Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 3, 420 – 430

Про розв'язки одного операторного рівняння, що містить узагальнене диференціювання Гельфонда–Леонтьєва

Тарас І. Звоздецький

(*Представлена М. М. Маламудом*)

Анотація. Отримано опис усіх лінійних неперервних операторів та ізоморфізмів, які переставні з різними операторами узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва і діють у просторах функцій, аналітичних у ϱ-опуклих областях.

2000 MSC. 47B38.

Ключові слова та фрази. Простір аналітичних функцій, узагальнене диференціювання Гельфонда–Леонтьєва, ізоморфізм.

1. Нехай G — область комплексної площини, а $\mathcal{A}(G)$ — простір усіх аналітичних в G функцій, що наділений топологією компактної збіжності. Для областей G_1 і G_2 із $\mathbb{C}$ через $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$ позначатимемо сукупність усіх лінійних неперервних операторів, що діють з $\mathcal{A}(G_1)$ в $\mathcal{A}(G_2)$.

Зафіксуємо зіркову відносно нуля область $G_i \subseteq \mathbb{C}$ та числа $\varrho_i > 0$ і $\mu_i \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}\mu_i > 0$), $i \in \{1, 2\}$. Для $i \in \{1, 2\}$ позначимо $E_\lambda^{(i)}(z) = E_{\varrho_i}(\lambda z; \mu_i)$, $\lambda, z \in \mathbb{C}$, де

$$E_{\varrho_i}(z; \mu_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n/\varrho_i + \mu_i)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

є функцією Міттаґ-Лефлера, і розглянемо в просторі $\mathcal{A}(G_i)$ оператор узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва $\mathcal{D}_{\varrho_i,\mu_i}$ [1], який на елементах із повної в $\mathcal{A}(G_i)$ системи функцій $\{E_\lambda^{(i)}(z) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ визначається співвідношенням

Стаття надійшла в редакцію 30.11.2007

ISSN 1810 – 3200.

$$\left(\mathcal{D}_{\varrho_i,\mu_i} E_\lambda^{(i)}\right)(z) = \lambda E_\lambda^{(i)}(z), \quad \lambda, z \in \mathbb{C}.$$

У [2] було доведено, що $\mathcal{D}_{\varrho_i,\mu_i}$ продовжується до лінійного неперервного оператора в $\mathcal{A}(G_i)$, $i \in \{1, 2\}$.

У даній роботі для випадку ϱ_i-опуклої області G_i ($i \in \{1, 2\}$) отримано опис усіх операторів із $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$ (а також ізоморфізмів), які задовольняють операторне рівняння

$$T\mathcal{D}_{\varrho_1,\mu_1} = \mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2} T. \tag{1}$$

Відзначимо, що переставні з узагальненим диференціюванням Гельфонда–Леонтьєва оператори були описані в [3], коли $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, а G_1 і G_2 — ϱ-опуклі області в $\mathbb{C}$, для яких $G_2 \subseteq G_1$. Крім цього, в [4] для довільних однозв'язних областей G_1 і G_2 були описані ізоморфізми з $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$, які переставні зі звичайним диференціюванням, у [5] для випадку, коли $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, G_1 і G_2 — ϱ-опуклі області, одержано опис ізоморфізмів із $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$, що задовольняють (1), а в [6] були отримані необхідні й достатні умови еквівалентності операторів $\mathcal{D}_{\varrho_1,\mu_1}$ в $\mathcal{A}(G_1)$ та $\mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2}$ в $\mathcal{A}(G_2)$. Зауважимо також, що інтегральні зображення описаних у даній роботі операторів узагальнюють класичні зображення у просторах аналітичних функцій комутанта оператора звичайного диференціювання, які отримуються у випадку, коли $\varrho_1 = \varrho_2 = \mu_1 = \mu_2 = 1$ (див., наприклад, огляд в [7]).

2. Нехай ненульовий оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$ задовольняє рівняння (1). Подіявши обома частинами (1) на функцію $E_\lambda^{(1)}(z)$ і позначивши $t(\lambda, z) = (TE_\lambda^{(1)})(z)$, одержимо

$$\lambda t(\lambda, z) = \mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2} t(\lambda, z). \tag{2}$$

Розглянемо в $\mathcal{A}(G_2)$ оператор узагальненого інтегрування Гельфонда–Леонтьєва $\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}$, який визначається формулою [8]

$$\left(\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2} f\right)(z) = \frac{z}{\Gamma(1/\varrho_2)} \int_0^1 t^{\mu_2 - 1}(1-t)^{1/\varrho_2 - 1} f\left(z t^{1/\varrho_2}\right) dt, \quad f \in \mathcal{A}(G_2).$$

Оскільки

$$\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2} \mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2} f(z) = f(z) - f(0), \quad f \in \mathcal{A}(G_2),$$

то з (2) отримаємо, що

$$(E - \lambda \mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}) t(\lambda, z) = a(\lambda),$$

де E — тотожний оператор в $\mathcal{A}(G_2)$, а $a(\lambda) = t(\lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Звідси, враховуючи рівність

$$(E - \lambda \mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathcal{I}^n_{\varrho_2,\mu_2},$$

будемо мати, що

$$t(\lambda, z) = a(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathcal{I}^n_{\varrho_2,\mu_2} 1 = \Gamma(\mu_2) a(\lambda) E^{(2)}_{\lambda}(z).$$

Отже, якщо оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$ задовольняє (1), то його характеристична функція $t(\lambda, z)$ подається у вигляді

$$t(\lambda, z) = b(\lambda) E^{(2)}_{\lambda}(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad z \in G_2, \tag{3}$$

де $b(\lambda) = \Gamma(\mu_2) a(\lambda)$ — деяка ціла функція. Відзначимо, що оскільки ціла функція $E_\varrho(z; \mu)$ має порядок ϱ і $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$, то при фіксованому $z \in G_2$ порядок цілої відносно λ функції $t(\lambda, z)$ не перевищує ϱ_1. Зокрема, звідси одержимо, що і порядок цілої функції $b(\lambda) = \Gamma(\mu_2)\, t(\lambda, 0)$ не перевищує ϱ_1. Разом з цим, із (3) випливає, що при фіксованому $z \in G_2 \setminus \{0\}$ порядок цілої відносно λ функції $t(\lambda, z)$ дорівнює максимуму з двох чисел — порядку функції $b(\lambda)$ та порядку функції $E^{(2)}_z(\lambda)$. Тому $\varrho_1 \geq \varrho_2$.

Таким чином, доведено наступну лему.

Лема. *Нехай $\varrho_i > 0$, $\mu_i \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re} \mu_i > 0$), G_i — зіркова відносно нуля область в $\mathbb{C}$, $i \in \{1, 2\}$. Якщо ненульовий оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$ задовольняє рівняння (1), то $\varrho_1 \geq \varrho_2$ і характеристична функція $t(\lambda, z) = (TE^{(1)}_{\lambda})(z)$ цього оператора подається у вигляді (3), де $b(\lambda)$ — деяка ціла функція, порядок якої не перевищує ϱ_1.*

Зауважимо, що з цієї леми випливає, що коли $\varrho_1 < \varrho_2$, то рівняння (1) має в класі $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$ лише нульовий розв'язок. Тому вважатимемо надалі, що $\varrho_1 \geq \varrho_2$.

Щоб повністю описати ненульові розв'язки рівняння (1) в $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$ (тобто, враховуючи (3), детальніше вивчити властивості функції $b(\lambda)$), скористаємось отриманим у [9] зображенням операторів із $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$ за допомогою їх характеристичних функцій. Тому будемо розглядати далі два випадки (коли $\varrho_1 > \varrho_2$ і $\varrho_1 = \varrho_2$).

Нехай $\varrho_1 > \varrho_2$, G_1 — ϱ_1-опукла область, а G_2 — зіркова відносно нуля область в $\mathbb{C}$. Нагадаємо, що для цілої функції $g(\lambda)$, порядок якої ϱ_g не перевищує числа $\varrho > 0$, її індикатором $h_\varrho(\theta; g)$ називається функція [10, с. 72]

$$h_\varrho(\theta; g) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln|g(re^{i\theta})|}{r^\varrho}, \quad \theta \in (-\pi; \pi].$$

Відзначимо, що $h_\varrho(\theta; g) \equiv 0$, якщо $\varrho_g < \varrho$.

Зафіксуємо $z \in G_2$ і знайдемо індикатор $h_{\varrho_1}(\theta; t_z)$ цілої відносно λ функції $t_z(\lambda) = t(\lambda, z)$. Використовуючи (3), матимемо,що

$$h_{\varrho_1}(\theta; t_z) = \varlimsup_{r\to+\infty} \left(\frac{\ln|b(re^{i\theta})|}{r^{\varrho_1}} + \frac{\ln|E_{\varrho_2}(zre^{i\theta}; \mu_2)|}{r^{\varrho_1}} \right) = h_{\varrho_1}(\theta; b), \qquad \theta \in (-\pi; \pi],$$

бо

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\ln|E_{\varrho_2}(zre^{i\theta}; \mu_2)|}{r^{\varrho_1}} = 0.$$

Отже, в цьому випадку індикатори функцій $t_z(\lambda)$ та $b(\lambda)$ збігаються. Тоді, оскільки $t(\lambda, z)$ — характеристична функція деякого оператора $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$, то, згідно з [9], існує такий ϱ_1-опуклий компакт $K_1 \subset G_1$, що

$$h_{\varrho_1}(\theta; b) \le k_{\varrho_1}(-\theta; K_1), \quad \theta \in (-\pi; \pi], \tag{4}$$

де $k_{\varrho_1}(\theta; K_1)$ – ϱ_1-опорна функція компакта K_1, тобто [11, с. 334]

$$k_{\varrho_1}(\theta; K_1) = \max_{\substack{\zeta\in K_1,\\ |\mathrm{Arg}\,\zeta-\theta|\le\min\{\pi, \frac{\pi}{2\varrho}\}}} |\zeta|^{\varrho_1} \cos[\varrho_1(\mathrm{Arg}\,\zeta - \theta)], \quad \theta \in (-\pi; \pi].$$

Зауважимо, що функція $k_{\varrho_1}(\theta; K_1)$ обмежена (бо компакт K_1 обмежений), а тому з нерівності (4) випливає, що порядок функції $b(\lambda)$ не перевищує ϱ_1. Якщо розглянути ще й ϱ_1-опорну функцію ϱ_1-опуклої області G_1

$$k_{\varrho_1}(\theta; G_1) = \sup_{\substack{\zeta\in G_1,\\ |\mathrm{Arg}\,\zeta-\theta|\le\min\{\pi, \frac{\pi}{2\varrho}\}}} |\zeta|^{\varrho_1} \cos[\varrho_1(\mathrm{Arg}\,\zeta - \theta)], \quad \theta \in (-\pi; \pi],$$

і врахувати, що $k_{\varrho_1}(\theta; K_1) < k_{\varrho_1}(\theta; G_1)$, $\theta \in (-\pi; \pi]$, то з (4) отримаємо, що

$$h_{\varrho_1}(\theta; b) < k_{\varrho_1}(-\theta; G_1), \quad \theta \in (-\pi; \pi]. \tag{5}$$

Крім цього, для всіх $f \in \mathcal{A}(G_1)$ [9]

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (B_{\varrho_1,\mu_1} t_z)(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda, \quad z \in G_2, \tag{6}$$

де γ — замкнений контур, що лежить в G_1 і охоплює K_1, а $(B_{\varrho_1,\mu_1} t_z)(\lambda)$ — узагальнене ϱ_1, μ_1-перетворення Бореля цілої функції $t_z(\lambda)$ [11, с. 324]. Відзначимо, що оскільки для всіх $z \in G_2$ $h_{\varrho_1}(\theta; t_z) = h_{\varrho_1}(\theta; b)$, $\theta \in (-\pi; \pi]$, то ϱ_1-опуклі оболонки всіх особливостей функцій $(B_{\varrho_1,\mu_1} t_z)(\lambda)$ та $(B_{\varrho_1,\mu_1} b)(\lambda)$ збігаються [11, с. 335–336] і, враховуючи (4), лежать в K_1. Тому за γ в (6) можна брати замкнений контур, що лежить в G_1 і охоплює всі особливості функції $(B_{\varrho_1,\mu_1} b)(\lambda)$.

Таким чином, ми довели необхідні умови наступної теореми.

Теорема 1. *Нехай $\varrho_1 > \varrho_2 > 0$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}\mu_1 > 0$, $\operatorname{Re}\mu_2 > 0$), G_1 — ϱ_1-опукла область, а G_2 — зіркова відносно нуля область в $\mathbb{C}$. Для того, щоб ненульовий оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$ був розв'язком рівняння* (1), *необхідно і досить, щоб його характеристична функція $t(\lambda, z) = (TE_\lambda^{(1)})(z)$ подавалась у вигляді* (3), *де $b(\lambda)$ — така ціла функція, для якої виконується нерівність* (5). *При цьому, дія оператора T на довільну функцію $f \in \mathcal{A}(G_1)$ визначається формулою* (6), *де γ — замкнений контур, що лежить в G_1 і охоплює всі особливості функції $(B_{\varrho_1,\mu_1} b)(\lambda)$.*

Доведення. Достатність. Нехай $b(\lambda)$ — така ціла функція, для якої виконується нерівність (5). Тоді, згідно з [3, лема 2.1], для деякого ϱ_1-опуклого компакта $K_1 \subset G_1$ виконується нерівність (4). Розглянемо функцію $t(\lambda, z)$, яка визначається рівністю (3). Оскільки, як було показано вище, в цьому випадку $h_{\varrho_1}(\theta; t_z) = h_{\varrho_1}(\theta; b)$ (для всіх $z \in G_2$ і $\theta \in (-\pi; \pi]$) і виконується (4), то формулою (6) визначається оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$ [9]. Переконаємося, що він задовольняє рівняння (1), тобто, що

$$T\mathcal{D}_{\varrho_1,\mu_1} f = \mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2} T f, \quad f \in \mathcal{A}(G_1).$$

Враховуючи повноту в $\mathcal{A}(G_1)$ системи функцій $\{E_\lambda^{(1)}(z) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ та лінійність і неперервність у відповідних просторах операторів T, $\mathcal{D}_{\varrho_1,\mu_1}$ і $\mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2}$, досить перевірити останню рівність для функцій $f(z) = E_\lambda^{(1)}(z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Але

$$
\begin{aligned}
T\left[\mathcal{D}_{\varrho_1,\mu_1}E_\lambda^{(1)}(z)\right] &= \lambda t(\lambda,z)\\
&= b(\lambda)\lambda E_\lambda^{(2)}(z) = \mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2}\left[b(\lambda)E_\lambda^{(2)}(z)\right]\\
&= \mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2}\left[TE_\lambda^{(1)}(z)\right], \quad \lambda\in\mathbb{C}, \quad z\in G_2.
\end{aligned}
$$

Отже, оператор T справді задовольняє рівняння (1). Теорему доведено. □

Нехай тепер $\varrho_1=\varrho_2=\varrho$, а G_1 і G_2 — ϱ-опуклі області в $\mathbb{C}$. Припустимо, що ненульовий оператор $T\in\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1),\mathcal{A}(G_2))$ є розв'язком рівняння (1). Тоді, згідно з лемою, його характеристична функція $t(\lambda,z)$ подається у вигляді (3), де $b(\lambda)$ — деяка ціла функція, порядок якої не перевищує ϱ. Крім цього, згідно з [9], для довільного ϱ-опуклого компакта $K_2\subset G_2$ існує такий ϱ-опуклий компакт $K_1\subset G_1$, що для всіх $\theta\in(-\pi;\pi]$ та $z\in K_2$ індикатор $h_\varrho(\theta;t_z)$ цілої функції $t_z(\lambda)=t(\lambda,z)$ задовольняє нерівність

$$
\begin{aligned}
h_\varrho(\theta;t_z) = \varlimsup_{r\to+\infty}\left(\frac{\ln|b(re^{i\theta})|}{r^\varrho} + \frac{\ln\left|E_\varrho\left(|z|r\mathrm{e}^{i(\operatorname{Arg} z+\theta)};\mu_2\right)\right|}{r^\varrho}\right)&\\
\le k_\varrho(-\theta;K_1).& \quad (7)
\end{aligned}
$$

Відзначимо, що із [11, леми 3.4, 3.6] випливає, що для $\zeta\in\mathbb{C}$

$$
E_\varrho(\zeta;\mu) = \varrho\,\zeta^{\varrho(1-\mu)}\exp\left(\zeta^\varrho\right) + O\left(\tfrac{1}{|\zeta|}\right), \quad |\zeta|\to+\infty,
$$

коли $|\arg\zeta|\le\min\{\pi,\frac{\pi}{2\varrho}\}$, або

$$
E_\varrho(\zeta;\mu) = -\frac{1}{\zeta\Gamma(\mu-1/\varrho)} + O\left(\tfrac{1}{|\zeta|^2}\right), \quad |\zeta|\to+\infty,
$$

коли $\frac{\pi}{2\varrho}<|\arg\zeta|\le\pi$ (при $\varrho>\frac12$). Тому для $\theta\in(-\pi;\pi]$ і $z\in K_2$ будемо мати, що

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to+\infty}&\frac{\ln\left|E_\varrho\left(|z|r\mathrm{e}^{i(\operatorname{Arg} z+\theta)};\mu_2\right)\right|}{r^\varrho}\\
&= \lim_{r\to+\infty}\left(\frac{\ln\varrho + \ln(|z|r)^{\varrho(1-\operatorname{Re}\mu)} + \varrho\operatorname{Im}\mu(\operatorname{Arg} z+\theta)}{r^\varrho}\right.\\
&\qquad\left. + \frac{|z|^\varrho r^\varrho\cos[\varrho(\operatorname{Arg} z+\theta)]}{r^\varrho}\right) = |z|^\varrho\cos[\varrho(\operatorname{Arg} z+\theta)],
\end{aligned}
$$

коли $|\operatorname{Arg} z+\theta|\le\min\{\pi,\frac{\pi}{2\varrho}\}$, або

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\ln\left|E_\varrho\left(|z|re^{i(\operatorname{Arg} z+\theta)};\mu_2\right)\right|}{r^\varrho}=0,$$

коли $\frac{\pi}{2\varrho} < |\operatorname{Arg} z+\theta| \le \pi$ (при $\varrho > \frac{1}{2}$). Тоді з (7) одержимо, що для $\theta\in(-\pi;\pi]$ і $z\in K_2$

$$\begin{aligned} h_\varrho(\theta;t_z) = h_\varrho(\theta;b) + |z|^\varrho\cos[\varrho(\operatorname{Arg} z+\theta)] \\ \le k_\varrho(-\theta;K_1) < k_\varrho(-\theta;G_1), \quad (8)\end{aligned}$$

коли $|\operatorname{Arg} z+\theta| \le \min\{\pi,\frac{\pi}{2\varrho}\}$, або $h_\varrho(\theta;t_z) = h_\varrho(\theta;b)$, коли $\frac{\pi}{2\varrho} < |\operatorname{Arg} z+\theta| \le \pi$ (при $\varrho > \frac{1}{2}$). Враховуючи означення ϱ-опорної функції ϱ-опуклої множини та переходячи у (8) до супремуму відносно z по відповідних множинах, отримаємо, що

$$\forall\,\theta\in(-\pi;\pi] \quad \forall\, z\in K_2: \quad h_\varrho(\theta;t_z) \le h_\varrho(\theta;b) + k_\varrho(-\theta;K_2) \qquad (9)$$

і

$$\forall\,\theta\in(-\pi;\pi]: \quad h_\varrho(\theta;b) + k_\varrho(-\theta;G_2) \le k_\varrho(-\theta;G_1). \qquad (10)$$

При цьому, для всіх $f\in\mathcal{A}(G_1)$ і $z\in G_2$

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_z}(B_{\varrho,\mu_1}t_z)(\lambda)f(\lambda)\,d\lambda, \qquad (11)$$

де γ_z — замкнений контур, що вибирається наступним чином. Для кожного $z\in G_2$ розглядаємо такий ϱ-опуклий компакт $K_2\subset G_2$, що $z\in K_2$. Згідно з [9], існує такий ϱ-опуклий компакт $K_1\subset G_1$, що для всіх $z\in K_2$ і $\theta\in(-\pi;\pi]$ виконується нерівність $h_\varrho(\theta;t_z)\le k_\varrho(-\theta;K_1)$. Тоді за γ_z в (11) беремо довільний замкнений контур, що лежить у G_1 і охоплює K_1, бо всі особливості функції $(B_{\varrho,\mu_1}t_z)(\lambda)$ лежать усередині K_1.

Таким чином, ми довели необхідні умови наступної теореми.

Теорема 2. *Нехай* $\varrho_1=\varrho_2=\varrho$, $\mu_1,\mu_2\in\mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}\mu_1>0$, $\operatorname{Re}\mu_2>0$), *а* G_1 *і* G_2 *—* ϱ*-опуклі області в* $\mathbb{C}$. *Для того, щоб ненульовий оператор* $T\in\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1),\mathcal{A}(G_2))$ *був розв'язком рівняння* (1), *необхідно і досить, щоб його характеристична функція* $t(\lambda,z)=(TE_\lambda^{(1)})(z)$ *подавалась у вигляді* (3), *де* $b(\lambda)$ *— така ціла функція, для якої виконується нерівність* (10). *При цьому, дія оператора* T *на довільну функцію* $f\in\mathcal{A}(G_1)$ *при* $z\in G_2$ *визначається формулою* (11), *де* γ_z *— замкнений контур, що лежить у* G_1 *і охоплює всі особливості функції* $(B_{\varrho,\mu_1}t_z)(\lambda)$.

Доведення. Достатність. Нехай $b(\lambda)$ — така ціла функція, для якої виконується нерівність (10). Зафіксуємо ϱ-опуклий компакт $K_2 \subset G_2$. Тоді

$$\forall\, \theta \in (-\pi; \pi] : \quad h_\varrho(\theta; b) + k_\varrho(-\theta; K_2) < k_\varrho(-\theta; G_1).$$

Тому, згідно з [3, лема 2.1], існує такий ϱ-опуклий компакт $K_1 \subset G_1$, для якого виконується нерівність

$$\forall\, \theta \in (-\pi; \pi] : \quad h_\varrho(\theta; b) + k_\varrho(-\theta; K_2) \leq k_\varrho(-\theta; K_1). \tag{12}$$

Розглянемо функцію $t(\lambda, z)$, яка визначається рівністю (3). Тоді з (9) і (12) отримаємо, що

$$\forall\, \theta \in (-\pi; \pi] \quad \forall\, z \in K_2 : \quad h_\varrho(\theta; t_z) \leq k_\varrho(-\theta; K_1),$$

де $t_z(\lambda) = t(\lambda, z)$. Тому $t(\lambda, z)$ є характеристичною функцією для деякого оператора $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$ [9], дія якого на довільну функцію $f \in \mathcal{A}(G_1)$ при $z \in K_2$ визначається формулою (11), де γ_z — замкнений контур, що лежить у G_1 і охоплює K_1. Те, що так визначений оператор T задовольняє рівняння (1), перевіряється так само, як і при доведенні теореми 1. Теорему доведено. $\square$

3. Опишемо тепер ізоморфізми $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$, які задовольняють рівняння (1).

Нехай $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$ є ізоморфізмом, який задовольняє (1). Тоді за лемою $\varrho_1 \geq \varrho_2$. Разом з цим, оператор $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_2), \mathcal{A}(G_1))$ задовольняє рівняння $T^{-1}\mathcal{D}_{\varrho_2,\mu_2} = \mathcal{D}_{\varrho_1,\mu_1}T^{-1}$. Тому з леми отримаємо, що $\varrho_2 \geq \varrho_1$. Отже, $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$. Крім цього, згідно з лемою, характеристична функція $t(\lambda, z) = TE_\varrho(\lambda z; \mu_1)$ оператора T подається у вигляді

$$t(\lambda, z) = b(\lambda) E_\varrho(\lambda z; \mu_2), \tag{13}$$

причому порядок функції $b(\lambda)$ не перевищує ϱ. Оскільки T є ізоморфізмом, то він не має нетривіальних нулів. Тоді з (13) одержимо, що функція $b(\lambda)$ не має нулів у $\mathbb{C}$. Тому $b(\lambda) = \exp[p(\lambda)]$, де $p(\lambda)$ — деякий многочлен, степінь якого не перевищує ϱ (позначатимемо надалі степінь многочлена $p(\lambda)$ через $\deg\, p(\lambda)$) [12, с. 266]. Отже,

$$t(\lambda, z) = \exp[p(\lambda)] E_\varrho(\lambda z; \mu_2), \tag{14}$$

де $p(\lambda)$ — многочлен, причому $\deg\, p(\lambda) \leq \varrho$.

Відзначимо, що в даному випадку

$$\forall\ \theta \in (-\pi;\pi]:\quad h_\varrho(\theta;b) = \varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\operatorname{Re}p(re^{i\theta})}{r^\varrho}$$
$$= \begin{cases} 0, & \deg p(\lambda) < \varrho, \\ \operatorname{Re}\left(a_0 \mathrm{e}^{i\varrho\theta}\right), & \deg p(\lambda) = \varrho. \end{cases}$$

Тому розглянемо далі окремо ситуації коли deg $p(\lambda) < \varrho$ і deg $p(\lambda) = \varrho$.

Нехай deg $p(\lambda) < \varrho$. Тоді з теореми 2 отримаємо, що $k_\varrho(\theta;G_2) \le k_\varrho(\theta;G_1)$ для всіх $\theta \in (-\pi;\pi]$. А це означає, що $G_2 \subseteq G_1$. Крім цього, оскільки T є ізоморфізмом і (14) можна записати у вигляді

$$T^{-1}E_\varrho(\lambda z;\mu_2) = \exp[-p(\lambda)]E_\varrho(\lambda z;\mu_1), \tag{15}$$

то звідси аналогічними міркуваннями одержимо, що $G_1 \subseteq G_2$. Отже, в цьому випадку $G_1 = G_2$.

Нехай тепер deg $p(\lambda) = \varrho$. Тоді з теореми 2 будемо мати, що $\operatorname{Re}(a_0\mathrm{e}^{-i\varrho\theta}) + k_\varrho(\theta;G_2) \le k_\varrho(\theta;G_1)$ для всіх $\theta \in (-\pi;\pi]$. Аналогічно, використовуючи (15), отримаємо, що $k_\varrho(\theta;G_1) - \operatorname{Re}(a_0\mathrm{e}^{-i\varrho\theta}) \le k_\varrho(\theta;G_2)$ для всіх $\theta \in (-\pi;\pi]$. Отже, в цьому випадку ϱ-опорні функції ϱ-опуклих областей G_1 і G_2 пов'язані співвідношенням

$$k_\varrho(\theta;G_1) = k_\varrho(\theta;G_2) + \operatorname{Re}(a_0\mathrm{e}^{-i\varrho\theta}),\quad \theta \in (-\pi;\pi], \tag{16}$$

де a_0 — це коефіцієнт при λ^ϱ у $p(\lambda)$.

Таким чином, ми довели необхідні умови наступної теореми.

Теорема 3. *Нехай $\varrho_i > 0$, $\mu_i \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}\mu_i > 0$), а G_i — ϱ_i-опукла область в $\mathbb{C}$, $i \in \{1,2\}$. Для того, щоб оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1),\mathcal{A}(G_2))$ був ізоморфізмом, який задовольняє рівняння* (1), *необхідно і досить, щоб виконувались наступні умови:*

1) $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$;

2) *характеристична функція $t(\lambda,z) = TE_\varrho(\lambda z;\mu_1)$ оператора T подається у вигляді* (14), *де $p(\lambda)$ — многочлен, для якого* $\deg p(\lambda) \le \varrho$;

3) *якщо $\deg p(\lambda) < \varrho$, то $G_1 = G_2$, а якщо $\deg p(\lambda) = \varrho$, то ϱ-опорні функції $k_\varrho(\theta;G_1)$ і $k_\varrho(\theta;G_2)$ ϱ-опуклих областей G_1 і G_2 пов'язані співвідношенням* (16), *де a_0 — це коефіцієнт при λ^ϱ у $p(\lambda)$.*

При цьому, дія оператора T на довільну функцію $f \in \mathcal{A}(G_1)$ при $z \in G_2$ визначається формулою (11)*, де γ_z — замкнений контур, що лежить у G_1 і охоплює всі особливості функції $(B_{\varrho,\mu_1} t_z)(\lambda)$.*

Доведення. Достатність. Нехай виконуються умови 1)–3). Те, що відповідний оператор T належить до $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$ і задовольняє (1), випливає з теореми 2. Крім цього, він є ізоморфізмом, оскільки оберненим до нього є оператор $T_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_2), \mathcal{A}(G_1))$, для якого характеристичною є функція

$$t_1(\lambda, z) = T_1 E_\varrho(\lambda z; \mu_2) = \exp[-p(\lambda)] E_\varrho(\lambda z; \mu_1).$$

Теорему доведено. □

Відзначимо, що отримані тут результати узгоджуються з відповідними результатами із [3–6].

Література

[1] А. О. Гельфонд, А. Ф. Леонтьев, *Об одном обобщении ряда Фурье* // Матем. сб., **29 (71)** (1951), N 3, 477–500.

[2] Н. Е. Линчук, *Представление решений некоторых операторных уравнений в аналитических пространствах и их применения.* Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Киев, 1987, 121 с.

[3] В. А. Ткаченко, *Об операторах, коммутирующих с обобщенным дифференцированием, в пространствах аналитических функционалов с заданным индикатором роста* // Матем. сб., **102 (144)** (1977), N 3, 435–456.

[4] М. І. Нагнибіда, *Еквівалентність деяких операцій в аналітичних просторах* // Доповіді АН УРСР. Сер. А. (1982), N 9, 14–16.

[5] Т. І. Звоздецький, *Про ізоморфізми, які є переставними з оператором узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва* // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр. Київ: Ін-т матем. НАН України, **10** (1995), 243–248.

[6] Т. І. Звоздецький, *Про еквівалентність у просторах аналітичних функцій деяких операторів, пов'язаних з узагальненим інтегруванням та диференціюванням Гельфонда-Леонтьєва* // Укр. мат. вісн, **2** (2005), N 4, 490–501.

[7] Ю. Ф. Коробейник, *Операторы сдвига на числовых семействах.* Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1983, 160 с.

[8] I. H. Dimovski, V. S. Kiryakova, *Convolution and commutant of Gelfond-Leontiev operator of integration* // Конструктивная теория функций: Труды междунар. конф. (Варна, 1–5 июня, 1981). София, 1983, 288–294.

[9] Т. І. Звоздецький, С. С. Лінчук, *Одне зображення лінійних неперервних операторів, що діють у просторах аналітичних функцій* // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 314–315. Математика, Чернівці: Рута, 2006, 73–76.

[10] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций.* Москва: Гостехиздат, 1956, 632 с.

[11] М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.* Москва: Наука, 1966, 671 с.

[12] А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций. Том II.* Москва: Наука, 1968, 624 с.

Відомості про авторів

Тарас Іванович Звоздецький

Кафедра математичного аналізу,
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2
Чернівці, 58012
Україна
E-Mail: taras_zv@ukr.net,
mathan@ukr.net