Український математичний вісник
Том 5 **(2008)**, № 3, 366 – 381

Теоремы Лиувилля, Пикара и Сохоцкого для кольцевых отображений

Евгений А. Севостьянов

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Доказано, что изолированная особенность $x_0 \in D$ открытого дискретного кольцевого Q-отображения $f : D\setminus\{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ устранима, если функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание, либо логарифмические особенности порядка не выше, чем $n-1$ в точке x_0. Более того, продолженное отображение открыто и дискретно. В качестве приложений, получены аналоги хорошо известных теорем Лиувилля, Пикара и Сохоцкого.

2000 MSC. 30C65, 30C75.

Ключевые слова и фразы. Устранение особенностей, отображения с ограниченным и конечным искажением и их обобщения, ограниченное и конечное среднее колебание, модули и ёмкости в теории отображений.

1. Введение

Как известно, в основу определения квазиконформных отображений, заданных в области D из $\mathbb{R}^n,\ n \geq 2$, положено неравенство

$$M(f\Gamma) \leq K\, M(\Gamma)\,, \tag{1.1}$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D, где M — модуль семейства кривых (внешняя мера, определённая на семействах кривых в $\mathbb{R}^n$), а $K \geq 1$ — некоторая постоянная. Другими словами, модуль любого семейства кривых искажается не более, чем в K раз. На языке ёмкостей соотношение (1.1) означает, что отображение f искажает ёмкость любого конденсатора в D не более, чем в K раз. Пусть в основе определения класса отображений, вместо соотношения (1.1), лежит неравенство вида

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_D Q(x)\cdot \rho^n(x)\, dm(x) \tag{1.2}$$

Статья поступила в редакцию 18.03.2008

где $m(x)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, ρ — произвольная неотрицательная борелевская функция, такая что произвольная кривая γ семейства Γ имеет длину, не меньшую 1 в метрике ρ, а $Q : D \to [1, \infty]$ – измеримая функция, см. [3], см. также [17]. В случае, когда $Q(x) \le K$ п.в., мы снова приходим к неравенству (1.1). В общем случае, последнее неравенство означает, что искажение модуля исходного семейства Γ происходит с некоторым весом $Q(x)$, $M(f\Gamma) \le M_{Q(x)}(\Gamma)$, см., напр., [1, 2, 25]. Более общо, можно предполагать, что контролируемым образом искажаются не все кривые семейства Γ, а только "некоторые". В данной работе мы рассматриваем преимущественно семейства кривых, которые соединяют концентрические сферы с центром в фиксированной точке области; таким образом, в дальнейшем речь идёт о классах так называемых кольцевых Q-отображений, которые, в случае неограниченной функции $Q(x)$, не совпадают с классом квазирегулярных отображений. В данной статье рассматривается задача следующего характера: поиск условий на функцию $Q(x)$, участвующую в определении отображения f, см. соотношение (1.2), при которых f продолжается по непрерывности в изолированную граничную точку. Отображение f предполагается здесь только открытым и дискретным; для гомеоморфизмов аналогичные теоремы были получены в [11], а для локальных гомеоморфизмов в [4]. Техника исследования отображений с ветвлением во многом отличается, см. работы для дискретных открытых отображений [5, 21, 22]. Из полученных теорем вытекают некоторые интересные, на наш взгляд, следствия: в частности, теоремы типа Лиувилля, Пикара и Сохоцкого. Теория *Q-гомеоморфизмов* — гомеоморфизмов, для которых выполнено (1.2), а также близких к ним классов, развивалась в основном для случая, когда функция Q принадлежала известному пространству BMO (функций ограниченного среднего колебания по Джону–Ниренбергу [12]), см., напр., [16]. Возможность непрерывного продолжения в изолированную граничную точку для квазирегулярных отображений была показана в работах О. Мартио, С. Рикмана и Ю. Вяйсяля, см., напр., [14, 19].

2. Предварительные сведения

Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Запись $f : D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f непрерывно в области задания; $G \Subset D$ означает, что $\overline{G}$ — компактное подмножество области D. Говорят, что отображение f сохраняет ориентацию (анти–сохраняет), если топологический индекс $\mu\,(y,\,f,\,G)>0$ $(\mu\,(y,\,f,\,G)<0)$ для произвольной области $G\Subset D$ и произвольного $y\in f(G)\setminus f(\partial G)$. В дальнейшем $B(x_0,\,r)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|<r\}$, $B(r)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<r\}$, $\mathbb{B}^n=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|<1\}$, $m(x)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Приведённые выше понятия естественным образом распространяются на отображения $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$, где область $D\subset\mathbb{R}^n$ и $\overline{\mathbb{R}^n}=\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$ — одноточечная компактификация $\mathbb{R}^n$. Напомним, что борелева функция $\rho:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если $\int_\gamma\rho(x)\,|dx|\geq 1$ для всех кривых $\gamma\in\Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma)=\inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma}\int\limits_D\rho^n(x)\,dm(x).$$

Пусть D — область в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n\geq 2$, $E,F\subseteq\overline{\mathbb{R}^n}$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E,F,D)$ семейство всех кривых $\gamma:[a,b]\to\overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a)\in E,\gamma(b)\in F$ и $\gamma(t)\in D$ при $t\in(a,b)$. Следующее понятие, мотивированное кольцевым определением квазиконформности по Герингу, см. [6], и представляющее собой обобщение и локализацию понятия Q-отображения, введено В. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым на плоскости, см., напр., [20]. Пусть $r_0=\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$ и пусть $Q:D\to[0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Положим $A(r_1,r_2,x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n: r_1<|x-x_0|<r_2\}$, $S_i=S(x_0,r_i)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|=r_i\}$, $i=1,2.$ Говорят, что гомеоморфизм $f:D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0\in D$, если соотношение

$$M\left(f\left(\Gamma\left(S_1,\,S_2,\,A\right)\right)\right)\ \leq\int\limits_A Q(x)\cdot\eta^n(|x-x_0|)\,dm(x)\qquad(2.1)$$

выполнено для любого кольца $A=A(r_1,r_2,x_0)$, $0<r_1<r_2<r_0$ и для каждой измеримой функции $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geq 1.$$

В случае ограниченной функции $Q(x)$, определения кольцевого Q-гомеоморфизма и Q-гомеоморфизма эквивалентны, и, фактически, генерируют собой определение квазиконформных отображений, см. [6]. В общем случае, каждый Q-гомеоморфизм является кольцевым, но не наоборот, см. [20]. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, и $x_0\in D$. По аналогии, будем говорить, что (не обязательно гомеоморфное) отображение $f:D\setminus\{x_0\}\rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ есть *кольцевое Q-отображение в точке* x_0, если соотношение (2.1) выполнено для любого кольца $A=A(r_1,r_2,x_0)$, $0<r_1<r_2< r_0=\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)$ и для каждой измеримой функции $\eta:(r_1,r_2)\rightarrow [0,\infty]$ такой, что $\int_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geq 1$. При этом само отображение определено лишь в проколотой окрестности точки x_0; дальнейшая часть работы посвящена поиску условий на функцию $Q(x)$, которые обеспечивают возможность непрерывного продолжения отображения f в точку x_0. Все результаты, полученные для кольцевых Q-отображений очевидным образом распространяются на Q-отображения, т.е., непрерывные отображения, удовлетворяющие оценке (1.2).

Конденсатором называют пару $E=(A,\,C)$, где A — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а C — компактное подмножество A. Конденсатор E называют *кольцевым*, если $A\setminus C$ является кольцом. *Ёмкостью* конденсатора E называется следующая величина:

$$\mathrm{cap}\,E=\mathrm{cap}\,(A,\,C)\,=\,\inf_{u\in W_0(E)}\,\int\limits_A\,|\nabla u|^n\,dm(x),$$

где $W_0(E)=W_0\,(A,\,C)$ — семейство неотрицательных непрерывных функций $u:A\rightarrow\mathbb{R}$ с компактным носителем в A, таких что $u(x)\geq 1$ при $x\in C$ и $u\in ACL$. В формуле выше, как обычно, $|\nabla u|=\left(\sum_{i=1}^n\,(\partial_i u)^2\right)^{1/2}$. В дальнейшем в расширенном пространстве $\overline{\mathbb{R}^n}=\mathbb{R}^n\bigcup\{\infty\}$ используется *сферическая* (*хордальная*) *метрика* $h(x,y)=|\pi(x)-\pi(y)|$, где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n(\frac{1}{2}e_{n+1},\frac{1}{2})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+{|x|}^2}},\quad h(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+{|x|}^2}\sqrt{1+{|y|}^2}},\quad x\neq\infty\neq y.$$

Пусть $f:D\rightarrow\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, — открытое дискретное отображение, $\beta:[a,\,b)\rightarrow\mathbb{R}^n$ — некоторая кривая и пусть $x\in\,f^{-1}\left(\beta(a)\right)$. Кривая $\alpha:[a,\,c)\rightarrow D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если (1) $\alpha(a)=x$; (2) $f\circ\alpha=\beta|_{[a,\,c)}$; (3) если $c<c'\leq b$, то не существует кривой $\alpha':[a,\,c')\rightarrow D$, такой что $\alpha=\alpha'|_{[a,\,c)}$ и $f\circ\alpha=\beta|_{[a,\,c')}$. Пусть f — открытое дискретное отображение и $x\in\,f^{-1}\left(\beta(a)\right)$. Тогда кривая β имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x, см. следствие 3.3 главы II в [19].

Лемма 2.1. *Пусть $E = (A,\, C)$ — произвольный конденсатор в $\mathbb{R}^n$ и пусть Γ_E — семейство всех кривых вида $\gamma : [a,\, b) \to A$ с $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \varnothing$ для произвольного компакта $F \subset A$. Тогда* $\operatorname{cap} E = M\left(\Gamma_E\right)$, *см.* [19, *предложение* 10.2 *гл.* II].

Замечание 2.1. Понятие конденсатора и ёмкости конденсатора в $\mathbb{R}^n$ можно перенести в $\overline{\mathbb{R}^n}$, см. [14, раздел 2.1]. Лемма 2.1 остаётся справедливой для конденсаторов в $\overline{\mathbb{R}^n}$, см. [19, замечание 10.8, 1 гл. II].

Говорят, что компакт C в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, имеет *нулевую ёмкость,* пишут $\operatorname{cap} C = 0$, если существует ограниченное открытое множество A с $C \subset A$ такое, что $\operatorname{cap}(A, C) = 0$. Известно, что, см., напр., [18, лемма 3.4 гл. II], в последнем случае и для любого другого ограниченного открытого множества A в $\mathbb{R}^n$, содержащего C, будет выполнено $\operatorname{cap}(A, C) = 0$. В противном случае, полагаем $\operatorname{cap} C > 0$. Аналогично можно определить понятие множества ёмкости нуль в $\overline{\mathbb{R}^n}$, см., напр., [14, 2.12].

Лемма 2.2. *Пусть E — компактное собственное подмножество $\overline{\mathbb{R}^n}$, такое что* $\operatorname{cap} E > 0$. *Тогда для каждого $a > 0$ существует положительное число $\delta > 0$ такое, что* $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus E,\, C\right) \geq \delta$ *для произвольного континуума $C \subset \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$, удовлетворяющего условию $h(C) \geq a$, см.* [14, *лемма* 3.11] *или в* [19, *лемма* 2.6 *гл.* III].

Замечание 2.2. Если компакт F в $\overline{\mathbb{R}^n}$ имеет ёмкость нуль, то при каждом $\alpha > 0$, α — мерная хаусдорфова мера $\Lambda_\alpha(F)$ множества F равна нулю, см. [14, лемма 2.13]. Следовательно, $\operatorname{mes} F = 0$ и $\operatorname{Int} F = \varnothing$.

3. Основная лемма о продолжении

Лемма 3.1. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 = 0$, удовлетворяющее условию* $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{B}^n \setminus \{0\}\right)\right) > 0$. *Предположим, что существует $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < 1$ такое, что при $\varepsilon \to 0$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|)\ dm(x) = o\left(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)\right), \tag{3.1}$$

где $\psi(t)$ — неотрицательная на $(0, \infty)$ функция, такая что $\psi(t) > 0$ п.в. t и

$$0 < I(\varepsilon, \varepsilon') = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \psi(t)\, dt < \infty$$

для всех (фиксированных) ε' *из* $(0, \varepsilon_0]$ *и* $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$. *Тогда* f *имеет непрерывное продолжение* $f : \mathbb{B}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *в* $\mathbb{B}^n$. *Непрерывность понимается в смысле пространства* $\overline{\mathbb{R}^n}$ *относительно хордальной метрики* h.

Доказательство. Предположим противное, а именно, что отображение f не может быть продолжено по непрерывности в точку $x_0 = 0$. Тогда найдутся две последовательности x_j и x_j', принадлежащие $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ с $x_j \to 0$, $x_j' \to 0$, такие, что $h(f(x_j), f(x_j')) \geq a > 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что x_j и x_j' лежат внутри шара $B(\varepsilon_0)$. Положим $r_j = \max\{|x_j|, |x_j'|\}$. Соединим точки x_j и x_j' замкнутой кривой, лежащей в $\overline{B(r_j)} \setminus \{0\}$. Обозначим эту кривую через C_j и рассмотрим конденсатор $E_j = (\mathbb{B}^n \setminus \{0\}, C_j)$. В силу открытости и непрерывности отображения f, fE_j также является конденсатором. Рассмотрим семейства кривых Γ_{E_j} и Γ_{fE_j}, см. обозначения леммы 2.1. Пусть Γ_j^* — семейство максимальных поднятий Γ_{fE_j} при отображении f с началом в C_j, лежащих в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Покажем, что $\Gamma_j^* \subset \Gamma_{E_j}$.

Предположим противное. Тогда существует кривая $\beta : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ семейства Γ_{fE_j}, для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha : [a, c) \to \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ лежит со своим замыканием $\overline{\alpha}$ в некотором компакте внутри $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Следовательно, $\overline{\alpha}$ — компакт в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Заметим, во-первых, что $c \neq b$, поскольку в противном случае $\overline{\beta}$ — компакт в fA, что противоречит условию $\beta \in \Gamma_{fE_j}$. Рассмотрим множество $G = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lim_{k\to\infty} \alpha(t_k)\}$, где $t_k \in [a, c)$ такие, что $\lim_{k\to\infty} t_k = c : \lim_{k\to\infty} \alpha(t_k) = x$. Заметим, что, переходя к подпоследовательностям, здесь можно ограничиться монотонными последовательностями t_k. Для $x \in G$, в силу непрерывности f в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$, будем иметь $f(\alpha(t_k)) \to f(x)$ при $k \to \infty$, где $t_k \in [a, c)$, $t_k \to c$ при $k \to \infty$. Однако, $f(\alpha(t_k)) = \beta(t_k) \to \beta(c)$ при $k \to \infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на G в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\overline{\alpha}$, см. [13, с. 8,9], $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha([t_k, c))} = \limsup_{k\to\infty} \alpha([t_k, c)) = \liminf_{k\to\infty} \alpha([t_k, c)) \neq \emptyset$ в виду монотонности последовательности множеств $\alpha([t_k, c))$ и, таким образом, G является связным, по [26, I(9.12)]. Таким образом, в силу дискретности f, G не может состоять более чем из одной точки и кривая $\alpha : [a, c) \to \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ продолжается до замкнутой кривой $\alpha : [a, c] \to \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$. Тогда имеем $f(\alpha(c)) = \beta(c)$, т.е., $\alpha(c) \in f^{-1}(\beta(c))$. С другой стороны, можно построить, см. [19, следствие 3.3 гл. II], максимальное поднятие α' кривой $\beta|_{[c, b)}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Тогда, объединяя поднятия α и α', получаем новое поднятие α'' кривой β, которое определено на $[a, c')$, что противоречит максимальности поднятия α.

Таким образом, $\Gamma_j^* \subset \Gamma_{E_j}$. Имеем $\Gamma_{fE_j} > f\Gamma_j^*$, и, следовательно,

$$M\left(\Gamma_{fE_j}\right) \leq M\left(f\Gamma_j^*\right) \leq M\left(f\Gamma_{E_j}\right). \tag{3.2}$$

Заметим, что семейство Γ_{E_j} разбивается на два подсемейства,

$$\Gamma_{E_j} = \Gamma_{E_{j_1}} \cup \Gamma_{E_{j_2}}, \tag{3.3}$$

где $\Gamma_{E_{j_1}}$ — семейство всех кривых $\alpha(t) : [a,\, c) \to \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ с началом в C_j таких, что найдётся $t_k \in [a,\, c)$ с $\alpha(t_k) \to 0$ при $t_k \to c - 0$; $\Gamma_{E_{j_2}}$ — семейство всех кривых $\alpha(t) : [a,\, c) \to \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ с началом в C_j таких, что найдётся $t_k \in [a,\, c)$ с $\operatorname{dist}(\alpha(t_k), \partial\mathbb{B}^n) \to 0$ при $t_k \to c - 0$.

В силу соотношений (3.2) и (3.3),

$$M\left(\Gamma_{fE_j}\right) \leq M(f\Gamma_{E_{j_1}}) + M(f\Gamma_{E_{j_2}}). \tag{3.4}$$

Покажем, что $M(f\Gamma_{E_{j_1}}) = 0$ для любого фиксированного $j \in \mathbb{N}$. Зафиксируем целое число $j \geq 1$ и положим $l_j = \min\{|x_j|,\, |x_j'|\}$. Рассмотрим кольцо $A_{\varepsilon,j} = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x| < l_j\}$ и соответствующее семейство функций

$$\eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(\varepsilon, l_j), & t \in (\varepsilon, l_j), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon, l_j) \end{cases}.$$

Имеем $\int_\varepsilon^{l_j} \eta_\varepsilon(t)\, dt = \frac{1}{I(\varepsilon,l_j)} \int_\varepsilon^{l_j} \psi(t)\, dt = 1$. Следовательно, по определению кольцевого Q-отображения

$$M(f\Gamma_{E_{j_1}}) \leq \mathcal{F}(\varepsilon) := \frac{1}{I(\varepsilon, l_j)^n} \int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\, \psi^n(|x|)\, dm(x). \tag{3.5}$$

Покажем, что $\mathcal{F}(\varepsilon) \to 0$. Учитывая (3.1), имеем следующее соотношение:

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\, \psi^n(|x|)\, dm(x) = G(\varepsilon) \cdot \left(\int\limits_\varepsilon^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt\right)^n,$$

где $G(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Заметим, что

$$\mathcal{F}(\varepsilon) = G(\varepsilon) \cdot \left(1 + \frac{\int_{l_j}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt}{\int_\varepsilon^{l_j} \psi(t)\, dt}\right)^n,$$

где $\int_{l_j}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt < \infty$ — фиксированное число, а $\int_\varepsilon^{l_j} \psi(t)\, dt \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, поскольку величина интеграла слева в (3.1) увеличивается при уменьшении ε. Таким образом, $\mathcal{F}(\varepsilon) \to 0$. Отметим, что левая часть неравенства (3.5) не зависит от ε, а j фиксировано. Отсюда получаем, что $M(f\Gamma_{E_{j_1}}) = 0$. Фиксируем (произвольно) некоторое $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$. Аналогично схеме, приведённой выше, рассмотрим кольцо $A_j = \{x \in \mathbb{R}^n : r_j < |x| < \varepsilon_1\}$ и семейство функций

$$\eta_j(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(r_j, \varepsilon_1), & t \in (r_j,\, \varepsilon_1), \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (r_j,\, \varepsilon_1) \end{cases}.$$

Имеем $\int_{r_j}^{\varepsilon_1} \eta_j(t)\, dt = \frac{1}{I(r_j,\varepsilon_1)} \int_{r_j}^{\varepsilon_1} \psi(t)\, dt = 1$. Таким образом, по определению кольцевого Q-отображения и условию (3.4)

$$M(f\Gamma_{E_j}) \le \mathcal{S}(r_j) := \frac{1}{I(r_j, \varepsilon_1)^n} \int\limits_{r_j<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\, \psi^n(|x|)\, dm(x).$$

В силу условия (3.1), $\mathcal{S}(r_j) \to 0$ при $j \to \infty$. Окончательно, по лемме 2.1, $\operatorname{cap} fE_j \to 0$ при $j \to \infty$. С другой стороны, по лемме 2.2, $\operatorname{cap} fE_j \ge \delta > 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие опровергает предположение, что f не имеет предела при $x \to 0$ в $\overline{\mathbb{R}^n}$. $\square$

4. Формулировка основных результатов

Теорема 4.1. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, удовлетворяющее условию* $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus\, f\,(D \setminus \{x_0\})\right) > 0$. *Если*

$$q_{x_0}(r) = O\left(\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}\right) \tag{4.1}$$

при $r \to 0$, где $q_{x_0}(r)$ среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $|x - x_0| = r$, то f имеет непрерывное продолжение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$. В частности, если при некотором $\varepsilon(x_0)$, $Q(x) \le [\log \frac{1}{|x-x_0|}]^{n-1}$, $\forall\, x \in B(x_0,\, \varepsilon(x_0))$, то выполнено (4.1) *и, значит, справедливо заключение теоремы.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$ и $\mathbb{B}^n \subset D$. Фиксируем $\varepsilon_0 < 1$. Положим $\psi(t) = \frac{1}{t\,\log\frac{1}{t}}$. Заметим, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{Q(x)\, dm(x)}{\left(|x| \log \frac{1}{|x|}\right)^n} = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \left(\int\limits_{|x|=r} \frac{Q(x) dm(x)}{\left(|x| \log \frac{1}{|x|}\right)^n}\, dS \right) dr$$

$$\leq \omega_{n-1} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r \log \frac{1}{r}} = \omega_{n-1} \log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log \frac{1}{\varepsilon_0}} = \omega_{n-1} \cdot I(\varepsilon, \varepsilon_0),$$

где $I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\, dt$. Нужное заключение следует теперь прямо из леммы 3.1. $\Box$

Говорят, что функция $\varphi : D \to R$ с $\varphi \in L^1_{loc}(D)$ имеет *ограниченное среднее колебание* в области D, $\varphi \in BMO$, если

$$\|\varphi\|_* = \sup_{B \subset D} \frac{1}{|B|} \int\limits_B |\varphi(x) - \varphi_B|\, dm(x) < \infty,$$

где точная верхняя грань берётся по всем шарам $B \subset D$ и $\varphi_B = \frac{1}{|B|} \int_B \varphi(x)\, dm(x)$ — среднее значение функции φ на шаре B, см. [12]. С целью упрощения записи, мы обозначаем в дальнейшем

$$\fint\limits_A f(x)\, dm(x) := \frac{1}{|A|} \int\limits_A f(x)\, dm(x),$$

где, как обычно, $|A|$ обозначает лебегову меру множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Известно, что $L^\infty(D) \subset BMO(D) \subset L^p_{loc}(D)$, см., напр., [12]. Следуя работе [11], введём следующее определение. Будем говорить, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, пишем $\varphi \in FMO$ в x_0, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \fint\limits_{B(x_0, \varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\, dm(x) < \infty, \tag{4.2}$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \fint_{B(x_0, \varepsilon)} \varphi(x)\, dm(x)$. Заметим, что при выполнении условия (4.2) возможна ситуация, когда $\overline{\varphi_\varepsilon} \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 4.2. *Пусть $x_0 \in D$, $f : D \setminus \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, удовлетворяющее условию* $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(D \setminus \{x_0\}\right)\right) > 0$. *Если функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0, то f имеет непрерывное продолжение $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$ и $\mathbb{B}^n \subset D$. Пусть $\varepsilon_0 < e^{-1}$. На основании следствия 2.3 в [11] для функции $0 < \psi(t) = \frac{1}{t \log \frac{1}{t}}$ будем иметь, что

$$\int\limits_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|)\, dm(x) = O\left(\log \log \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Заметим также, что

$$I(\varepsilon,\varepsilon_0)\ :=\ \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)\,dt=\log\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}.$$

Оставшаяся часть утверждения следует теперь из леммы 3.1. □

Следствие 4.1. *В частности, если*

$$\int\limits_{|x-x_0|<\varepsilon} Q(x)\,dm(x)=O(\varepsilon^n) \tag{4.3}$$

при $\varepsilon\to 0$, *то* f *имеет непрерывное продолжение в* D.

5. Следствия

Напомним, что изолированная точка x_0 границы ∂D области D называется *устранимой* для отображения f, если существует конечный предел $\lim_{x\to x_0} f(x)$. Если $f(x)\to\infty$ при $x\to x_0$, точку x_0 будем называть *полюсом.* Изолированная точка x_0 границы ∂D называется *существенной особой точкой* отображения $f : D\to\mathbb{R}^n$, если при $x\to x_0$ нет ни конечного, ни бесконечного предела.

Теорема 5.1. *Пусть* x_0 *— изолированная точка границы* D, $f : D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ *— открытое дискретное кольцевое* Q*-отображение в точке* $x_0=0$, *а функция* $Q(x)$ *имеет конечное среднее колебание в точке* x_0, *либо удовлетворяет хотя бы одному из условий* (4.1), (4.3). *Если* x_0 *— существенная особая точка отображения* f, *то* $\mathrm{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f\left(U\setminus\{x_0\}\right)\right)=0$ *для любой окрестности* U *точки* x_0.

Доказательство непосредственно вытекает, соответственно, из теорем 4.2, 4.1 и следствия 4.1.

Теорема 5.2. *Пусть* x_0 *— изолированная точка границы* D, $f : D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ *— открытое дискретное кольцевое* Q*-отображение в точке* x_0, *а функция* $Q(x)$ *имеет конечное среднее колебание в точке* x_0, *либо удовлетворяет хотя бы одному из условий* (4.1), (4.3). *Тогда точка* x_0 *является устранимой для отображения* f *в том и только том случае, когда* f *ограничено в некоторой окрестности* U *точки* x_0.

Доказательство. Предположим, что точка x_0 устранима, т.е. существует предел $\lim_{x\to x_0} f(x)=A<\infty$. Тогда $|f(x)|\le|A|+1$ в достаточно малой окрестности U точки x_0. Обратно, пусть существует окрестность U точки x_0 такая, что $|f(x)|\le M$ для некоторого

$M \in (0, \infty)$ и всех $x \in U \setminus \{x_0\}$. Тогда cap $\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(U \setminus \{x_0\}\right)\right) > 0$ и заключение следует из теоремы 5.1. $\square$

Теорема 5.3. *Пусть x_0 — изолированная точка границы D, $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0, либо удовлетворяет хотя бы одному из условий* (4.1)*,* (4.3)*. Если* cap $\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(U \setminus \{x_0\}\right)\right) > 0$ *для некоторой окрестности U точки x_0, то f может быть непрерывным образом продолжено до открытого дискретного кольцевого Q-отображения $f : D \cup \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$.*

Доказательство. Действительно, f продолжается до непрерывного отображения $f : D \cup \{x_0\} \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в силу, соответственно, теорем 4.2, 4.1 и следствия 4.1. Известно, что дискретные открытые отображения в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, либо сохраняют ориентацию, либо анти-сохраняют, см., напр., [19, разд. 4 гл. I]. Пусть f для определённости сохраняет ориентацию. Покажем, что продолженное отображение сохраняет ориентацию, открыто и дискретно. Обозначим, как обычно, через $B_f(D)$ множество точек ветвления отображения f в области D, а через $B_f(D')$ — множество точек ветвления отображения f в области $D' = D \cup \{x_0\}$. Если x_0 — точка локальной гомеоморфности отображения f, доказывать нечего. Пусть точка $x_0 \in B_f(D')$. По теореме Чернавского $\dim B_f(D) = \dim f\left(B_f(D)\right) \leq n-2$, см., напр., [19, теорему 4.6 гл. I], где dim обозначает топологическую размерность множества, см. [8]. Тогда получим

$$\dim f\left(B_f(D')\right) \leq n-2, \tag{5.1}$$

т.к. $f\left(B_f(D')\right) = f\left(B_f(D)\right) \bigcup \{f(x_0)\}$, множество $\{f(x_0)\}$ замкнуто и топологическая размерность каждого из множеств $f\left(B_f(D)\right)$ и $\{f(x_0)\}$ не превышает $n-2$, см. [8, следствие 1 гл. III разд. 3]. Пусть G — область в D' с $G \Subset D'$ и пусть $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$. Тогда, в силу (5.1), существует точка $y_0 \notin f\left(B_f\left(D'\right)\right)$, принадлежащая той же компоненте связности множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\partial G)$, что и y. В силу того, что топологический индекс есть величина постоянная на каждой связной компоненте множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\partial G)$, см. в [18, § 2 гл. I], будем иметь

$$\mu(y, f, G) = \mu(y_0, f, G) = \sum_{x \in G \cap f^{-1}(y_0)} i(x, f) > 0.$$

Таким образом, отображение f сохраняет ориентацию в D'. Наконец, для любого $y \in f(D')$, в силу дискретности отображения f в области D, множество $\left\{f^{-1}(y)\right\}$ не более чем счётно и потому $\dim \left\{f^{-1}(y)\right\} = 0$. Следовательно, по [24, с. 333], отображение f открыто и дискретно, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 5.4 (Аналог теоремы Сохоцкого). *Пусть x_0 — изолированная точка границы D, $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0, либо удовлетворяет хотя бы одному из условий* (4.1), (4.3). *Если x_0 — существенная особая точка отображения f, то для любого $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ найдётся последовательность $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$, такая что $f(x_k) \to a$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Допустим, что заключение теоремы неверно для некоторого $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Тогда существуют окрестность U точки x_0 и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что
$$h\left(f(x),\, a\right) \geq \varepsilon_0 \qquad \forall\, x \in U \setminus \{x_0\}$$
и, по неравенству треугольника, $d_0 = h\left(B\left(a,\, \varepsilon_0/2\right),\, f\left(U \setminus \{x_0\}\right)\right) \geq \varepsilon_0/2$. Следовательно, cap $\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(U \setminus \{x_0\}\right)\right) > 0$. Отсюда по теореме 5.1 следует существование предела (конечного или бесконечного) отображения f в точке x_0, что противоречит первоначальному предположению. □

Теорема 5.5. *Пусть x_0 — изолированная точка границы D, $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке x_0, а функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке x_0, либо удовлетворяет хотя бы одному из условий* (4.1), (4.3). *Если x_0 существенно особая точка отображения f, то существует множество $C \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ типа F_σ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ ёмкости нуль такое, что*
$$N\left(y, f, U \setminus \{x_0\}\right) = \infty$$
для любой окрестности U точки x_0 и для всех $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$.

Доказательство. Пусть U — произвольная окрестность точки x_0. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x_0 = 0$ и $U = \mathbb{B}^n$. Рассмотрим множества $V_k = B(1/k) \setminus \{0\}\,,\ k = 1, 2, \ldots.$ Полагаем
$$C = \bigcup_{k=1}^{\infty}\ \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(V_k). \tag{5.2}$$

По теореме 5.1 каждое из множеств $B_k := \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(V_k)$ в объединении правой части соотношения (5.2) имеет ёмкость нуль. Тогда C также имеет ёмкость нуль, см., напр., [7, с. 126]. Фиксируем $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus C$. Тогда
$$y \in \bigcap_{k=1}^{\infty}\ f(V_k). \tag{5.3}$$

Из (5.3) вытекает существование подпоследовательности $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что $x_{k_i} \to 0$ при $i \to \infty$ и $f(x_{k_i}) = y$, $i = 1, 2, \ldots$. Теорема 5.5 доказана. $\Box$

Пусть теперь D — область в $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$. Будем говорить, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞, если функция $\varphi^*(x) = \varphi(\frac{x}{|x|^2})$ имеет конечное среднее колебание в точке 0. Заметим, что отображение $\psi(x) = \frac{x}{|x|^2}$ подобно отображает сферу $S(0, r)$ на сферу $S\left(0, 1/r\right)$, откуда следует, что $|J(x, \psi)| = \left(1/|x|\right)^{2n}$. Согласно сказанному, прибегая к замене переменной в интеграле, мы можем переформулировать определение конечного среднего колебания в точке ∞ в следующем виде. Будем говорить, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞, пишем $\varphi \in FMO(\infty)$, если при $R \to \infty$

$$\int\limits_{|x|>R} |\varphi(x) - \varphi_R| \, \frac{dm(x)}{|x|^{2n}} = O\Big(\frac{1}{R^n}\Big),$$

где $\varphi_R = \frac{R^n}{\Omega_n} \cdot \int_{|x|>R} \varphi(x) \, \frac{dm(x)}{|x|^{2n}}$, а Ω_n — объём единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Аналогично для бесконечности можно переформулировать условия вида (4.1), (4.3), соответственно:

$$\fint\limits_{S(0,\,R)} Q(x) \, dS = O\big(\left[\log R\right]^{n-1} \big), \tag{5.4}$$

$$\int\limits_{|x|>R} Q(x) \, \frac{dm(x)}{|x|^{2n}} = O\Big(\frac{1}{R^n}\Big). \tag{5.5}$$

Будем говорить, что отображение $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ есть *кольцевое Q-отображение в точке $x_0 = \infty$*, если отображение $\widetilde{f} = f(\frac{x}{|x|^2})$ является кольцевым Q'-отображением в точке $x_0 = 0$ с $Q' = Q(\frac{x}{|x|^2})$. На основании теорем 4.2, 4.1 и следствия 4.1, получаем следующее утверждение.

Теорема 5.6 (Аналог теоремы Лиувилля). *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение в точке $x_0 = \infty$, функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке ∞, либо удовлетворяет хотя бы одному из условий* (5.4), (5.5). *Тогда* $\operatorname{cap}\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\left(\mathbb{R}^n\right)\right) = 0$. *В частности, f не может отображать всё $\mathbb{R}^n$ на ограниченную область.*

Рассмотрим отдельно случай $n = 2$. Пусть $\Delta = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\right\}$.

Теорема 5.7. *Пусть $f : \Delta \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{C}}$ — открытое дискретное Q-отображение, которое не принимает, по крайней мере, три значения в $\overline{\mathbb{C}}$. Если $Q(z)$ имеет конечное среднее колебание в нуле, либо удовлетворяет одному из условий типа* (4.1), (4.3) *в точке $z_0 = 0$, то отображение f может быть непрерывным образом продолжено в Δ до открытого дискретного Q-отображения $\overline{f} : \Delta \to \overline{\mathbb{C}}$.*

Доказательство. Доказательство основано на теореме Стоилова о факторизации, см. [23, разд. 5 гл. V]. Согласно упомянутой теореме, отображение f может быть представлено как композиция $f = \varphi \circ g$, где g — гомеоморфизм, φ — аналитическая функция. В таком случае, отображение g является Q-гомеоморфизмом. По лемме 4.1, теореме 4.1 и следствию 4.2 в [11], отображение g допускает гомеоморфное продолжение $\overline{g}$ в Δ. В таком случае, точка $\overline{g}(0)$ является изолированной точкой границы области $g(\Delta)$ для функции φ. Из условия вытекает, что φ также опускает не менее 3-х значений в $\overline{\mathbb{C}}$. Возможность непрерывного продолжения следует теперь из классической теоремы Пикара для аналитических функций. $\square$

Теорема 5.8 (Аналог теоремы Пикара при $n = 2$). *Пусть $f : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$ — открытое дискретное Q-отображение, а $Q(z)$ имеет конечное среднее колебание в ∞ либо удовлетворяет хотя бы одному из условий* (5.4), (5.5). *Тогда f принимает все значения в $\overline{\mathbb{C}}$, кроме, может быть, двух.*

Практически для всех известных ныне классов отображений установлены оценки вида (1.2). Сформулированные в статье результаты могут быть применены, например, к отображениям с *конечным искажением длины,* см., напр., [15, теорема 6.10], см. также [17]. Более того, всё вышеизложенное справедливо для так называемых отображений с конечным искажением. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением,* если $f \in W^{1,n}_{loc}(D)$ и п.в. $\|f'(x)\|^n \le K(x) \cdot J(x, f)$ для некоторой функции $K(x) : D \to [1, \infty)$, см., напр., [9, 10].

Замечание 5.1. Каждое открытое дискретное отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ с конечным искажением такое, что $K(x) \in L^{n-1}_{loc}$ и мера множества B_f точек ветвления отображения f равна нулю, является Q-отображением с $Q = K^{n-1}(x)$, см. замечание 4.10, теорему 6.10 в [15].

Литература

[1] C. Andreian Cazacu, *On the length-area dilatation* // Complex Var. Theory Appl., **50** (2005), N 7–11, 765–776.

[2] C. Andreian Cazacu, *Some formulae on the extremal length in n-dimensional case*, Proc. Rom.-Finn. Sem. on Teichmüller Spaces and Quasiconformal Mappings, Brazov, 1969, pp. 87–102, Publ. House of Acad. Soc. Rep. Romania, Bucharest, 1971.

[3] C. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen, *On conformal dilatation in space* // Intern. Journ. Math. and Math. Scie., **22** (2003), 1397–1420.

[4] M. Cristea, *Local homeomorphisms having local ACL^n inverses* // Compl. Var. and Ellipt. Equat., **53** (2008), N 1, 77–99.

[5] M. Cristea, *Open discrete mappings having local ACL^n inverses* // 2008, Preprint Ser. Inst. Math. of Romanian Acad., Inst. de Math. "Simion Stoilow"Al Acad. Rom., 2008.6.

[6] F. W. Gehring, *Rings and quasiconformal mappings in space* // Trans. Amer. Math. Soc., **103** (1962), 353–393.

[7] В. М. Гольдштейн и Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщёнными производными и квазиконформные отображения*, Новосибирск: Наука, 1983.

[8] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1948.

[9] T. Iwaniec and G. Martin, *Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis*, Oxford: Clarendon Press, 2001.

[10] T. Iwaniec and V. Sverák, *On mappings with integrable dilatation* // Proc. Amer. Math. Soc., **118** (1993), 181–188.

[11] А. Игнатьев и В. Рязанов, *Конечное среднее колебание в теории отображений* // Укр. матем. вестник, **2** (2005), N 3, 395–417.

[12] F. John and L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation* // Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961), 415–426.

[13] К. Куратовский, *Топология*, т. 2, М.: Мир, 1969, 624 с.

[14] O. Martio, S. Rickman and J. Vaisala, *Distortion and singularities of quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **465** (1970), 1–13.

[15] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov, *Mappings with finite length distortion* // J. d'Anal. Math., **93** (2004), 215–236.

[16] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov, *On Q-homeomorphisms* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1, **30** (2005), N 1, 49–69.

[17] В. М. Миклюков, *Относительное расстояние М. А. Лаврентьева и простые концы на непараметрических поверхностях*, Укр. матем. вестник, **1** (2004), N 3, 349–372.

[18] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Новосибирск: Наука, 1982.

[19] S. Rickman, *Quasiregular mappings*, Results in Mathematic and Related Areas (3), 26. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[20] V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov, *On ring solutions of Beltrami equations* // J. d'Anal. Math., **96** (2005), 117–150.

[21] Е. А. Севостьянов, *Об устранении изолированных особенностей открытых дискретных отображений* // Вестн. Днепр. нац. ун–та, **12** (2007), 124–133.

[22] Е. А. Севостьянов, *Аналоги теорем Сохоцкого и Пикара для отображений с конечным искажением длины* // Труды ИПММ НАН Украины, **15** (2007), 190–198.

[23] С. Стоилов, *Лекции о топологических принципах теории аналитических функций*, Москва: Наука, 1964.

[24] C. J. Titus and G. S. Young, *The extension of interiority, with some applications* // Trans. Amer. Math. Soc., **103** (1962), 329–340.

[25] П. М. Тамразов, *Модули и экстремальные метрики в неориентированных и скрученных римановых многообразиях* // Укр. матем. ж., **50** (1998), N 10, 1388–1398.

[26] G. T. Whyburn, *Analytic topology*, American Mathematical Society, Rhode Island, 1942.

Сведения об авторах

Евгений Александрович Севостьянов

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины
Розы Люксембург 74,
Донецк, 83114,
Украина
E-Mail: sevostyanov@skif.net,
e_sevostyanov@rambler.ru,
sevostyanov@iamm.ac.donetsk.ua