©2010. **С.Д. Івасишен**

ПРО ВПЛИВ ІДЕЙ Я.Б. ЛОПАТИНСЬКОГО НА РОЗВИТОК ТЕОРІЇ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ

Наведено короткий огляд праць Я.Б. Лопатинського з теорії еліптичних систем і праць інших авторів з теорії параболічних систем, в яких ідеї Я.Б. Лопатинського одержали найбільший розвиток.

Ключові слова: еліптична система, параболічна система, крайова задача, умова Лопатинського, фундаментальна матриця розв'язків, нетерова задача, коректна розв'язність
MSC (2000): 35A08; 35J55; 35K50

Я. Б. Лопатинський став всесвітньо відомим математиком у першу чергу завдяки його фундаментальним результатам в теорії еліптичних систем рівнянь із частинними похідними та крайових задач для таких систем. Ці результати він одержав у Львівський період свого життя (1946 – 1963 рр.).
Праці Ярослава Борисовича з теорії еліптичних систем багато в чому визначили напрям розвитку цієї галузі математики, а закладені в них ідеї мали благотворний вплив на розвиток теорії параболічних систем рівнянь.

У цій статті робиться короткий огляд праць як самого Я.Б. Лопатинського, так і праць з теорії параболічних систем рівнянь, в яких ідеї Ярослава Борисовича отримали найбільший розвиток. Стаття доповнює і розширює попередню статтю автора [1].

1. Праці Я.Б. Лопатинського, що стосуються фундаментальних матриць розв'язків (ФМР) еліптичних систем.

У працях [2 – 6] побудовані та досліджені ФМР і нормальні ФМР загальних еліптичних систем. Ці результати застосовані Ярославом Борисовичем до дослідження можливих ізольованих особливостей розв'язків еліптичних систем. Доведено, що розв'язок еліптичної системи в околі ізольованої особливої точки виражається через похідні ФМР. Результати Я.Б. Лопатинського, які стосуються нормальних ФМР, були використані далі для доведення того, що всякий узагальнений розв'язок еліптичної системи насправді є класичним розв'язком.

2. Праці Я.Б. Лопатинського, присвячені крайовим задачам для загальних еліптичних систем.

У працях [7, 8] уперше в світовій літературі було знайдено умову узгодження коефіцієнтів крайових умов, яка достатня для звідності крайової задачі загального вигляду до регулярних інтегральних рівнянь. Ця умова названа *умовою Лопатинського*. В указаних працях Я.Б. Лопатинський описав метод зведення крайової задачі в обмеженій опуклій області до системи регулярних інтегральних рівнянь за допомогою побудованих і досліджених ним потенціалів. Раніше схожий метод застосувала З.Я. Шапіро [9] для систем зі сталими коефіцієнтами в тривимірній області. Тому вищезазначену умову називають ще умовою Шапіро-Лопатинського.

Пізніше Я.Б. Лопатинський за допомогою розроблених ним методів досліджував задачу Діріхле для системи еліптичних рівнянь другого порядку, вивчивши розв'язність задачі, неперервну залежність розв'язків від правих частин, коефіцієнтів системи та області їх задання, властивості гладкості розв'язків аж до межі області.

У подальшому розвитку теорії еліптичних рівнянь і систем рівнянь центральним було питання нетеровості відповідної крайової задачі. З крайовою задачею природним способом пов'язується деякий оператор у підхожих банахових просторах. Оператор називається *нетеровим*, якщо його ядро скінченновимірне, образ замкнений і має скінченну корозмірність. Доведено, що для того, щоб крайова задача для еліптичної системи була нетеровою, необхідно й досить, щоб виконувалась умова Лопатинського. Дальші дослідження показали, що умова Лопатинського є також необхідною і достатньою для нетеровості крайової задачі для еліптичних псевдодиференціальних рівнянь.

Сформулюємо умову Лопатинського в тому вигляді, який вона має у працях [7, 8]. Розглядається крайова задача в обмеженій області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ з межею S

$$A(x, \partial_x)u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\lim_{x \to y} B(x, \partial_x)u(x) = f(y), \quad y \in S, \tag{2}$$

де $A(x, \partial_x)$ – квадратна матриця порядку N, елементами якої є лінійні диференціальні вирази порядку m; $B(x, \partial_x)$ – матриця розмірності $(Nm/2) \times N$, елементами k-го рядка якої є лінійні диференціальні вирази порядку $m_k < m$. Припускається, що система (1) еліптична.

Нехай A_0 і B_0 – головні за порядком диференціювання частини диференціальних виразів A і B відповідно, $\nu(y)$ – орт внутрішньої нормалі до S у точці y, I – одинична матриця порядку N.

Умова Лопатинського:

$$\forall y \in S \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \ \xi \perp \nu(y) :$$

$$rank \int\limits_{+} B_0(y, \xi + \lambda\nu(y)) A_0^{-1}(y, \xi + \lambda\nu(y))(I, \dots, \lambda^{m-1} I) d\lambda = Nm/2 \qquad (3)$$

($\int\limits_{+}$ означає інтегрування у верхній λ-площині по простому замкненому контуру, який охоплює λ-корені рівняння

$$\det A_0(y, \xi + \lambda\nu(y)) = 0), \qquad (4)$$

при цьому можна вибрати такі стовпчики цієї матриці, що відповідний мінор порядку $Nm/2$ не дорівнює нулеві для всіх y і ξ.

Пізніше було доведено, що умову (3) можна подати в такому вигляді.

Алгебраїчна умова Лопатинського:

$$\forall y \in S \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \ \xi \perp \nu(y):$$

рядки матриці $B_0(y, \xi + \lambda\nu(y))\hat{A}_0(y, \xi + \lambda\nu(y))$, як λ-многочлени, лінійно незалежні за модулем λ-многочлена

$$\prod_{s=1}^{Nm/2} (\lambda - \lambda_s^+(y, \xi)), \qquad (5)$$

де $\hat{A}_0$ – матриця, взаємна для матриці A_0, $\lambda_s^+(y, \xi)$ – λ-корені рівняння (4) з додатною уявною частиною.

3. Праці Я.Б. Лопатинського з теорії інтегральних рівнянь.

Праці [10 – 12] стосуються інтегральних рівнянь – як регулярних, з аналітичним ядром, так і сингулярних, які відповідають крайовій задачі для еліптичної системи в плоскій області, межа якої має кутові точки. Я.Б.Лопатинський був одним із перших математиків, хто почав у загальній постановці досліджувати такі задачі. Він майстерно використав результати тільки що створеної теорії нетерових операторів, показавши, що в деякому спеціально підібраному функційному просторі система інтегральних рівнянь, яка відповідає крайовій задачі з кутовими точками, породжує нетеровий оператор. При цьому він указав формули для обчислення індексу такого оператора, а також формулу для радіуса Фредгольма, яка раніше іншими методами знайдена Радоном.

4. Побудова та дослідження ФМР параболічних систем.

Результати Я.Б. Лопатинського, що стосуються ФМР еліптичних систем, стимулювали дослідження ФМР параболічних систем в першу чергу С.Д. Ейдельмана та його учнів. З 1950 р. Самуїл Давидович, який тоді працював у Чернівецькому університеті, почав регулярно спілкуватися з Я.Б. Лопатинським. С.Д. Ейдельман неодноразово згадував, що чудові праці Ярослава

Борисовича та його розповіді були для нього джерелом роздумів над різними проблемами теорії рівнянь із частинними похідними.
Я.Б. Лопатинський був опонентом на захисті кандидатської дисертації С.Д. Ейдельмана в 1953 р. у Львівському університеті. Уже в дисертації містилися перші результати побудови, дослідження та застосування ФМР параболічних систем. У пізніших працях С.Д. Ейдельмана та його учнів проведене всебічне вивчення ФМР параболічних систем, знайдені різноманітні важливі застосування результатів цього вивчення (див. [13 – 21]).

Основні результати цих праць стосуються загальних параболічних за Петровським і за Ейдельманом ($\overrightarrow{2b}$-параболічних) систем і є такими:

1) побудова, точні оцінки як на обмежених, так і необмежених часових інтервалах, різноманітні властивості ФМР задачі Коші у випадках, коли система:
   а) рівномірно параболічна, її коефіцієнти задовольняють умову Гельдера як класичну, так і узагальнену (умову Діні);
   б) з необмежено зростаючими при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами, яка є дисипативною або зводиться до такої;
   в) містить виродження на початковій гіперплощині;
2) зв'язок між ФМР параболічних і відповідних еліптичних систем;
3) поведінка розв'язків в околі ізольованої особливої точки;
4) коректна розв'язність задачі Коші в різних просторах функцій;
5) інтегральне зображення розв'язків задачі Коші та розв'язків, визначених у відкритому шарі;
6) локальна розв'язність задачі Коші та продовження її розв'язків на ширший часовий інтервал для квазілінійних і нелінійних систем;
7) теореми типу Ліувілля і про стійкість розв'язків задачі Коші, коректна розв'язність задачі Коші на напівобмеженому часовому інтервалі та задачі без початкових умов.

5. Параболічні крайові задачі.

Найзначніший вплив дослідження Я.Б. Лопатинського мали на побудову теорії параболічних крайових задач.

Загальними крайовими задачами для параболічних за Петровським систем першого порядку за часовою змінною t вперше почав займатися Т.Я. Загорський, який починаючи з 1956 р. опублікував ряд праць і монографію [22].

У цих працях крайові задачі розглядаються в опуклих обмежених областях. Припускається, що порядки крайових диференціальних виразів менші за порядок системи. Умова розв'язності, яку крайові диференціальні вирази мають задовольняти, береться у тій самій формі, в якій вона записана в Я.Б. Лопатинського. Як і в Я.Б. Лопатинського, для доведення розв'язності загальної крайової задачі використовується теорія потенціалу, яка узагальнює теорію теплових потенціалів. Розв'язок задачі виражається у вигляді суми потенціалів, густини яких визначаються із системи інтегральних рівнянь, а ядра будуються за допомогою ядер Пуассона, тобто ядер потенціалів, які дають точний розв'язок модельних крайових задач. Щоб дослідити систему інтегральних рівнянь, треба одержати точні оцінки ядер Пуассона. Як помітив В.О. Солонников [23], при одержанні таких оцінок у [22] допущені істотні помилки в міркуваннях.

Більш загальна теорія потенціалу будується у працях С.Д. Ейдельмана (1962 – 1963 рр.) і монографії [13], а також у замітках [24, 25]. У цих працях загальна схема цієї теорії та сама, що й в Т.Я. Загорського, але кінцеві результати загальніші, ніж у [22].

У праці [24] крайові задачі для параболічних за Петровським систем першого порядку за t досліджуються в неопуклих циліндричних областях, в нециліндричних областях та в необмежених областях частинного вигляду. При цьому припускається, так само як у [22], що порядки крайових умов менші за порядок системи.

У вказаних працях С.Д. Ейдельмана одержані сильніші, ніж у [22], оцінки ядер Пуассона модельних крайових задач. При цьому не накладається жодних обмежень на порядки крайових умов. Дослідження ядер Пуассона
С.Д. Ейдельман проводить за допомогою цікавого методу, в основі якого лежить теорема Я.Б. Лопатинського про факторизацію поліноміальних матриць [26].

У праці М.С. Аграновича й М.Й. Вишика [27] розглянуті загальні еліптичні задачі, залежні від параметра. Найважливішим частинним випадком цих задач є задачі, які виникають при перетворенні Лапласа загальних крайових задач для параболічних за Петровським систем у циліндричних областях, коли в останніх коефіцієнти не залежать від t і початкові умови нульові. На крайові диференціальні вирази накладається так звана умова доповняльності, аналогічна умові Лопатинського. Доводяться теореми про коректну розв'язність таких задач у відповідних просторах W_2^l для досить великих за модулем значень параметра. Ці теореми використовуються для доведення відповідних теорем про коректну розв'язність загальних крайових задач для параболічних за Петровським систем у випадку, коли жодних обмежень на порядки крайових умов не накладається і виконується відповідна умова доповняльності.

У праці В.О. Солонникова [23] означується досить широкий клас параболічних систем, так званих систем, параболічних за Солонниковим. Для таких систем розглядаються загальні крайові задачі, розв'язок яких повинен задовольняти певні початкові умови при $t = 0$ і крайові умови на бічній поверхні області. Початкові умови для систем Солонникова можуть не зводитися до задання окремих функцій або їх похідних за t при $t = 0$.
У загальному випадку як початкові, так і крайові умови задаються у вигляді довільних диференціальних виразів, які повинні задовольняти певні алгебраїчні умови. Для крайових виразів ця алгебраїчна умова, яка називається, як і

раніше, *умовою доповняльності*, записується так само, як для еліптичних систем у вигляді (5). Вирази, що задають початкові дані, також задовольняють умову, близьку за формою до умови доповняльності.

Отже, крайова задача в циліндричній області $Q_T := (0,T] \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, з бічною межею Γ_T має вигляд

$$A(t,x,\partial_t,\partial_x)u = f \quad \text{на} \quad Q_T, \tag{6}$$

$$B(t,x,\partial_t,\partial_x)u = g \quad \text{на} \quad \Gamma_T, \tag{7}$$

$$C(x,\partial_t,\partial_x)u\Big|_{t=0} = \varphi \quad \text{на} \quad \Omega. \tag{8}$$

Основним результатом праці [23] є доведення однозначної розв'язності задачі (6) – (8) у гельдерових класах функцій і для деякого вужчого класу систем також у класах $W^{2bs,s}_{p\,x\,t}(Q_T)$. Крім того, доводяться також точні за показниками норм оцінки розв'язків. Пізніше було доведено (див., наприклад, [28]), що для правильності таких оцінок умова доповняльності є необхідною. У праці [23] розглядаються також крайові задачі в нециліндричних областях.

6. Узагальнення параболічних крайових задач.

Розглянемо два найпростіші узагальнення параболічних крайових задач.

1. Параболічні задачі спряження. Нехай Q_T – циліндрична або нециліндрична область у просторі $\mathbb{R}^{n+1}$ з бічною межею Γ^2_T. Припускається, що область Q_T розділена внутрішньою гіперповерхнею Γ^1_T на дві неперетинні підобласті Q^1_T і Q^2_T та в них задані параболічні за Петровським системи, взагалі кажучи, різних порядків. Задача полягає у знаходженні розв'язків цих систем, які на Γ^1_T задовольняють загальні умови спряження, на Γ^2_T – загальні крайові умови і при $t = 0$ – звичайні початкові умови. Отже, задача має такий вигляд:

$$A^\nu u^\nu = f^\nu, \quad \nu \in \{1,2\}, \quad \sum_{\nu=1}^{2} S^\nu u^\nu\Big|_{\Gamma^1_T} = g^1,$$

$$Bu^2\Big|_{\Gamma^2_T} = g^2, \quad C^\nu_0 u^\nu|_{t=0} = \varphi^\nu, \quad \nu \in \{1,2\}. \tag{9}$$

Частинним випадком задачі (9), очевидно, є крайова задача в області Q_T для параболічних за Петровським системи з коефіцієнтами, які мають розриви першого роду на гіперповерхні Γ^1_T, на якій задаються умови спряження.

Задача (9) називається *параболічною задачею спряження*, якщо диференціальний вираз B пов'язаний з диференціальним виразом A^2 звичайною умовою доповняльності, а диференціальні вирази S^1 і S^2 пов'язані з диференціальними виразами A^1 і A^2 аналогічною *умовою сумісного накривання.*

Задачами вигляду (9) займалося чимало математиків. Найзагальніші результати одержані в працях М.В. Житарашу, серед яких виділимо працю [29].

У ній доведено, що при відповідних припущеннях про гладкість коефіцієнтів задачі та поверхонь Γ_T^1 і Γ_T^2 виконання умов доповняльності та сумісного накривання необхідне і достатнє, щоб задача (9) була коректно розв'язною у просторах Гельдера і Соболєва-Слободецького.

2. Нелокальні параболічні крайові задачі. У праці [30] вивчена нелокальна параболічна крайова задача такого типу. Зберігаються вищенаведені припущення щодо структури області Q_T, але додатково припускається, що між поверхнями Γ_T^1 і Γ_T^2 встановлено дифеоморфізм спеціального типу. В підобластях Q_T^1 і Q_T^2 задаються загальні параболічні системи. Задача полягає в знаходженні розв'язків цих систем, які при $t = 0$ задовольняють звичайні початкові умови, а на Γ_T^2 – нелокальні крайові умови. Ці умови задаються лінійними диференціальними співвідношеннями, які зв'язують значення шуканих функцій та їх похідних у точках межі Γ_T^2 з їх значеннями на межі Γ_T^1. Основною алгебраїчною умовою в цій задачі є *умова нелокального сумісного накривання або нелокальна умова доповняльності.*

7. Матриці Гріна параболічних задач.

Я.Б. Лопатинський заохочував і всебічно підтримував дослідження матриць Гріна крайових задач, тобто ядер інтегральних операторів, за допомогою яких зображуються розв'язки задач через їхні праві частини. Такої підтримки зазнавали, зокрема, дослідження матриць Гріна параболічних крайових задач, задач спряження і нелокальних задач, які проводили С.Д. Ейдельман, автор цієї статті та їхні учні (див., наприклад, праці [31 – 38]).

8. Параболічні початкові задачі Солонникова-Ейдельмана.

У працях [39, 40] означено клас систем рівнянь, які природно узагальнюють параболічні за Солонниковим системи [23] і системи, параболічні в сенсі Ейдельмана [14], сформульовано початкові задачі для таких систем (їх названо параболічними початковими задачами Солонникова-Ейдельмана), тобто розглянуто задачі вигляду

$$A(t, x, \partial_t, \partial_x)u = f, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R}^n,$$
$$C(x, \partial_t, \partial_x)u|_{t=0} = \varphi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{10}$$

де диференціальний вираз $C(x, \partial_t, \partial_x)$ задовольняє умову, аналогічну умові Лопатинського.

Встановлено однозначну розв'язність задачі (10) в просторах Гельдера швидкозростаючих функцій; точні оцінки норм розв'язків через відповідні норми f і φ; необхідність умов параболічності системи і умови доповняльності для правильності таких оцінок; коректну розв'язність задачі (10) у просторах Соболєва-Слободецького.

Зауваження. Усі статті Я.Б. Лопатинського, на які ми вище посилалися, увійшли до збірника його вибраних праць [41].

1. *Івасишен С.Д.* Про розвиток ідей Я.Б. Лопатинського в теорії параболічних рівнянь // Мат. студії. – 2007. – **27**, №1. – С. 70 – 76.
2. *Лопатинский Я.Б.* Фундаментальная система решений системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа // Докл. АН СССР. – 1950. – **71**, №3. – С. 433 – 436.
3. *Лопатинский Я.Б.* Фундаментальная система решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1951. – **3**, №1. – С. 3 – 38.
4. *Лопатинский Я.Б.* Фундаментальные решения системы дифференциальных уравнений эллиптического типа // Укр. мат. журн. – 1951. – **3**, №3. – С. 290 – 316.
5. *Лопатинский Я.Б.* Нормальные фундаментальные решения системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа // Докл. АН СССР. – 1951. – **78**, №5. – С. 865 – 867.
6. *Лопатинский Я.Б.* Поведение решений линейной эллиптической системы в окрестности изолированной особой точки // Докл. АН СССР. – 1951. – **79**, №5. – С. 727 – 730.
7. *Лопатинский Я.Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к системе регулярных интегральных уравнений // Докл. АН УССР. – 1952. – №5. – С. 381 – 388.
8. *Лопатинский Я.Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр. мат. журн. – 1953. – **5**, №2. – С. 123 – 151.
9. *Шапиро З.Я.* Первая краевая задача для эллиптической системы дифференциальных уравнений // Мат. сб. – 1951. – **28**, №1. – С. 55 – 78.
10. *Лопатинский Я.Б.* Формулы Фредгольма для систем линейных интегральных уравнений // Научн. зап. Львов. политехн. ин-та. Сер. физ.-мат. – 1956. – **38**, №2. – С. 8 – 12.
11. *Лопатинский Я.Б.* Интегральные уравнения с аналитическим ядром // Научн. зап. Львов. ун-та. Сер. мех.-мат. – 1957. – **44**, №8. – С. 200 – 203.
12. *Лопатинский Я.Б.* Об одном типе сингулярных интегральных уравнений // Теор. и прикл. мат. – Львов, 1963. – Вып. 2. – С. 53 – 57.
13. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
14. *Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1968. – Вып. 1. – С. 3 – 175.
15. *Возняк О.Г., Івасишен С.Д.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Доп. АН України. – 1994. – №6. – С. 7 – 11.
16. *Мединський І.П., Івасишен С.Д.* Про коректну розв'язність параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 76. Математика. – Чернівці: Рута, 2000. – С. 71 – 76.
17. *Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Про задачу Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем зі зростаючими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, №11. – С. 1484 – 1496.
18. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д.* Про властивості розв'язків $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, №4. – С. 19 – 26.
19. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel etc: Birkhäuser, 2005. – 390 p. – (Oper. Theory: Adv. and Appl. Vol. 152).
20. *Івасишен С.Д.* Самуїл Давидович Ейдельман. Життєвий шлях. Основні здобутки. – Чернівці: Рута, 2006. – 87 с.
21. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні. – Чернівці, 2010. – 248 с.
22. *Загорский Т.Я.* Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частны-

ми производными параболического типа. – Львов, 1961. – 115 с.

23. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. – 1965. – **83**. – С. 3 – 163.
24. *Эйдельман С.Д., Липко Б.Я.* О краевых задачах для параболических систем в областях общего вида // Докл. АН СССР. – 1963. – **150**, №1. – С. 58 – 61.
25. *Липко Б.Я., Эйдельман С.Д.* К теории параболических потенциалов // Докл. АН СССР. – 1966. – **166**, №5. – С. 1050 – 1053.
26. *Лопатинский Я.Б.* Разложение полиномиальной матрицы на множители // Научн. зап. Львов. политехн. ин-та. Сер. физ.-мат. – 1956. – **38**, №2. – С. 3 – 7.
27. *Агранович М.С., Вишик М.И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, №3. – С. 53 – 161.
28. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
29. *Житарашу Н.В.* Шаудеровские оценки и разрешимость общих краевых задач для общих параболических систем с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1966. – **169**, №3. – С. 511 – 514.
30. *Житарашу Н.В., Эйдельман С.Д.* Об одной нелокальной параболической граничной задаче // Мат. исследования. – Кишинев, 1970. – **5**, №3. – С. 83 – 100.
31. *Эйдельман С.Д., Ивасишен С.Д.* Исследование матрицы Грина однородной параболической граничной задачи // Тр. Моск. Мат. о-ва. – 1970. – **23**. – С. 179 – 234.
32. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – К.: Выща школа, 1990. – 200 с.
33. *Дринь М.М., Ивасишен С.Д.* Матрица Грина общей граничной задачи для параболической по И.Г.Петровскому системы с разрывными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – №11. – С. 7 – 10.
34. *Дринь М.М., Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических задач сопряжения // Черновиц. ун-т. – Черновцы, 1984. – 95 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 07.02.85, № 252Ук-85Деп.
35. *Дубровская А.П.* Об операторах Грина нелокальной параболической граничной задачи // Операторные методы в дифференциальных уравнениях. – Воронеж, 1979. – С. 40 – 45.
36. *Матійчук М.І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
37. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
38. *Пукальський І.Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.
39. *Івасишен С.Д., Івасюк Г.П.* Коректна розв'язність параболічних початкових задач Солонникова-Ейдельмана // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, №5. – С. 650 – 671.
40. *Івасишен С.Д., Івасюк Г.П.* Про коректну розв'язність параболічних початкових задач Солонникова-Ейдельмана в узагальнених просторах Соболєва // Доп. НАН України. – 2010. – №10. – С. 14 – 17.
41. *Лопатинский Я.Б.* Теория общих граничных задач. Избр. тр. – Киев: Наук. думка, 1984. – 316 с.

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", пр. Перемоги, 37, 03056, м. Київ
ivasyshen_sd@mail.ru

Отримано 8.02.11