©2010. **А.В. Мартыненко, В.Н. Шраменко**

ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ВБЛИЗИ ВРЕМЕНИ ОБОСТРЕНИЯ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИСТОЧНИКОМ И НЕОДНОРОДНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

В настоящей работе рассматривается квазилинейное параболическое уравнение с источником и неоднородной плотностью следующего вида

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = div(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) + \rho(x)u^p.$$

При условиях на параметры уравнения, при которых решение задачи Коши взрывается за конечное время, получена точная универсальная, т.е. не зависящая от начальной функции, оценка решения вблизи времени обострения.

Ключевые слова: неоднородная плотность, вырождающееся параболическое уравнение, режим с обострением
MSC (2000):

1. Введение.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения с неоднородной плотностью и источником

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = div(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) + \rho(x)u^p, \tag{1}$$

$$(x,t) \in Q_T = R^N \times (0,T), \quad T > 0, \quad N \geq 1,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R^N. \tag{2}$$

Всюду далее предполагаем, что $\lambda > 0$, $\quad m + \lambda - 2 > 0$, $\quad p > m + \lambda - 1$, $\rho(x) = |x|^{-l}$, $0 \leq l < \lambda + 1 < N$, $u_0(x)$-неотрицательная измеримая функция из класса $L_{1,loc}(R^N)$ и такая, что

$$\int\limits_{R^N} \rho(x)u_0^{1+\frac{m+\lambda-1}{\lambda}}dx < \infty.$$

Хорошо известно, что решение уравнения (1) не всегда существует глобально по времени. Более точно, если $p > p^*(l) = m+\lambda-1+\frac{\lambda+1-l}{N-l}$ и начальная функция мала в некотором смысле, то решение существует глобально по времени. Если же $1 < p < p^*(l)$, то любое нетривиальное решение задачи (1), (2) взрывается за конечное время. Этот результат для случая неоднородной плотности ($l > 0$) был впервые получен в работе [17]. Для однородной плотности ($l = 0$) условия существования и несуществования глобального по времени решения при различных значениях параметров были получены в работах [9], [10], [11], [12], [13],[14].

В работах [15], [16] рассматривались уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) + \rho(x)u^p$$

и

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = div(u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) + u^p$$

соответственно. Были получены условия на параметры уравнения при которых решение задачи Коши взрывается за конечное время, а так же точные оценки решения вблизи времени обострения.

Так же следует отметить работу [19], в которой исследовалась задача Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(a(x)u^{m-1}|Du|^{\lambda-1}Du) + u^p, \quad a(x) = |x|^l.$$

Оказалось, что в данном случае условия глобальной разрешимости и неразрешимости такие же, как и для задачи (1)-(2). Кроме того в этой работе была получена универсальная оценка решения вблизи времени обострения. Введем обозначения

$$K_{l,\omega} = (N-l)(m+\lambda-2) + \lambda + 1 - l,$$

$$Q = \frac{(N-l)(p-m-\lambda+1)}{\lambda+1-l},$$

$$p^*(l) = m + \lambda - 1 + \frac{\lambda+1-l}{N-l}.$$

В работе [17] рассматривалась задача (1), (2) и были доказаны следующие теоремы

Теорема 1. *Пусть $p > p^*(l)$ и*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u_0^q(x)dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u_0(x)dx \le \delta, \tag{3}$$

где $q > Q$ и δ-достаточно малое число, зависящее лишь от параметров уравнения.
Тогда задача (1)-(2)имеет глобальное по времени решение $u(x,\tau)$ и справедливы оценки

$$\|u(x,\tau)\|_{\infty,\mathbb{R}^N\times(\frac{t}{2},t)} \le \gamma t^{-\frac{N-l}{K_l}} \left[\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u(x,\tau)dx\right]^{\frac{\lambda+1-l}{K_l}} \quad \forall t \in (0,\infty), \tag{4}$$

$$\sup_{0<\tau<t} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u(x,\tau)dx \le \gamma \int\limits_{\mathbb{R}^N} \rho u_0(x)dx \quad \forall t \in (0,\infty) \tag{5}$$

где γ зависит только от параметров уравнения.

Условия несуществования решения в целом по времени дает следующая теорема.

Теорема 2. *При условии, что $p < p^*(l)$, любое нетривиальное решение задачи (1)-(2) "взрывается"за конечное время, т. е. найдутся $0 < \theta < 1$ и $0 < R < \infty$, что*

$$\int\limits_{B_R} \rho(x) u^{1-\theta} dx \to \infty, \quad \text{при} \quad t \to T < \infty.$$

Цель данной работы - получить точную оценку решения уравнения (1) вблизи времени обострения, которая носит универсальный характер, т. е. не зависит от начальных данных.

Введем понятие обобщенного решения , для чего заметим, что (1) допускает эквивалентную запись:

$$\rho(x) \frac{\partial v^\beta}{\partial t} = \beta^\lambda div(|Dv|^{\lambda-1} Dv) + \rho(x) v^\mu,$$

где $\beta = \frac{\lambda}{m+\lambda-1}$, $\mu = \frac{\lambda p}{m+\lambda-1}$, $u = v^\beta$.

Определение. *Будем говорить, что $u(x,t)$ есть обобщенное решение (или просто решение) задачи (1), (2) в $Q_T = R^N \times (0,T)$, если $u^{\frac{m+\lambda-1}{\lambda}}$ является элементом пространства*

$$L_{\lambda+1}(0,T,W^1_{\lambda+1}(R^N)) \cap L_{\mu+1}(0,T,L_{\mu+1,\rho}(R^N)) \cap C([0,T), L_{\beta+1,\rho}(R^N))$$

и удовлетворяет задаче (1), (2) в смысле интегрального тождества. Существование решения доказывается аналогично работам [20], [21]. Гельдеровость решений показана в работе [18].

Замечание. Поскольку при доказательстве основных результатов будут использоваться локальные энергетические оценки, то модельность уравнения (1) не принципиальна. Более того, все результаты справедливы при более общих предположениях на поведение $\rho(x)$.

Перейдем к формулировке основных результатов, предварительно оговорив, что через γ, γ_1, γ_2,... будем обозначать постоянные, которые зависят только от параметров задачи l, m, λ, p, N.

В следующей теореме формулируется основной результат работы

Теорема 3. *Пусть $u(x,t)$-решение уравнения (1), существующее при $t \in (0,T)$, $T > 0$ и выполнены условия*

$$0 \le l < \lambda + 1 < N, \quad p < p^*(l),$$

тогда для всех $t \in (\frac{T}{2}, T)$, $\quad |x| \le \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{1}{H}}$ *справедлива оценка*

$$u(x,t) \le \gamma (T-t)^{-\frac{1}{p-1}}, \tag{6}$$

где показатель H *определяются следующим образом*

$$H = \frac{(p-1)(\lambda+1-l)}{p-m-\lambda+1}.$$

2. Доказательство теоремы 3.

Для доказательства теоремы нам необходима следующая интегральная оценка.

Лемма 1. *Пусть* $0 < \theta < 1$ *и* $u(x,t)$*-решение уравнения (1) существующее при* $t \in (0,T)$, $T > 0$. *Тогда при* $R \le (T-t)^{\frac{1}{H}}$ *справедлива оценка*

$$\int\limits_{B_R} \rho(x) u^{1-\theta} dx \le \gamma R^{N-l-\frac{(\lambda+1-l)(1-\theta)}{p-m-\lambda+1}}, \tag{7}$$

где $\gamma = \gamma(\theta) > 0$.

Доказательство. Пусть B_R-шар с центром в точке $x_0 = 0$ и радиусом R. Определим гладкую срезающую функцию $\xi = \xi(x)$ такую, что $\xi(x) = 1$ при $x \in B_R$ и $\xi(x) = 0$ при $x \notin B_{2R}$, $\quad |D\xi| \le \gamma/R$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и некоторое $s > 0$, тогда умножив обе части уравнения на функцию $(u+\varepsilon)^{-\theta}\xi^s$ и проинтегрировав по B_{2R}, получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{B_{2R}} \rho(x)(u+\varepsilon)^{1-\theta}\xi^s dx \ge \gamma_1 \int\limits_{B_{2R}} u^{m-1}|Du|^{\lambda+1}(u+\varepsilon)^{-(1+\theta)}\xi^s dx -$$

$$-\gamma_2 \int\limits_{B_{2R}} u^{m-1}|Du|^{\lambda}(u+\varepsilon)^{-\theta}\xi^{s-1}|D\xi| dx + \gamma_3 \int\limits_{B_{2R}} \rho(x) u^p (u+\varepsilon)^{-\theta}\xi^s dx.$$

Применяя ко второму слагаемому правой части неравенство Юнга с достаточно малым δ и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{B_{2R}} \rho u^{1-\theta}\xi^s dx \ge \gamma_1 \int\limits_{B_{2R}} u^{m-\theta-2}|Du|^{\lambda+1}\xi^s dx -$$

$$-\frac{\gamma_2}{R^{\lambda+1}} \int\limits_{B_{2R}} u^{m+\lambda-\theta-1}\xi^{s-\lambda-1} dx + \gamma_3 \int\limits_{B_{2R}} \rho(x) u^{p-\theta}\xi^s dx = \gamma_1 I_1 - \gamma_2 I_2 + \gamma_3 I_3. \tag{8}$$

Пользуясь неравенством Юнга с произвольным $\delta > 0$ и выбирая $s > \frac{(\lambda+1)(p-\theta)}{p-m-\lambda+1}$, оцениваем I_2

$$I_2 = \frac{\gamma_2}{R^{\lambda+1}} \int\limits_{B_{2R}} \rho^{\frac{m+\lambda-\theta-1}{p-\theta}} \rho^{-\frac{m+\lambda-\theta-1}{p-\theta}} u^{m+\lambda-\theta-1} \xi^{s-\lambda-1} dx \leq$$

$$\leq \delta I_3 + \gamma(\delta) R^{-\frac{(\lambda+1)(p-\theta)}{p-m-\lambda+1}} \int\limits_{B_{2R}} \rho^{-\frac{m+\lambda-\theta-1}{p-m-\lambda+1}} dx \leq \delta I_3 + \gamma(\delta) R^{\alpha}, \tag{9}$$

где

$$\alpha = N + \frac{l(m+\lambda-\theta-1) - (\lambda+1)(p-\theta)}{p-m-\lambda+1}.$$

Пусть $E = E(t) = \int\limits_{B_{2R}} \rho u^{1-\theta} \xi^s dx$, тогда, выбрав $\delta > 0$ достаточно малой, из (8) и (9) имеем

$$\frac{d}{dt} E \geq \gamma_3 I_3 - \gamma_2 R^{\alpha}. \tag{10}$$

Применив неравенство Гельдера, получим

$$E \leq I_3^{\frac{1-\theta}{p-\theta}} \Bigg(\int\limits_{B_{2R}} \rho \xi^s dx \Bigg)^{\frac{p-1}{p-\theta}}.$$

Следовательно,

$$I_3 \geq \gamma E^{\frac{p-\theta}{1-\theta}} R^{-\frac{(N-l)(p-1)}{1-\theta}},$$

Таким образом, из (10) получаем

$$\frac{d}{dt} E \geq \gamma R^{-\frac{(N-l)(p-1)}{1-\theta}} E^{\frac{p-\theta}{1-\theta}} - \gamma_2 R^{\alpha}. \tag{11}$$

Для произвольных $R > 0, \quad t_0 \in (0, T)$ возможны два случая

$$1) R^{-\frac{(N-l)(p-1)}{1-\theta}} E^{\frac{p-\theta}{1-\theta}} < \gamma R^{\alpha}, \quad 2) R^{-\frac{(N-l)(p-1)}{1-\theta}} E^{\frac{p-\theta}{1-\theta}} > \gamma R^{\alpha}.$$

В случае 1) сразу получаем

$$E(t_0) \leq \gamma R^{N-l-\frac{(\lambda+1-l)(1-\theta)}{p-m-\lambda+1}}. \tag{12}$$

В случае 2) $\forall t \in (t_0, T)$ получаем неравенство

$$\frac{d}{dt} E \geq \gamma R^{-\frac{(N-l)(p-1)}{1-\theta}} E^{\frac{p-\theta}{1-\theta}},$$

после интегрирования которого на (t_0, T) получим

$$E(t_0) \leq \gamma R^{N-l} (T - t_0)^{-\frac{1-\theta}{p-1}}.$$

При условии, что $R \le (T-t_0)^{\frac{1}{H}}$ из последнего получаем (12). Таким образом, (12) справедливо при любом $t \in (0,T)$ и $R \le (T-t)^{\frac{1}{H}}$. Лемма доказана. □

Обозначим $U_i = B_{r_i} \times (t_i, t)$, $0 < r_1 < r_2$, $0 < t_2 < t_1 < t$, $0 < h_2 < h_1$.

Лемма 2. *Пусть $u(x,t)$-решение уравнения (1), существующее при $t \in (0,T)$, $T > 0$. Тогда справедлива оценка*

$$\sup_{t_1<\tau<t} \int_{B_1} \rho (u-h_1)_+^{s+1} dx + \iint_{U_1} \left| D(u-h_1)_+^{\frac{m+\lambda+s-1}{\lambda+1}} \right|^{\lambda+1} dx d\tau \le$$

$$\le \gamma F(r_1, r_2, t_1, t_2, h_1, h_2) \iint_{U_2} \rho (u-h_2)_+^{p+s} dx d\tau, \tag{13}$$

$$F(r_1, r_2, t_1, t_2, h_1, h_2) =$$

$$= \frac{1}{t_1 - t_2} \cdot \frac{1}{(h_1-h_2)^{p-1}} + \frac{r_2^l}{(r_2-r_1)^{\lambda+1}} \cdot \frac{h_1^{m-1}}{(h_1-h_2)^{p-\lambda}} + \left(\frac{h_1}{h_1-h_2} \right)^p,$$

где $s > max[1, 2-m]$, γ зависит от s. Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3.1. из работы [15].

Введем $z_i(x,t)$-гладкие функции такие, что

$$z_i(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{в} \quad U_{i-1}, \\ 0 & \text{вне} \quad U_i \end{cases}, \quad |Dz_i| \le \frac{1}{r_i - r_{i-1}}.$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы 2 и кроме того*

$$p < p_\nu = m + \lambda - 1 + \nu \frac{\lambda + 1 - l}{N - l},$$

с некоторым $\nu \in (0,1)$. Тогда справедлива оценка

$$\sup_{t_1<\tau<t} \int_{B_1} \rho v_1^q dx + \iint_{U_1} \left| D(v_1 z_1) \right|^{\lambda+1} dx d\tau \le$$

$$\le \varepsilon \iint_{U_3} \left| D(v_2 z_3) \right|^{\lambda+1} dx d\tau + C(\varepsilon) \widetilde{F}^{M_1} (t - t_3) \left[\sup_{t_3<\tau<t} \int_{B_3} \rho (v_2 z_3)^\mu dx \right]^{M_2}. \tag{14}$$

Здесь $\mu \in (0, \beta)$, $\varepsilon > 0$, $C(\varepsilon) > 0$ и использованы следующие обозначения $v_i = (u-h_i)_+^{\frac{m+\lambda+s-1}{\lambda+1}}$, $q = \frac{(s+1)(\lambda+1)}{m+\lambda+s-1}$, $\beta = \frac{(p+s)(\lambda+1)}{m+\lambda+s-1}$,

$$a = \frac{(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\beta})(N-l)}{\frac{N-l}{\mu} - \frac{N-\lambda-1}{\lambda+1}}, \quad M_1 = \frac{\lambda+1}{\lambda+1-\beta a}, \quad M_2 = M_1(1-a)\frac{\beta}{\mu},$$

$$\widetilde{F} = F(r_1, r_2, t_1, t_2, h_1, h_2) + \frac{r_2^l}{(r_1 - r_0)^{\lambda+1}(h_1 - h_2)^{p-m-\lambda+1}}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\iint\limits_{U_1} \Big| D(v_1 z_1) \Big|^{\lambda+1} dx d\tau \le \gamma \iint\limits_{U_1} \Big| Dv_1 \Big|^{\lambda+1} dx d\tau + \gamma |Dz_1|^{\lambda+1} \iint\limits_{U_1} v_1^{\lambda+1} dx d\tau,$$

и к тому же

$$\iint\limits_{U_1} v_1^{\lambda+1} dx d\tau \le \frac{r_2^l}{(h_1 - h_2)^{p-m-\lambda+1}} \iint\limits_{U_2} \rho v_2^\beta dx d\tau,$$

поэтому из леммы 2 следует

$$\sup_{t_1<\tau<t} \int\limits_{B_1} \rho v_1^q dx + \iint\limits_{U_1} \Big| D(v_1 z_1) \Big|^{\lambda+1} dx d\tau \le \gamma \widetilde{F} \iint\limits_{U_3} \rho (v_2 z_3)^\beta dx. \tag{15}$$

Функция $v_2 z_3$ финитна в B_3, следовательно справедливо весовое мультипликативное неравенство [22]

$$\left[\int\limits_{B_3} \rho (v_2 z_3)^\beta dx \right]^{\frac{1}{\beta}} \le C \left[\int\limits_{B_3} \Big| D(v_2 z_3) \Big|^{\lambda+1} dx \right]^{\frac{a}{\lambda+1}} \cdot \left[\int\limits_{B_3} \rho (v_2 z_3)^\mu dx \right]^{\frac{1-a}{\mu}}, \tag{16}$$

где использованы обозначения из условия леммы.

Условия, которым должны удовлетворять показатели в (16), сводятся к неравенствам

$$0 < \mu < \beta, \quad p < \frac{(N-l)(m+\lambda-1) + s(\lambda+1-l)}{N-\lambda-1}.$$

Нетрудно видеть, что справедливость последнего неравенства следует из условий $p < p_\nu$, $l < \lambda+1$ и того, что $s \ge 1$.

Проверка условия $\frac{a\beta}{\lambda+1} < 1$ сводится к неравенству

$$p < m + \lambda - 1 + \frac{\mu(m+\lambda+s-1)}{\lambda+1} \cdot \frac{\lambda+1-l}{N-l}.$$

Очевидно, что оно имеет место, если $\frac{\mu(m+\lambda+s-1)}{\lambda+1} = \nu$, причем, поскольку $\nu < 1$, мы должны выбрать $\mu < \frac{\lambda+1}{m+\lambda+s-1} < \beta$.

Далее, используя неравенство Юнга с $\varepsilon > 0$ и сопряженными показателями $\frac{\lambda+1}{a\beta}$ и M_1, из (16) получим

$$\widetilde{F} \int\limits_{B_3} \rho (v_2 z_3)^\beta dx \le \varepsilon \int\limits_{B_3} \Big| D(v_2 z_3) \Big|^{\lambda+1} dx + \mathrm{C}(\varepsilon) \widetilde{F}^{M_1} \left[\int\limits_{B_3} \rho (v_2 z_3)^\mu dx \right]^{M_2}.$$

Интегрируя последнее неравенство по $\tau \in (t_3, t)$, имеем

$$\widetilde{F}\iint\limits_{U_3}\rho(v_2 z_3)^\beta dx d\tau \le$$

$$\le \varepsilon\iint\limits_{U_3}\Big|D(v_2 z_3)\Big|^{\lambda+1} dx d\tau + \mathrm{C}(\varepsilon)\widetilde{F}^{M_1}(t-t_3)\Big[\sup_{t_3<\tau<t}\int\limits_{B_3}\rho(v_2 z_3)^\mu dx\Big]^{M_2}. \tag{17}$$

Оценка (14) следует из (15) и (17).

Лемма доказана. □

Замечание. Число ν появляется в лемме из технических соображений, в дальнейшем оно исчезает из показателя в оценке решения. Поскольку ν может быть сколь угодно близким к единице, то теорема 3 имеет место для произвольных $p < p^*(l)$.

Продолжим доказательство теоремы. Введем в рассмотрение последовательности

$$\rho_n = R_2 - (R_2 - R_1)2^{-n}, \quad \theta_n = \tau_2 + (\tau_1 - \tau_2)2^{-n}, \quad k_n = a_2 + (a_1 - a_2)2^{-n},$$

где $a_1 > a_2 > 0, \quad R_2 > R_1 > 0, \quad t > \tau_1 > \tau_2 > 0, \quad n = \overline{0,\infty}.$

Обозначим $U_i = B_i \times (\theta_i, t), \quad B_i = B_{\rho_i}, \quad \xi_i$-гладкие функции такие, что

$$\xi_i(x,t) = \begin{cases} 1 & \text{в} \quad U_{i-1}, \\ 0 & \text{вне} \quad U_i \end{cases}, \quad |D\xi_i| \le \frac{1}{\rho_i - \rho_{i-1}}, \quad i = \overline{1,\infty}.$$

В лемме 3 можно положить

$$h_1 = k_n, \quad h_2 = k_{n+2}, \quad r_0 = \rho_{n-1}, \quad r_1 = \rho_n, \quad r_2 = \rho_{n+1}, \quad r_3 = \rho_{n+2},$$

$$t_0 = \theta_{n-1}, \quad t_1 = \theta_n, \quad t_2 = \theta_{n+1}, \quad t_3 = \theta_{n+2}, \quad z_1 = \xi_n, \quad z_3 = \xi_{n+2}.$$

Тогда элементарными вычислениями получаем

$$\widetilde{F} \le d^n F(R_1, R_2, \tau_1, \tau_2, a_1, a_2) = d^n F_1, \quad \text{где} \quad d = const > 1,$$

и оценка (14) принимает вид

$$\sup_{\theta_n<\tau<t}\int\limits_{B_n}\rho v_n^q dx + \iint\limits_{U_n}\Big|D(v_n\xi_n)\Big|^{\lambda+1} dx d\tau \le \varepsilon\iint\limits_{U_{n+2}}\Big|D(v_{n+2}\xi_{n+2})\Big|^{\lambda+1} dx d\tau +$$

$$+C(\varepsilon)d^n F_1^{M_1}(t-\theta_{n+2})\Big[\sup_{\theta_{n+2}<\tau<t}\int\limits_{B_{n+2}}\rho(v_{n+2}\xi_{n+2})^\mu dx\Big]^{M_2}. \tag{18}$$

Пользуясь обозначением $I_n = \iint\limits_{U_n} |D(v_n\xi_n)|^{\lambda+1} dx d\tau$ и возростанием по n второго члена в правой части реккурентного неравенства (18) получаем

$$\sup_{\theta_1<\tau<t} \int\limits_{B_1} \rho v_1^q dx + I_1 \leq$$

$$\leq \varepsilon^n I_{2n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} (\varepsilon^{\frac{i}{2i+1}} d)^{2i+1} C(\varepsilon) F_1^{M_1}(t-\theta_\infty) \Bigg[\sup_{\theta_\infty<\tau<t} \int\limits_{B_\infty} \rho v_\infty^\mu dx \Bigg]^{M_2}. \qquad (19)$$

Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\varepsilon^{\frac{i}{2i+1}} d < \frac{1}{2}$ и устремим $n \to \infty$, тогда из (19) следует

$$\sup_{\tau_1<\tau<t} \int\limits_{B_{R_1}} \rho (u-a_1)_+^{s+1} dx \leq$$

$$\leq \gamma(t-\tau_2) F(R_1, R_2, \tau_1, \tau_2, a_1, a_2)^{M_1} \Bigg[\sup_{\tau_2<\tau<t} \int\limits_{B_{R_2}} \rho (u-a_2)_+^\nu dx \Bigg]^{M_2}. \qquad (20)$$

Пусть $0 < T_2 < T_1 < t < T, \quad 0 < d_1 < d_2$ и k-постоянная, значение которой будет выбрано ниже. Рассмотрим последовательности

$$r_n = d_1 + (d_2 - d_1) 2^{-n}, \quad t_n = T_1 - (T_1 - T_2) 2^{-n},$$

$$h_n = k(1 - 2^{-n-1}), \quad \overline{h}_n = (h_n + h_{n+1}) 2^{-1}, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

В неравенстве (20) положим

$$R_1 = r_{n+1}, \quad R_2 = r_n, \quad \tau_1 = t_{n+1}, \quad \tau_2 = t_n, \quad a_1 = \overline{h}_n, \quad a_2 = h_n.$$

Тогда

$$F(R_1, R_2, \tau_1, \tau_2, a_1, a_2) = F(r_{n+1}, r_n, t_{n+1}, t_n, \overline{h}_n, h_n) \leq$$

$$\leq A^n F(d_1, d_2, T_1, T_2, k, 0) = A^n F_2, \quad \text{где} \quad A = const > 1,$$

а неравенство (20) будет иметь вид

$$\sup_{t_{n+1}<\tau<t} \int\limits_{B_{r_{n+1}}} \rho (u - \overline{h}_n)_+^{s+1} dx \leq \gamma A^n (t - t_n) F_2^{M_1} \Bigg[\sup_{t_n<\tau<t} \int\limits_{B_{r_n}} \rho (u-h_n)_+^\nu dx \Bigg]^{M_2}. \quad (21)$$

Заметим, что так как $\nu < s+1$, имеет место неравенство

$$\int\limits_{B_{r_{n+1}}} \rho(u-h_{n+1})_+^{\nu} dx \leq (h_{n+1}-\overline{h}_n)^{\nu-s-1} \int\limits_{B_{r_{n+1}}} \rho(u-\overline{h}_n)_+^{s+1} dx \tag{22}$$

Используя обозначение $Y_n = \sup\limits_{t_n<\tau<t} \int\limits_{B_{r_n}} \rho(u-h_n)_+^{\nu} dx$, из (21) и (22) получим рекурентное неравенство

$$Y_{n+1} \leq b^n (t-T_2) F_2^{M_1} k^{\nu-s-1} Y_n^{M_2}, \quad \text{где} \quad b = const > 1. \tag{23}$$

Отметим, что $M_2 > 1$ при указанном выше выборе μ.
Из итеративной леммы(см. [23, гл. II, лемма 5.6]) следует $Y_n \to 0$ при $n \to \infty$ (что в свою очередь означает $\|u\|_{\infty, B_{d_1} \times (T_1,t)} \leq k$), если

$$(t-T_2) F_2^{M_1} k^{\nu-s-1} Y_0^{M_2-1} \leq \gamma_0.$$

Это будет выполнено, если в качестве k взять решение уравнения

$$k = \left[\gamma_0^{-1} (t-T_2) F_2^{M_1} \Big(\sup\limits_{T_2<\tau<t} \int\limits_{B_{d_2}} \rho u^{\nu} dx \Big)^{M_2-1} \right]^{\frac{1}{s+1-\nu}}. \tag{24}$$

Напомним, что $F_2 = \frac{1}{T_1-T_2} \cdot \frac{1}{k^{p-1}} + \frac{d_2^l}{(d_2-d_1)^{\lambda+1}} \cdot \frac{1}{k^{p-m-\lambda+1}} + 1$. Уравнение (24) имеет положительное решение, потому что $F_2(k)$ монотонно убывает при $k > 0$ и $F_2(0) = +\infty$.

Рассмотрим два случая

$$1) F_2 > 3, \quad 2) F_2 \leq 3.$$

В случае 1) из определения функции F_2 следует, что
либо $\frac{1}{T_1-T_2} \cdot \frac{1}{k^{p-1}} > 1$, либо $\frac{d_2^l}{(d_2-d_1)^{\lambda+1}} \cdot \frac{1}{k^{p-m-\lambda+1}} > 1$. Следовательно,

$$k \leq (T_1-T_2)^{-\frac{1}{p-1}} + d_2^{\frac{l}{p-m-\lambda+1}} (d_2-d_1)^{-\frac{\lambda+1}{p-m-\lambda+1}}. \tag{25}$$

В случае 2) из (24) получаем

$$k \leq \gamma \left[(t-T_2) \Big(\sup\limits_{T_2<\tau<t} \int\limits_{B_{d_2}} \rho u^{\nu} dx \Big)^{M_2-1} \right]^{\frac{1}{s+1-\nu}}. \tag{26}$$

В неравенствах (25), (26) положим

$$d_1 = \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{1}{H}}, \quad d_2 = (T-t)^{\frac{1}{H}}, \quad T_1 = t - \frac{T-t}{2}, \quad T_2 = t-(T-t).$$

В случае 1), из неравенства (25) следует, что

$$k \leq 2(T-t)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

В случае 2) применим лемму 1 с $\theta = 1-\nu$ и проделывая громоздкие, но элементарные вычисления, получим:

$$\Big(1+\frac{1}{H}(N-l-\frac{(\lambda+1-l)\nu}{p-m-\lambda+1})(M_2-1)\Big)\frac{1}{s+1-\nu} = -\frac{1}{p-1},$$

Таким образом, для всех $t \in (\frac{T}{2}, T)$, $\quad |x| \leq \frac{1}{2}(T-t)^{\frac{1}{H}}$

$$u(x,t) \leq k \leq \gamma(T-t)^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{27}$$

Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность Анатолию Федоровичу Тедееву за постановку задачи и полезные обсуждения способствовавшие ее решению.

1. *Kamin S., Rosenau P.* Nonlinear diffusion in a finite mass medium // Comm. Pure Appl. Math. 1982. V. 35. P. 113-127.
2. *Kamin S., Rosenau P.* Propagation of thermal waves in an inhomogeneous medium // Comm. Pure Appl. Math. 1981. V. 34. P. 831-852.
3. *Kamin S., Kersner R.* Disappearence of interfaces in finite time // Meccanica. 1993. V. 28. P. 117-120.
4. *Guedda M., Hilhorst D., Peletier M.A.* Disappearing interfaces in nonlinear diffusion // Adv. Math. Sci. Appl. 1997. V. 7. P. 695-710.
5. *Galaktionov V.A., King J.R.* On the behaviour of blow-up interfaces for an inhomogeneous filtration equation// J. Appl. Math. 1996. V. 57. P. 53-77.
6. *Kersner R., Reyes G., Tesei A.* On a class of nonlinear parabolic equations with variable density and absortion // Advances Diff. Eqs. 2002. V. 7. № 2. P. 155-176.
7. *Тедеев А. Ф.* Условия существования и несуществования в целом по времени компактного носителя решений задачи Коши для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений. Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 1. С. 189-200.
8. *Курдюмов С.П., Куркина Е.С.* Спектр собственных функций для нелинейного уравнения теплопроводности с источником // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 9. С. 1619-1637.
9. *Fujita H.* On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I. 1966. V. 13. P. 109-124.
10. *Галактионов В.А, Курдюмов С.П, Михайлов А.П, Самарский А.А* О неограниченных решениях задачи Коши для параболического уравнения $u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u) + u^\beta$ // ДАН СССР. 1980. Т. 252. № 6. С. 1362-1364.
11. *Andreucci D., Tedeev A.F.* A Fujita type result for degenerate Neumann problem in domains with noncompact boundary // J. Math. Anal. Appl. 1999. V. 231. P. 543-567.
12. *Andreucci D., Tedeev A.F.* Optimal bounds and blow-up phenomena for parabolic problems in narrowing domains // Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A. 1998. V. 128. № 6. P. 1163-1180.
13. *Deng K., Levine H.A.* The role of critical exponents in blow up theorems: The sequel // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 243. P. 85-126.

14. *Самарский А.А, Галактионов В.А, Курдюмов С.П, Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
15. *Andreucci D., Tedeev A.F.* Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations // Advances Diff. Eqs. 2005. V. 10. № 1. P. 89-120.
16. *Мартыненко А.В., Тедеев А.Ф.* Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с источником и неоднородной плотностью.Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т.47. №2. с.245-255
17. *Мартыненко А.В., Тедеев А.Ф.* Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с источником и неоднородной плотностью.Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т.48. №7. с.1214-1229
18. *Мартыненко А.В., Тедеев А.Ф.*, Регулярность решений вырождающихся параболических уравнений с неоднородной плотностью, УМВ.- Т.5.- № 1.- 2008.- с.116-145.
19. *Cianci P., Martynenko A.V., Tedeev A.F.* The blow-up phenomenon for degenerate parabolic equations with variable coefficient and nonlinear source// Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. - 2010.-V.73.-I7.-p.2310-2323
20. *Bernis F.* Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains// Math. Ann. 1988. V. 279. P. 373-394.
21. *Alt H.W., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. 1983. V. 183. P. 311-341 .
22. *Caffarelli L., Kohn R., Nirenberg L.* First order interpolation inequalities with weights // Compositio Math. 1984. V. 53. P. 259-275.
23. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Национальний технический университет Украины
"Киевский политехнический институт",
пр. Победы, 37,
03056, м. Киев
vshramenko@ukr.net

Получено 8.02.11

Луганский национальный университет
имени Тараса Шевченко,
ул. Оборонная, 2,
91011 Луганск