Український математичний вісник
Том 6 **(2009)**, № 2, 139 – 149

Описание автоморфизмов единичного операторного шара

Томас Азизов, Виктор Хацкевич, Валерий Сендеров

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Аннотация. Описаны автоморфизмы операторного шара радиуса 1 и их связь с унитарными операторами в пространствах с J_ν-метрикой при $\nu \neq 2$.

2000 MSC. 47B50.

Ключевые слова и фразы. Индефинитная метрика, дробно-линейное преобразование, автоморфизм операторного шара.

1. Введение

Пусть $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ — нетривиальные комплексные банаховы пространства, $\mathcal{K}$ — единичный открытый шар пространства $\mathcal{L}(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$ всех ограниченных линейных операторов, действующих из $\mathfrak{L}_1$ в $\mathfrak{L}_2$. Если $T_{ij} \in \mathcal{L}(\mathfrak{L}_j, \mathfrak{L}_i)$, $i, j = 1, 2$, то $T = \|T_{ij}\|_{i,j=1,2}$ — ограниченный линейный оператор, действующий в пространстве

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \dot{+} \mathfrak{L}_2 \text{ —}$$

топологической прямой сумме пространств $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$. Всюду ниже $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ — соответствующие этому разложению $\mathfrak{L}$ проекторы: $\mathfrak{L}_i = \mathcal{P}_i \mathfrak{L}$, где $i = 1, 2$, $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = I$. Если T_{11} обратим и $\|T_{11}^{-1} T_{12}\| \leq 1$, то оператор T порождает дробно-линейное отображение (д.л.о.) $\mathcal{F}_T : \mathcal{K} \to \mathcal{L}(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2)$ по формуле

$$\mathcal{F}_T(K) = (T_{21} + T_{22}K)(T_{11} + T_{12}K)^{-1}, \tag{1.1}$$

где $K \in \mathcal{K}$.

Ясно, что $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_{\lambda T}$ для любого $\lambda \neq 0$. Известно [1, 2], что справедливо и обратное. Именно, если хотя бы одно из д.л.о. $\mathcal{F}_A$ и $\mathcal{F}_B$

Статья поступила в редакцию 5.01.2009
Работа Т. Азизова поддержана грантом РФФИ 08-01-00566-а.

ISSN 1810 – 3200.

отлично от константы и в некоторой окрестности нуля $\mathcal{F}_A$ и $\mathcal{F}_B$ совпадают, то $A = \lambda B$, где $\lambda \neq 0$.

Положим

$$\mathfrak{p}_+ = \{x \in \mathfrak{L} : x = x_+ + x_-, x_+ \in \mathfrak{L}_1, x_- \in \mathfrak{L}_2, \|x_+\| \geq \|x_-\|\},$$

$$\mathfrak{p}_{++} = \{x \in \mathfrak{L} : x = x_+ + x_-, x_+ \in \mathfrak{L}_1, x_- \in \mathfrak{L}_2, \|x_+\| > \|x_-\|\}.$$

Д.л.о. $\mathcal{F}_T$ отображает $\mathcal{K}$ в $\overline{\mathcal{K}}$ в точности тогда, когда

$$T\mathfrak{p}_+ \subseteq \mathfrak{p}_+. \tag{1.2}$$

Линейные операторы со свойством (1.2) называются [3,4] плюс-операторами.

Зададим на $\mathfrak{L}$ функцию $\mathfrak{J}_\nu(x)$ ("$\mathfrak{J}_\nu$-метрику") формулой

$$\mathfrak{J}_\nu(x) = \|x_+\|^\nu - \|x_-\|^\nu,$$

где $x = x_+ + x_-$, $x_+ \in \mathfrak{L}_1$, $x_- \in \mathfrak{L}_2$, $\nu > 0$.

Ниже нам понадобятся некоторые геометрические определения и обозначения. Обозначим через $\mathfrak{M}_+(\mathfrak{M}_-)$ множество подпространств $\mathcal{L}_\pm = \{x_\pm + K_\pm x_\pm\})$, где $x_\pm$ пробегает все $\mathfrak{L}_{1,2}$, а $K_\pm$ — сжатие, действующее из $\mathfrak{L}_{1,2}$ в $\mathfrak{L}_{2,1}$. Операторы $K_\pm$ называются угловыми операторами подпространств $\mathcal{L}_\pm$. Аналогично определяются угловые операторы любых семидефинитных линеалов $M_\pm$; в этом случае угловой оператор $K_\pm$ определен на $\mathcal{P}_\pm M_\pm \subseteq \mathfrak{L}_{1,2}$.

Определение 1.1. *Будем говорить, что линеалы $\mathcal{L}$ и M пространства $\mathfrak{L}$ $\mathfrak{J}_\nu$-ортогональны, если $\mathfrak{J}_\nu(x+y) = \mathfrak{J}_\nu(x) + \mathfrak{J}_\nu(y)$ при $x \in \mathcal{L}$, $y \in M$.*

Оператор V называется $\mathfrak{J}_\nu$-унитарным, если $V\mathfrak{L} = \mathfrak{L}$ и $\mathfrak{J}_\nu(Vx) = \mathfrak{J}_\nu(x)$ для всех $x \in \mathfrak{L}$. Очевидно, $\mathfrak{J}_\nu$-унитарный оператор является плюс-оператором. Кроме того, $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}_+$ влечет $V\mathcal{L} \dotplus V\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}$. Отсюда $V\mathcal{L} \in \mathfrak{M}_+$ [4].

Таким образом, всякий $\mathfrak{J}_\nu$-унитарный оператор $V = T$ порождает по формуле (1.1) автоморфное д.л.о. шара $\mathcal{K}$. В настоящей статье нас, в частности, будет интересовать обратная задача: какие именно дробно-линейные автоморфизмы порождаются $\mathfrak{J}_\nu$-унитарными операторами?

Ответ оказывается различным при различных ν.

2. Случай гильбертова пространства

Рассмотрим пространство $\mathrm{Aut}(\mathcal{K})$ всех автоморфизмов шара $\mathcal{K}$. Через $\mathrm{Aut}(\mathcal{K}, I)$ обозначим связную компоненту тождественного автоморфизма I, а через $\mathcal{LF}\,\mathrm{Aut}(\mathcal{K})$ — множество всех дробно-линейных автоморфизмов шара $\mathcal{K}$.

В работе М. Г. Крейна и Ю. Л. Шмульяна [3] установлено, что всякое $\mathcal{F}_T \in \mathcal{LF}\,\mathrm{Aut}(\mathcal{K})$ порождается $\mathfrak{J}_2$-унитарным оператором $V = \alpha T$, описываемым тремя параметрами: Γ, V_1 и V_2 (см. ниже формулу (2.1)).

Ниже нами устанавливается теорема 2.1, включающая при $\nu = 2$ вышеупомянутые результаты М. Г. Крейна и Ю. Л. Шмульяна; с помощью результата [3] она дает полное описание компоненты $\mathrm{Aut}(\mathcal{K}, I)$. При $\nu \neq 2$ теорема 2.1 дает описание множества порожденных $\mathfrak{J}_\nu$-унитарными операторами автоморфизмов $\mathcal{K}$. Именно, это множество совпадает с множеством всех линейных автоморфизмов $\mathrm{Lin}\,\mathrm{Aut}(\mathcal{K})$.

Теорема 2.1. a) *Всякое автоморфное д.л.о вида* (1.1) *шара* $\mathcal{K}$ *порождается* $\mathfrak{J}_2$*-унитарным оператором* $V = \alpha T$*, определяемым тремя параметрами:* $\Gamma \in \mathcal{K}$ *и операторами* V_1 *и* V_2*, унитарными в* $\mathfrak{L}_1$ *и* $\mathfrak{L}_2$ *соответственно, с помощью равенства*

$$V = \begin{pmatrix} (I - \Gamma^*\Gamma)^{-\frac{1}{2}} V_1 & \Gamma^*(I - \Gamma\Gamma^*)^{-\frac{1}{2}} V_2 \\ \Gamma(I - \Gamma^*\Gamma)^{-\frac{1}{2}} V_1 & (I - \Gamma\Gamma^*)^{-\frac{1}{2}} V_2 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

b) *Пусть теперь* $\nu \neq 2$*. Тогда автоморфное д.л.о. вида* (1.1) *шара* $\mathcal{K}$ *порождается* $\mathfrak{J}_\nu$*-унитарным оператором в точности если*

$$\mathcal{F}_T(K) = T_{22} K T_{11}^{-1}. \tag{2.2}$$

c) *Множество автоморфизмов пункта* b) *совпадает с* $\mathrm{Lin}\,\mathrm{Aut}(\mathcal{K})$.

Доказательство. a) Очевидно, оператор T отображает $\mathfrak{p}_{++}$ в себя. Из автоморфности д.л.о. $\mathcal{F}_T$ следует сюръективность, а также, вследствие [6, теорема 3.1], — инъективность отображения T: $\mathfrak{p}_{++} \to \mathfrak{p}_{++}$. Следовательно, отображение T: $\mathfrak{p}_{++} \to \mathfrak{p}_{++}$ — биекция; отсюда T — коллинеарный $\mathfrak{J}_2$-унитарному оператор [3]. Для завершения доказательства осталось воспользоваться [7, теорема 2.5.10] и [7, следствие 2.5.11].

Как отмечалось выше, формула (2.1) получена в [3].

b) Доказательству предпошлем вспомогательные предложения.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{L}$ — гильбертово $\mathfrak{I}_\nu$-пространство; $\nu \neq 2$; $\{\lambda x\}\,(\not\subseteq \mathfrak{L}_1)$ — положительный линеал; неположительный линеал $\mathcal{L}$, $\mathcal{L} \neq \{0\}$, $\mathfrak{I}_\nu$-ортогонален $\{\lambda x\}$. Тогда*

1) $(x_+, y_+) = (x_-, y_-) = 0$, *где* $x = x_+ + x_-$, $y = y_+ + y_- \in \mathcal{L}$;

2) *линеал* $\mathcal{L}$ *отрицателен;*

3) $\nu = 4$;

4) *угловые операторы линеалов* $\{\lambda x\}$ *и* $\mathcal{L}$ *имеют одинаковые нормы.*

Доказательство. Полагая $\lambda \geq 0$, $\|x_+\| = \|y_-\| = 1$, запишем условие $\mathfrak{I}_\nu$-ортогональности векторов λx и y в следующем виде:

$$(\lambda^2 + b\lambda + c)^{\frac{\nu}{2}} - (d\lambda^2 + e\lambda + 1)^{\frac{\nu}{2}} = f\lambda^\nu + g,$$

где $b = 2\,\mathrm{Re}(x_+, y_+)$, $c = (y_+, y_+)$, $d = (x_-, x_-)$, $e = 2\,\mathrm{Re}(x_-, y_-)$, $f = \mathfrak{I}_\nu(x)$, $g = \mathfrak{I}_\nu(y)$.

Докажем, что ν — целое. При $c > 0$ слева стоит функция вещественного переменного $\lambda \in [0, \infty)$, аналитическая в нуле, т.е. разлагающаяся в ряд Тейлора, а потому и функция справа должна быть аналитической в нуле, что влечет $\nu \in \mathbb{N}$. Если $c = 0$, т.е. $y_+ = 0$, то $b = 0$, $-(d\lambda^2 + e\lambda + 1)^{\frac{\nu}{2}} = (f-1)\lambda^\nu + g$. При $f = 1$ имеем $x_- = 0$; при $f - 1 \neq 0$ рассуждаем, как выше.

Пусть ν нечетно. Т.к. $f\lambda^\nu + g \equiv 0$, то $\lambda^2 + b\lambda + c$ и $d\lambda^2 + e\lambda + 1$ — точные квадраты. Значит, $\mathrm{Re}^2(x_+, y_+) = \|y_+\|^2$, $\mathrm{Re}^2(x_-, y_-) = \|x_-\|^2$. Аналогично $\mathrm{Im}^2(x_+, y_+) = \|y_+\|^2$, $2\|y_+\|^2 = |(x_+, y_+)|^2 \leq \|y_+\|^2$, $y_+ = 0$; аналогично $x_- = 0$.

Таким образом, мы пришли к равенству

$$\begin{aligned} &(\lambda^2 + b\lambda + c)^m - (d\lambda^2 + e\lambda + 1)^m = f\lambda^{2m} + g, \\ &\text{где} \quad m \in N\backslash\{1\}, \quad 0 \leq c \leq 1, \quad 0 < d < 1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Вычисляя коэффициенты при λ и λ^{2m-1} в левой части, получаем: $e = bc^{m-1}$, $b = d^{m-1}e$. Отсюда $|e| \leq |b| \leq |e|$, $|e| = |b|$. Если это число не 0, то $d^{m-1} = 1$, $d = 1$ — вопреки (2.3). Значит, $e = b = 0$. Получили $\mathrm{Re}(x_+, y_+) = \mathrm{Re}(x_-, y_-) = 0$; заменяя x_+ на ix_+, x_- на ix_-, получаем $\mathrm{Im}(x_+, y_+) = \mathrm{Im}(x_-, y_-) = 0$. Следовательно, $(y_+, x_+) = (x_-, y_-) = 0$. Утверждение 1) доказано.

Докажем 2), или $c \neq 1$. При $c = 1$ равенство $c^{m-1} = d$ давало бы $d = 1$. Утверждение 2) также доказано.

Докажем 3). Пусть $\nu > 4$, или $m > 2$. Тогда равенство (2.3) дает $c^{m-1} = d$, $c^{m-2} = d^2$. Отсюда $d = 0$ либо $d = 1$. Противоречие.

Докажем 4). Таким образом, $m = 2$, $c = d$, т.е. $(y_+, y_+) = (x_-, x_-)$. Утверждение 4) доказано. $\square$

Доказанная лемма позволяет в случае $\nu \neq 2$ полностью описать пары $(\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ нетривиальных $\mathfrak{J}_\nu$-ортогональных дефинитных линеалов разных знаков.

Предложение 2.1. *Пусть $\mathfrak{L}$ — гильбертово $\mathfrak{J}_\nu$-пространство, где $\nu \neq 2$; $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ — положительный и отрицательный соответственно нетривиальные $\mathfrak{J}_\nu$-ортогональные линеалы. Тогда в случае $\nu \neq 4$ имеем $\mathcal{L}_\pm \subseteq \mathfrak{L}_{1,2}$. Пусть $\nu = 4$, K_+ и K_- — угловые операторы линеалов $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ соответственно. Тогда либо $\mathcal{L}_\pm \subseteq \mathfrak{L}_{1,2}$, либо*

1) $(x_+, y_+) = (x_-, y_-) = 0$ *при* $x = x_+ + x_- \in \mathcal{L}_+$, $y = y_+ + y_- \in \mathcal{L}_-$;

2) $K_+ = \alpha\mathcal{U}_+$, $K_- = \alpha\mathcal{U}_-$, *где* $0 < \alpha < 1$, $\mathcal{U}_+$ *и* $\mathcal{U}_-$ *— некоторые изометрии.*

Доказательство. Достаточно доказать 2). Пусть $\mathcal{L}_+ \not\subseteq \mathfrak{L}_1$, $x = x_+ + x_- \in \mathcal{L}_+ \backslash \mathfrak{L}_1$, $\alpha = \frac{\|x_-\|}{\|x_+\|}$, $y = y_+ + y_- \in \mathcal{L}_- \backslash \{0\}$. Из леммы 2.1 следует, что $\frac{\|y_+\|}{\|y_-\|} = \alpha$. Пусть теперь $z = z_+ + z_- \in \mathcal{L}_+ \backslash \{0\}$. Рассуждая аналогично, получаем $\frac{\|z_-\|}{\|z_+\|} = \frac{\|y_+\|}{\|y_-\|} = \alpha$. Предложение доказано. $\square$

Следствие 2.1. *Пусть $\mathfrak{L}$ — гильбертово $\mathfrak{J}_\nu$-пространство, где $\nu \neq 2$; $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ — линеалы, удовлетворяющие условиям предложения* 2.1. *Тогда если* $\dim \mathfrak{L} \leq 3$, *то* $\mathcal{L}_\pm \subseteq \mathfrak{L}_{1,2}$.

Замечание 2.1. Некоторое усложнение рассуждений предложения 2.1 приводит к полному описанию при $\nu \neq 2$ всех пар нетривиальных $\mathfrak{J}_\nu$-ортогональных семидефинитных линеалов разных знаков. Именно, помимо описываемых конструкциями предложения 2.1, при любом $\nu > 0$, $\nu \neq 2$ существует ровно два типа таких пар. Пара первого типа получается произвольным разложением $\mathcal{L} = \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-$ нетривиального нейтрального линеала $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}_\pm \neq \{0\}$). Пара второго типа получается следующим образом. В $\mathfrak{L}_1$ или в $\mathfrak{L}_2$ (например, в $\mathfrak{L}_1$) рассмотрим нетривиальные "ν-ортогональные" линеалы $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{M}$ ($\|y + z\|^\nu = \|y\|^\nu + \|z\|^\nu$ при $y \in \mathcal{L}_+$, $z \in \mathcal{M}$). Линеалы $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_- = \{x + Kx\}$, где $x \in \mathcal{M}$, K — некоторая изометрия из $\mathcal{M}$ в $\mathfrak{L}_2$, образуют искомую пару.

Предложение 2.2. *Пусть $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \dotplus \mathfrak{L}_2$ — гильбертово $\mathfrak{J}_\nu$-пространство, $\nu \neq 2$, V — $\mathfrak{J}_\nu$-унитарный оператор. Тогда $V\mathfrak{L}_i = \mathfrak{L}_i$, где* $i = 1, 2$.

Доказательство. Известно [4], что $V\mathfrak{L}_2 \in \mathfrak{M}_-$. Пусть $\mathcal{P}_2 V x_+ \neq 0$ $(x_+ \in \mathfrak{L}_1)$. Рассмотрим вектор $y_- \in \mathfrak{L}_2$ такой, что $\mathcal{P}_2 V y_- = \mathcal{P}_2 V x_+$.

Имеем $\dim$ л.о. $\{\mathcal{P}_1 V x_+, \mathcal{P}_1 V y_-, \mathcal{P}_2 V x_+\} \le 3$. Линеалы $\{\lambda V x_+\}$ и $\{\lambda V y_-\}$ в нем $\mathfrak{J}_\nu$-ортогональны — в противоречии со следствием 2.1. Следовательно, $V\mathfrak{L}_i \subseteq \mathfrak{L}_i$ $(i = 1, 2)$. □

Замечание 2.2. Гильбертовость $\mathfrak{L}_2$ в доказательстве не использована.

Приступим теперь к доказательству второй части теоремы 2.1 (утверждения b)). Если V – $\mathfrak{J}_\nu$-унитарный оператор, где $\nu \neq 2$, то из Предложения 6 следует равенство $\mathcal{F}_V(K) = V_{22} K V_{11}^{-1}$, где $K \in \mathcal{K}$. Обратно, пусть (2.2) — автоморфизм шара $\mathcal{K}$, $\|T_{11}\| = 1$. Нетрудно показать непосредственно, что T_{11} и T_{22} — унитарные операторы (это сразу следует также из вытекающей из a) $\mathfrak{J}_2$-унитарности оператора T), — откуда сразу следует завершение доказательства пункта b).

Докажем c). Пусть $\mathcal{F}_T \in \mathrm{Lin\,Aut}(\mathcal{K})$, т.е. $T_{12} = 0$. Согласно a) оператор T коллинеарен $\mathfrak{J}_2$-унитарному. Значит, $T_{12} = 0$ влечет $T_{21} = 0$, и справедливо равенство (2.2).

Теорема 2.1 доказана. □

Замечание 2.3. Известно [5], что всякий биголоморфный автоморфизм шара $\mathcal{K}$ является д.л.о. вида (1.1). Это позволяет уточнить первое утверждение теоремы 2.1 следующим образом.

Всякий биголоморфный автоморфизм шара $\mathcal{K}$ есть д.л.о. вида (1.1). Это д.л.о. порождается $\mathfrak{J}_2$-унитарным оператором $V = \alpha T$, определяемым тремя параметрами: $\Gamma \in \mathcal{K}$ и операторами V_1 и V_2, унитарными в $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ соответственно, с помощью равенства

$$V = \begin{pmatrix} (I - \Gamma^*\Gamma)^{-\frac{1}{2}} V_1 & \Gamma^*(I - \Gamma\Gamma^*)^{-\frac{1}{2}} V_2 \\ \Gamma(I - \Gamma^*\Gamma)^{-\frac{1}{2}} V_1 & (I - \Gamma\Gamma^*)^{-\frac{1}{2}} V_2 \end{pmatrix}.$$

3. Общий случай банаховых пространств

В случае банаховых пространств аналоги многих предложений предыдущего раздела могут быть получены при дополнительном естественном ограничении на один из “уголков” V_{ij} $\mathfrak{J}_\nu$-унитарного оператора V.

Лемма 3.1. *Пусть* $\dim \mathfrak{L}_1 = \dim \mathfrak{L}_2 = 1$, $\nu \neq 2$, $\mathfrak{J}_\nu(x_+ + x_-) > 0$, $\mathfrak{J}_\nu(y_+ + y_-) < 0$, $\mathfrak{J}_\nu(\lambda(x_+ + x_-) + \mu(y_+ + y_-)) = \mathfrak{J}_\nu(\lambda(x_+ + x_-)) + \mathfrak{J}_\nu(\mu(y_+ + y_-))$ *при всех* λ, μ. *Тогда* $x_- = y_+ = 0$.

Доказательство в силу одномерности пространств $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ сразу вытекает из следствия 2.1.

Теорема 3.1. *Пусть $V - \mathfrak{J}_\nu$-унитарный оператор, $\nu \neq 2$ и хотя бы один из элементов матрицы $(V_{ij})_{i,j=1}^2$ конечномерен. Тогда $V_{12} = 0$ и $V_{21} = 0$.*

Доказательство. Поскольку $\operatorname{Ker} V_{11} = \{0\}$ и $\operatorname{Ker} V_{22} = \{0\}$, то конечномерность хотя бы одного из операторов V_{11} и V_{22} влечет $\min\{\dim \mathfrak{L}_1, \dim \mathfrak{L}_2\} < \infty$. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что конечномерным является хотя бы один из операторов V_{12} и V_{21}. Рассмотрим подпространства $L_+ = V\mathfrak{L}_1$ и $L_- = V\mathfrak{L}_2$. Эти подпространства принадлежат $\mathfrak{M}_+$ и $\mathfrak{M}_-$ соответственно [4], и их угловыми операторами являются операторы $K_+ = V_{21}(V_{11})^{-1}$ и $K_- = V_{12}(V_{22})^{-1}$ соответственно. Следовательно, оператор K_- конечномерен. Рассмотрим два конечномерных оператора K_+K_- и K_-K_+, действующих в $\mathfrak{L}_-$ и $\mathfrak{L}_+$ соответственно.

Пусть $\lambda_0 \in \sigma_p\ (K_-K_+)$. Если $\lambda_0 \neq 0$, то рассмотрим вектор $x_+ \in \mathfrak{L}_+ \backslash \{0\}$: $K_-K_+x_+ = \lambda_0 x_+$. Вектор $x = x_+ + K_+x_+$ принадлежит L_+, а вектор $y = K_+x_+ + K_-K_+x_+$ принадлежит L_-. Имеем $\mathfrak{J}_\nu(\lambda x + \mu y) = \mathfrak{J}_\nu(\lambda x) + \mathfrak{J}_\nu(\mu y)$ при всех λ и μ. Поскольку л.о. $\{x, y\} =$ л.о. $(x_+, K_+x_+\}$, то в силу леммы 3.1 получаем: $x \in \mathfrak{L}_+$, т.е. $K_+x_1 = 0$, что противоречит предположению $\lambda_0 \neq 0$.

Пусть $\lambda_0 = 0$. Если $\operatorname{Ker} K_+K_- \neq \operatorname{Ker} K_-$ или $\operatorname{Ker} K_-K_+ \neq \operatorname{Ker} K_+$, то поступим следующим образом. (Для определенности будем считать, что $\operatorname{Ker} K_-K_+ \neq \operatorname{Ker} K_+$.) Возьмем $x_+ \in \operatorname{Ker} K_-K_+ \backslash \operatorname{Ker} K_+$ и рассмотрим л.о. $\{x_+, K_+x_+\}$. Поскольку $x = x_+ + K_+x_+ \in L_+$, а $y = K_+x_+ + K_-K_+x_+ \in L_-$, то, опять применив лемму 3.1, получим $K_+x_+ = 0$, что противоречит предположению.

Остается одна возможность: $\operatorname{Ker} K_+K_- = \operatorname{Ker} K_-$ и $\operatorname{Ker} K_-K_+ = \operatorname{Ker} K_+$. Рассмотрим подпространства $K_-K_+\mathfrak{L}_1$ и $K_+K_-\mathfrak{L}_2$. Если $K_-K_+\mathfrak{L}_1 = \{0\}$, $K_+K_-\mathfrak{L}_2 = \{0\}$, то $K_+ = K_- = 0$, и теорема доказана. Пусть $\dim K_-K_+\mathfrak{L}_1 \geq 1$. Так как у конечномерного оператора $K_-K_+\big|_{K_-K_+\mathfrak{L}_1}$ нет собственных значений $\lambda \neq 0$, то существует $y_+ \neq 0$ такой, что при некотором x_+ имеем $y_+ = K_-K_+x_+$ и $K_-K_+y_+ = 0$. Отсюда $K_+y_+ = 0$, т.е. $K_+(K_-K_+x_+) = K_+K_-(K_+x_+) = 0$. Следовательно, $0 = K_-K_+x_+ = y_+$. Противоречие. Теорема доказана. $\square$

С помощью теоремы 3.1 доказывается следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Пусть $\mathfrak{L} - \mathfrak{J}_\nu$-пространство, $\nu \neq 2$. Тогда автоморфное д.л.о. $\mathcal{F}_A$ шара $\mathcal{K}$ порождается $\mathfrak{J}_\nu$-унитарным оператором V, хотя бы один из элементов матрицы $(V_{ij})_{i,j=1}^2$ которого конечномерен, в точности если $\mathcal{F}_A(K) = A_{22}KA_{11}^{-1}$.*

Теорема 3.1 позволяет полностью описать структуру $\mathfrak{J}_\nu$-унитарных операторов, где $\nu \neq 2$, в конечномерных пространствах.

Предложение 3.2. *В конечномерном нормированном пространстве любой унитарный оператор диагонализуем.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует нетривиальная жорданова цепочка a, b, $\ldots$. Рассмотрим матрицу сужения оператора на л.о. первых двух ее векторов: $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)$. Поскольку $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{smallmatrix}\right)^n = \left(\begin{smallmatrix}\alpha^n & n\alpha^{n-1}\\ 0 & \alpha^n\end{smallmatrix}\right)$, то $V^n b = n\alpha^{n-1}a + \alpha^n b$. Поскольку $|\alpha| = 1$, то вследствие неравенства треугольника получаем: $\|V^n b\| \to \infty$ при $n \to \infty$. Противоречие с унитарностью V. $\square$

Предложение 3.2 можно также получить с помощью теоремы о подобии устойчивых операторов в гильбертовом пространстве унитарным [8, 9].

Замечание 3.1. В сепарабельном бесконечномерном гильбертовом пространстве существует унитарный оператор, не имеющий собственных векторов. Этим свойством обладает, как известно, т.н. оператор двустороннего сдвига.

Из теоремы 3.1 и предложения 3.2 следует

Теорема 3.2. *В конечномерном нормированном пространстве любой $\mathfrak{J}_\nu$-унитарный оператор, где $\nu \neq 2$, диагонализуем.*

С другой стороны, нетрудно показать, что в любом гильбертовом пространстве существуют недиагонализуемые $\mathfrak{J}_2$-унитарные операторы. В самом деле, уже в двумерном случае $\mathfrak{J}_2$-унитарный оператор, заданный в естественном базисе матрицей $\left(\begin{smallmatrix}1+i & 1\\ 1 & 1-i\end{smallmatrix}\right)$, не является диагонализуемым.

Заметим, что в случае вещественного гильбертова пространства $\mathfrak{L}$ недиагонализуемые $\mathfrak{J}_2$-унитарные операторы существуют в точности при $\dim \mathfrak{L} > 2$.

Покажем это. При $\dim \mathfrak{L} > 2$ достаточно выбрать в $\mathfrak{L}_1$ или в $\mathfrak{L}_2$ двумерное пространство $\mathcal{L}$ и рассмотреть $\mathfrak{J}_2$-унитарный оператор V: $V\mathcal{L} = \mathcal{L}$, сужение которого на $\mathcal{L}$ — оператор поворота на угол, не кратный π.

Пусть $\dim \mathfrak{L} = 2$. Тогда в естественном базисе матрица оператора V имеет вид $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \pm\beta & \pm\alpha\end{pmatrix}$, где $\alpha^2 - \beta^2 = 1$. Отсюда либо $\beta = 0$, либо матрица имеет два различных вещественных характеристических числа. В обоих случаях оператор диагонализуем.

4. Приложение к проблеме Кёнигса

Проблема вложения Кенигса (КЕ-проблема), возникшая в работах Г. Кенигса, П. Леви, Ж. Адамара в связи с решением различных прикладных задач, имеет более чем вековую историю. Общая формулировка этой проблемы такова. Пусть D — область комплексного банахова пространства, $f \in \mathrm{Hol}(D)$. Существует ли семейство $\{F(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathrm{Hol}(D)$, непрерывно (в топологии локально равномерной сходимости над D) зависящее от t и такое, что $F(0) = I$, $F(1) = f$, $F(s+t) = F(s) \circ F(t)$ при всех $s, t \geq 0$?

Если семейство $\{F(t)\}_{t\geq 0}$ существует, то говорят, что f обладает КЕ-свойством.

В последние годы появились новые работы, относящиеся к КЕ-проблеме и к ее приложениям. Так, в [10–12] рассматривался случай, когда D — единичный открытый шар пространства $\mathfrak{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, где $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — гильбертовы пространства, а $f = \mathcal{F}_T$ — преобразование D, порождаемое (плюс-) оператором T по формуле (1.1).

В некоторых статьях (см., например, [14]) подобные результаты обобщены на случай банаховых пространств.

В настоящей статье мы применяем полученные в предыдущих разделах результаты к проблеме Кёнигса для случая автоморфизмов $\mathcal{F}_T$, порождаемых $\mathfrak{J}_\nu$-унитарными операторами.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathfrak{L}$ — гильбертово $\mathfrak{J}_\nu$-пространство, где $\nu \neq 2$; T — $\mathfrak{J}_\nu$-унитарный оператор. Тогда д.л.о. $\mathcal{F}_T$ обладает КЕ-свойством. При этом существует объемлющая полугруппа, состоящая из порожденных $\mathfrak{J}_\nu$-унитарными операторами д.л.о. шара $\mathcal{K}$.*

Доказательство теоремы нетрудно вывести из предложения 2.2 с помощью теоремы о спектральном разложении унитарного оператора.

Покажем, что в случае банахова пространства $\mathfrak{L}$ теорема 4.1 теряет силу.

Пример 4.1. Пусть $\dim \mathfrak{L}_1 = 2$, $\dim \mathfrak{L}_2 = 1$; $\mathfrak{L}_1 = l_p$, где $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$; в естественном базисе пространства $\mathfrak{L}_1$ оператор A_{11} имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Пусть, далее, $A_{12} = 0$, $A_{21} = 0$, $A_{22} = I$. Докажем, что для $\mathcal{F}_A$ заключение теоремы 4.1 не имеет места. Предположим противное и рассмотрим $\mathcal{F}_{A(1)}$, где $A(1) = A$. Имеем

$$F_{A(1)} = F_{A\left(\frac{1}{2}\right)} \circ \mathcal{F}_{A\left(\frac{1}{2}\right)} = F_{A^2\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Значит, $A^2\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha A$, где $\alpha \neq 0$, $B = A\left(\frac{1}{2}\right)$ — $\mathfrak{J}_\nu$-унитарный оператор. Таким образом, $B_{11}^2 = \alpha A_{11}$, где B_{11} — унитарный оператор. Однако такого оператора B_{11} не существует. Это сразу следует из того, что в естественном базисе пространства $\mathfrak{L}_1$ любой унитарный оператор имеет вид $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{smallmatrix}\right)$ либо $\left(\begin{smallmatrix}0 & \alpha\\ \beta & 0\end{smallmatrix}\right)$ (где $|\alpha| = |\beta| = 1$). Последнее нетрудно показать с помощью леммы 3.1 и дробно-линейных операторных преобразований, введенных и изученных в [15, 16].

Таким образом, в случае банахова пространства $\mathfrak{L}$ для положительного решения проблемы Кёнигса необходимы дополнительные условия. Так, KE-свойство имеет место в случае существования и унитарности всех неотрицательных степеней операторов T_{11} и T_{22}.

Замечание 4.1. Некоторые предложения настоящей статьи были сформулированы (как правило, в иной форме и без доказательств) двумя из трех ее авторов в [17].

Литература

[1] В. С. Шульман, В. А. Хацкевич, В. А. Сендеров, *Об операторных матрицах, порождающих дробно-линейные отображения операторных шаров* // Функциональный анализ, Ульяновск (2003), вып. 38, 88–92.

[2] V. Khatskevich, V. Senderov, and V. Shulman, *On operator matrices generating linear fractional maps of operator balls* // Complex analysis and dynamical systems, Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, **364** (2004), 93–102.

[3] M. G. Krein and Yu. L. Shmulyan, *On Plus-Operators in a Space with an Indefinite Metric* // Matem. Issledovaniya, Kishinev, Akad. Nauk Mold. SSR, (1966), N 1, 131–161 (in Russ.).

[4] V. A. Senderov and V. A. Khatskevich, *On Normed J_ν-Spaces and Some Classes of Linear Operators in These Spaces* // Matem. Issledovaniya, Kishinev, Akad. Nauk Mold. SSR, **8** (1973), N 3, 56–75 (in Russ.).

[5] M. G. Krein, *A new application of the fix-point principle in the theory of linear operators in a space with an indefinite metric* // Doklady Akad. Nauk USSR, **154 (5)** (1964), 1026–1029 (Russ.); English transl.: Soviet Math. Doklady, **59** (1964), 224–227.

[6] V. Khatskevich and V. Senderov, *Basic properties of linear fractional mappings of operator balls: Schroeder's equation* // in: Fields Institute Communications, **25** (2000), 331–344.

[7] T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Foundations of the theory of linear operators in spaces with indefinite metric*, Moscow, Nauka, 1986 (Russ.); English transl.: Linear operators in spaces with an indefinite metric, John Wiley & Sons. London, 1989.

[8] Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, М.: ИЛ, 1954. [Riesz F., Sz.-Nagy B., 1952.]

[9] Б. Секельфальви-Надь и Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, М.: Мир, 1970.

[10] V. Khatskevich, S. Reich, D. Shoikhet, *Schroeder's functional equation and the Koenigs embedding property* // Nonlin. Anal. **47** (2001), 3977–3988.

[11] V. Khatskevich, S. Reich, D. Shoikhet, *Abel–Schroeder equations for linear fractional mappings and the Koenigs embedding problem* // Acta sci.math. (Szeged). **69** (2003), 67–98.

[12] В. Хацкевич, В. Сендеров, *Проблема Кенигса для дробно-линейных отображений* // ДАН. **403** (2005), N 5, 607–609.

[13] M. Elin and V. Khatskevich, *The Koenigs Embedding Problem for Operator Affine Mappings* // Contemporary Math., **382** (2005), 113–120.

[14] M. Elin and V. Khatskevich, *Triangular plus-operators in Banach spaces: applications to the Koenigs embedding problem* // Journal of Nonlinear and Convex Analysis, **6** (2005), N 1, 173–185.

[15] И. С. Иохвидов, *Об одном классе дробно-линейных операторных преобразований* // Тр. матем. ф-та ВГУ, Воронеж, **18–44** (1970).

[16] Е. И. Иохвидов и В. А. Сендеров, *Дробно-линейные операторные преобразования и некоторые их приложения*, Тр. НИИМ ВГУ, Воронеж, (1972), вып. 5, 52–58.

[17] Т. Я. Азизов и В. А. Сендеров, *О структуре и спектре $\mathfrak{J}_\nu$-унитарных операторов некоторых классов* // Тр. НИИМ ВГУ, Воронеж, (1973), вып. 11, 3–9.

Сведения об авторах

Томас Яковлевич Азизов

Математический факультет
Воронежский государственный университет
Университетская пл., 1
Воронеж, 394006
Россия
E-Mail: azizov@math.vsu.ru

Виктор А. Хацкевич

Department of Mathematics
ORT Braude Academic College
College Campus, P.O.Box 78
Karmiel 21982
Israel
E-Mail: victor_kh@hotmail.com