) записується у вигляді

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(\xi)}\Phi_{-1}(1/\nu(r),\xi)v(1/\nu(r),\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(\xi)}\Phi_{-1}(0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{6.7}$$

Нехай $(t,x)$ — фіксована точка шару $\Pi_{(0,T]}$ і

$$\psi(\xi) := \overline{Z(t,x;0,\xi)}\Phi_1(0,\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{6.8}$$

З оцінки

$$|\psi(\xi)| \leq Ct^{-M}E_{c-c_0}(t,x;0,\xi)\Phi_1(t,x), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{6.9}$$

яка одержується за допомогою нерівностей (1.7) і (2.5), випливає, що $\psi \in L_{p'}(\mathbb{R}^n)$. Тому на підставі рівності (6.7) маємо

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\Phi_{-1}(1/\nu(r),\xi)\Phi_1(0,\xi)v(1/\nu(r),\xi)\,d\xi$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi. \quad (6.10)$$

Припустимо, що $1/\nu(r) \le t/2$, $r \ge 1$. Згідно з формулою (5.9)

$$v(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;1/\nu(r),\xi)v(1/\nu(r),\xi)\,d\xi. \quad (6.11)$$

На підставі цієї рівності маємо

$$v(t,x) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_h^0 Z(t,x;h,\xi)|_{h=1/\nu(r)} v(1/\nu(r),\xi)\,d\xi$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)(1-\Phi_{-1}(1/\nu(r),\xi)\Phi_1(0,\xi))v(1/\nu(r),\xi)\,d\xi$$
$$+ \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\Phi_{-1}(1/\nu(r),\xi)\Phi_1(0,\xi)v(1/\nu(r),\xi)\,d\xi$$
$$- \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\Bigg) =: \sum_{j=1}^{3} K_j^{(r)}, \quad r \ge 1. \quad (6.12)$$

Щоб одержати зображення (6.2), досить довести, що для $j \in \{1,2,3\}$

$$\lim_{r\to\infty} K_j^{(r)} = 0. \quad (6.13)$$

З (6.10) випливає (6.13) для $j = 3$. Доведемо (6.13) для $j = 2$. За допомогою нерівності Гельдера та умови $(6.1_p)$ маємо

$$|K_2^{(r)}| \le \|v(1/\nu(r),\,\cdot\,)\|_p^{\vec{k}(1/\nu(r),\vec{a})} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} F_r(\xi)\,d\xi\Bigg)^{1/p'}$$
$$\le C\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} F_r(\xi)\,d\xi\Bigg)^{1/p'}, \quad (6.14)$$

де

$$F_r(\xi) := |Z(t,x;0,\xi)|^{p'}|\Phi_1(1/\nu(r),\xi) - \Phi_1(0,\xi)|^{p'}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad r \ge 1.$$

Вивчимо властивості функцій $F_r$, $r \geq 1$. З оцінки (1.7) і нерівності (2.5) випливають нерівності

$$\begin{aligned}(F_r(\Xi))^{1/p'} &\leq Ct^{-M}E_{c-c_0}(t,x;0,\xi)\\ &\quad\times \big(E_{c_0}(t,x;0,\xi)\Psi_1(1/\nu(r),\xi) + E_{c_0}(t,x;0,\xi)\Phi_1(0,\xi)\big)\\ &\leq Ct^{-M}E_{c-c_0}(t,x;0,\xi)\bigg(\exp\bigg\{\sum_{s=1}^{3} k_s(t,l_s(1/\nu(r)))|X_s(t)|^2\\ &\qquad + \Phi_1(t,x)\bigg\}\bigg).\end{aligned}$$

Тут $r \geq r_0$, де $r_0$ взято так, щоб $t < H(1/\nu(r_0))$. Оскільки для будь-яких $r \geq r_0$ і $s \in \{1,2,3\}$

$$k_s(t,l_s(1/\nu(r))) \leq k_s(t,l_s(1/\nu(r_0))),$$

то

$$\begin{aligned}&(F_r(\Xi))^{1/p'} \leq Ct^{-M}E_{c-c_0}(t,x;0,\xi)\\ &\times\bigg(\exp\bigg\{\sum_{s=1}^{3} k_s(t,l_s(1/\nu(r_0)))|X_s(t)|^2\bigg\}+\Phi_1(t,x)\bigg), \quad \xi\in\mathbb{R}^n,\ r\geq r_0,\end{aligned}$$

звідки випливає існування у послідовності $\{F_r, r \geq r_0\}$ інтегровної мажоранти. А оскільки для кожного $\xi \in \mathbb{R}^n$ $\lim_{r\to\infty} F_r(\xi) = 0$, то на підставі теореми Лебега про мажорантну збіжність

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n} F_r(\xi)\,d\xi = 0.$$

Звідси з урахуванням (6.14) одержуємо (6.13) для $j = 2$.

Рівність (6.13) для $j = 1$ випливає із співвідношення (5.15) для $s = 1$, оскільки $K_1^{(r)} = J_1^{(h)}|_{h=1/\nu(r)}$.

Розглянемо випадок $p = 1$. З умови $(6.1_1)$ випливає, що послідовність (6.4) обмежена в просторі $L_1(\mathbb{R}^n)$. Цей простір не є спряженим до жодного іншого банахового простору, але він вкладається в простір $M(\mathbb{R}^n)$ всіх узагальнених мір $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$, які мають скінченну повну варіацію $|\mu|(\mathbb{R}^n)$. Якщо для $\mu$ ввести норму за формулою $\|\mu\| := |\mu|(\mathbb{R}^n)$, то $M(\mathbb{R}^n)$ стає банаховим простором. Цей простір ізометричний простору, спряженому до простору $C_0(\mathbb{R}^n)$ усіх комплекснозначних неперервних функцій на $\mathbb{R}^n$, які прямують до нуля на нескінченності, з рівномірною нормою. З обмеженості в $L_1(\mathbb{R}^n)$ послідовності (6.4) випливає обмеженість відповідної послідовності узагальнених мір в $M(\mathbb{R}^n)$ і, звідси, слабка компактність останньої. Тому існують такі підпослідовність (6.5) та узагальнена міра $\mu \in M^{\vec{a}}$, що для будь-якої функції $\psi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ справджується рівність

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(\xi)} \Phi_{-1}(1/\nu(r),\xi) v(1/\nu(r),\xi)\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{\psi(\xi)} \Phi_{-1}(0,\xi) d\mu(\xi). \quad (6.15)$$

З оцінки (6.9) випливає, що функція (6.8) належить до простору $C_0(\mathbb{R}^n)$ для будь-якої фіксованої точки $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$. Тому на підставі (6.15) одержуємо, що

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi) \Phi_{-1}(1/\nu(r),\xi) \Phi_1(0,\xi) v(1/\nu(r),\xi)\, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\, d\mu(\xi). \quad (6.16)$$

Подальші міркування такі самі, як у випадку $p > 1$. За допомогою формули (6.11) записуємо рівність

$$u(t,x) - \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\, d\mu(\xi) = K_1^{(r)} + K_2^{(r)} + \tilde{K}_3^{(r)}, \quad (6.17)$$

де $K_1^{(r)}$ і $K_2^{(r)}$ ті самі, що й в (6.12), а

$$\tilde{K}_3^{(r)} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi) \Phi_{-1}(1/\nu(r),\xi) \Phi_1(0,\xi) v(1/\nu(r),\xi)\, d\xi - \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\, d\mu(\xi).$$

Враховуючи рівності (6.13) для $j \in \{1,2\}$ і те, що на підставі (6.16) $\lim_{r\to\infty} \tilde{K}_3^{(r)} = 0$, з (6.17) випливає потрібне зображення (6.3).

Отже, доведено існування функції $\varphi \in L_p^{\vec{a}}$ при $p \in (1,\infty]$ та узагальненої міри $\mu \in M^{\vec{a}}$ при $p = 1$ таких, що заданий розв'язок $v$, який задовольняє умову ($6.1_p$), є інтегралом Пуассона відповідно функції $\varphi$ або узагальненої міри $\mu$. Єдиність $\varphi$ і $\mu$ випливає з теореми 2.1. $\square$

## Література


[1] S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei, *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type* // Operator Theory: Adv. and Appl., **152** (2004), 390 p.

[2] E. Lanconelli, S. Polidoro, *On a class hypoelliptic evolution operators* // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **52** (1994), N 1, 29–63.

[3] S. Polidoro, *On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov–Fokker–Planck type* // Le Matematiche, **49** (1994), N 1, 53–105.

[4] S. Polidoro, *Uniqueness and representation theorems for solutions of Kolmogorov–Fokker–Planck equations* // Rend. Mat. Appl., (7) **15** (1995), N 4, 535–560.

[5] S. Polidoro, *A global lower bound for the fundamental solution of Kolmogorov–Fokker–Planck equations* // Arch. Rational Mech. Anal., **137** (1997), N 4, 321–340.

[6] S. Polidoro, M. A. Ragusa, *Sobolev–Morrey spaces related to an ultraparabolic equation* // Manuscripta Math., **96** (1998), 371–392.

[7] M. Manfredini, S. Polidoro, *Interior regularity for weak solutions of ultraparabolic equations in divergence form with discontinuous coefficients* // Boll. Un. Mat. Ital., (8) **1-B** (1998), 651–675.

[8] M. A. Ragusa, *On weak solutions of ultraparabolic equations* // Nonlinear Analysis, **47** (2001), 503–511.

[9] G. Citti, F. Pascucci, S. Polidoro, *On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equations arising in mathematical finance* // Differential and Integral Equations, **14** (2001), N 6, 701–738.

[10] S. Polidoro, *On the regularity of solutions to a nonlinear ultraparabolic equation arising in mathematical finance* // Proceedings of the III-rd World Congress of Nonlinear Analysis. Nonlinear Analysis: Series A Theory, Methods and Applications, 47/1 (2001), 491–502.

[11] S. Polidoro, M. A. Ragusa, *Hölder regularity for solutions of an ultraparabolic equations in divergence form* // Potential Analysis, **14** (2001), 341–350.

[12] A. Pascucci, S. Polidoro, *A Gaussian upper bound for the fundamental solutions of a class of ultraparabolic equations* // J. Math. Anal. Appl., **282** (2003), N 1, 396–409.

[13] A. Pascucci, *Helder regularity for a Kolmogorov equation* // Trans. Amer. Math. Soc., **355** (2003), 901–924.

[14] A. Pascucci, S. Polidoro, *The Moser's iterative method for a class of ultraparabolic equations* // Commun. Contemp. Math., **6** (2004), N 3, 395–417.

[15] M. Di Francesco, A. Pascucci, *On the complete model with stochastic volatility by Hobson and Rogers* // Proc. R. Soc. Lond. A., **460** (2004), 3327–3338.

[16] A. Pascucci, *Kolmogorov equations in physics and in finance* // Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Basel: Birkhäuser, **63** (2005), 313–324.

[17] M. Di Francesco, A. Pascucci, *On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type* // AMRX Appl. Math. Res. Express, (2005), N 3, 77–116.

[18] M. Di Francesco, S. Polidoro, *Schauder estimates, Harnack inequality and Gaussian lower bound for Kolmogorov type operators in non-divergence form* // Advances in Differential Equations, **11** (2006), 1261–1320.

[19] M. Di Francesco, P. Foschi, A. Pascucci, *Analysis of an uncertain volatility model* // Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences (2006), Article ID 15609, 17 p.

[20] P. Foschi, A. Pascucci, *Kolmogorov equations arising in finance: direct and inverse problems* // Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica. Università degli Studi della Basilicata, **VI** (2007), 145–156.

[21] M. Di Francesco, A. Pascucci, *A continuous dependence result for ultraparabolic equations in option pricing* // J. Math. Anal. Appl., **336** (2007), 1026–1041.

[22] С. Д. Івасишен, В. В. Лаюк, *Задача Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова* // Мат. методи та фіз.-мех. поля, **50** (2007), N 3, 56–65.

## Відомості про авторів

**Степан Дмитрович Івасишен**
Національний технічний
університет України
"Київський політехнічний інститут",
пр. Перемоги, 37,
03056 Київ,
Україна
*E-Mail:* ivasyshen_sd@mail.ru

**Василь Васильович Лаюк**
Чернівецька філія Інституту
прикладних проблем механіки
і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України,
вул. Головна, 28, кв. 2,
58000 Чернівці,
Україна
*E-Mail:* vlayuk@gmail.com