©2010. **М. Бокало**

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ЕВОЛЮЦІЙНИМИ СИСТЕМАМИ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ

Досліджено задачу оптимального керування процесами, які описуються заданими на часовому промені $(-\infty, 0]$ лінійними еволюційними рівняннями без початкових умов. Доведено існування та єдиність оптимального керування, а також отримано співвідношення, які його характеризують. Для деякого звуження досліджуваної задачі її розв'язок знаходиться з інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з необмеженим проміжком інтегрування, яке можна розв'язувати методом послідовних наближень.

Ключові слова: еволюційне рівняння, оптимальне керування, задача без початкових умов
MSC (2000): 45B05, 45N05, 47D06, 49J20, 49J27, 49K20

Вступ.

Теорія оптимального керування детермінованими системами (див. [5]) опирається на такі вихідні положення:

1) керування v вибирається з деякої множини U_∂ (множина допустимих керувань), що є підмножиною простору U (простору керувань);

2) стан $y(v)$ керованої системи визначається для вибраного керування v як розв'язок рівняння

$$\Lambda y(v) = \Theta(v), \tag{1}$$

де Λ – заданий оператор, який визначається керованою системою (Λ – "модель" системи), $\Theta(v)$ – задана функція;

3) спостереження $z(v)$ визначається як певна функція стану $y(v)$;

4) функція вартості $J : U \to \mathbb{R}$ задається за допомогою деякої числової функції $(z, v) \to \Phi(z, v) \geq 0$ на "просторі спостережень" та просторі (множині) допустимих керувань за законом

$$J(v) = \Phi(z(v), v), \quad v \in U \,(\text{ або } v \in U_\partial\,). \tag{2}$$

Задача оптимального керування детермінованими системами полягає у відшуканні керування $u \in U_\partial$ такого, що

$$J(u) = \inf_{v \in U_\partial} J(v). \tag{3}$$

Будь-яке таке значення u називається *оптимальним керуванням.*

В теорії оптимального керування вирішують такі проблеми:

(i) отримати умови існування глобального мінімуму функціоналу J;

(ii) вивчити структуру і властивості рівнянь, які виражають ці умови (в них повинна брати участь "модель" Λ);

(iii) скласти конструктивний алгоритм чисельного знаходження апроксимацій оптимального керування u.

Побудова теорії оптимального керування детермінованими системами залежить від моделі Λ. Ця теорія у випадку, коли Λ є звичайним диференціальним оператором, викладена в монографії [1] та інших працях. Але в багаточисельних прикладних задачах через складність керованих систем в якості Λ розглядається оператор з частинними похідними. Іншими словами, досліджуються системи, для яких стан $y(v)$ визначається як розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними, що задовольняє певні крайові умови, а у випадку еволюційних рівнянь, ще і початкову умову [2, 4, 5, 6, 7].

Тут ми розглядаємо проблему оптимального керування еволюційними системами, стан яких визначається заданими на часовому проміжку $(-\infty, 0]$ еволюційними рівняннями першого порядку за часовою змінною в гільбертових просторах. Тоді початковий момент співпадає з $-\infty$ і стандартну початкову умову ставити не можна, а потрібно її замінити, наприклад, на обмеження поведінки розв'язку при $t \to -\infty$. Тому ми кажемо, що розглядаються еволюційні системи без початкових умов. Достатньо повний огляд результатів стосовно задачі без початкових умов для різноманітних еволюційних рівнянь можна знайти в [8]. Відмітимо, що конкретними реалізаціями еволюційних рівнянь, які розглядаються в даній роботі, є, наприклад, диференціальні рівняння параболічного типу.

Тут доведено існування єдиного розв'язку задачі оптимального керування системами, що описуються еволюційними рівняннями без початкових умов, у випадку фінального спостереження. Також отримані співвідношення, які характеризують оптимальне керування. В одному частковому випадку знаходження оптимального керування зведено до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з необмеженим проміжком інтегрування, розв'язок якого можна знайти методом послідовних наближень.

1. Вихідні положення.

Нехай V і H – гільбертові простори над полем дійсних чисел з відповідно скалярними добутками $(\cdot,\cdot)_V$ і $(\cdot,\cdot)$ та нормами $\|\cdot\|_V$ і $|\cdot|$. Припустимо, що простір V неперервно і щільно вкладається в H (тобто, V є підмножиною H, замикання V за нормою H збігається з H та існує стала $\lambda_* > 0$ така, що $|v| \le \lambda_* \|v\|_V$ для будь-якого $v \in V$).

Нехай $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ – білінійна форма, яка володіє властивостями симетричності:

$$a(v,w) = a(w,v), \quad v,w \in V,$$

$V-$коерцитивності:

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad v \in V \quad (\,\alpha = \text{const} > 0\,),$$

і неперервності:

$$|a(v,w)| \leq \beta \|v\|_V \|w\|_V, \quad v,w \in V \quad (\,\alpha \leq \beta = \text{const}\,).$$

Визначимо оператор $A : \mathcal{D}(A) \to H$ за таким правилом. Нехай $\mathcal{D}(A) := \{v \in V \,\big|\, |a(v,w)| \leq c_v |w|,\ w \in V (c_v$ – стала, яка залежить від $v)\}$. Отож, якщо $v \in \mathcal{D}(A)$, то відображення $V \ni w \to a(v,w) \in \mathbb{R}$ однозначно продовжується до лінійного неперервного функціоналу на H. Звідси за теоремою Ріса отримуємо існування для кожного $v \in \mathcal{D}(A)$ єдиного елемента $Av \in H$ такого, що

$$(Av, w) = a(v,w), \quad w \in V. \tag{4}$$

Очевидно, оператор A є лінійним, симетричним:

$$(Av, w) = (v, Aw), \quad v,w \in \mathcal{D}(A), \tag{5}$$

і $V-$коерцитивним

$$(Av, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \quad v \in \mathcal{D}(A). \tag{6}$$

Зі сказанного випливає (див., наприклад, [10, Chapter IV]), що A – замкнений оператор в H (тобто володіє властивістю: якщо $\{v_m\}_{m=1}^\infty$ – послідовність елементів з $\mathcal{D}(A)$ і елементи $v,w \in H$ такі, що $v_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} v$ і $Av_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} w$ в H, то $v \in \mathcal{D}(A)$ і $Av = w$) та вкладення $\mathcal{D}(A) \subset H$ є щільним.

Введемо на $\mathcal{D}(A)$ скалярний добуток

$$(v,w)_{\mathcal{D}(A)} = (v,w) + (Av, Aw), \quad v,w \in \mathcal{D}(A),$$

який породжує норму графіка

$$\|v\|^2 := |v|^2 + |Av|^2, \quad v \in \mathcal{D}(A). \tag{7}$$

Оскільки оператор A є замкненим, то простір $\mathcal{D}(A)$ з введеним скалярним добутком є гільбертовим. Також зі сказанного випливає, що $\mathcal{D}(A)$ неперервно і щільно вкладається в H.

Як доведено, наприклад, в [10, Chapter IV], оператор $-A : \mathcal{D}(A) \to H$ є генератором аналітичної півгрупи $\{T(\tau) \equiv e^{-\tau A} \,\big|\, \tau \geq 0\}$ операторів з $\mathcal{L}(H)$ і

$$e^{-\tau A} v = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda_m \tau} (v, v_m)\, v_m, \quad v \in H,\ \tau \geq 0, \tag{8}$$

де $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ – послідовності відповідно дійсних чисел та елементів з $\mathcal{D}(A)$ такі, що

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \leq \lambda_m \leq ...,$$

$$Av_m = \lambda_m v_m, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\{v_m\}_{m=1}^{\infty} \quad \text{– ортонормована база в} \quad H.$$

Очевидно, для кожного $m \in \mathbb{N}$ число λ_m – власне значення (взяте стільки разів, яка його кратність), а v_m – власний елемент оператора A, відповідний λ_m.

На підставі рівності Парсеваля з (8) отримаємо

$$|e^{-\tau A}v|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\lambda_m \tau} |(v, v_m)|^2 \leq$$

$$\leq e^{-2\lambda_1 \tau} \sum_{m=1}^{\infty} |(v, v_m)|^2 = e^{-2\lambda_1 \tau} |v|^2, \quad v \in H, \, \tau \geq 0,$$

звідки маємо оцінку

$$\|e^{-\tau A}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq e^{\omega_0 \tau}, \quad \tau \geq 0, \quad \text{де} \quad \omega_0 := -\lambda_1 < 0. \tag{9}$$

Введемо ще деякі позначення. Нехай P – який-небудь проміжок числової осі, а X – гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_X$ і нормою $\| \cdot \|_X$. Під $C(P; X)$ розумітимемо лінійний простір, складений з функцій, які визначені на P, приймають значення в X та є неперервними. Через $L_2(P; X)$ позначатимемо гільбертів простір вимірних (класів) функцій $f : P \to X$, для яких $|f(\cdot)| \in L_2(P)$, зі скалярним добутком

$$((f, g)) := \int_P (f(t), g(t))_X \, dt.$$

Під $L_{2,\text{loc}}(P; X)$ розумітимемо лінійний простір вимірних (класів) функцій, які визначені на P, приймають значення в X і їх звуження на довільний відрізок $[t_1, t_2] \subset P$ належать простору $L_2([t_1, t_2]; X)$.

Через $W_2^1(P; X)$ позначатимемо гільбертів простір функцій $f \in L_2(P; X)$, які мають узагальнені похідні f' в сенсі $D'(\text{int} P; X)$ ($\text{int} P$ – внутрішність проміжку P) з простору $L_2(P; X)$, зі скалярним добутком

$$(f, g)_{W_2^1(P;X)} := \int_P \{(f(t), g(t))_X + (f'(t), g'(t))_X\} \, dt.$$

Під $W_{2,\text{loc}}^1(P; X)$ розумітимемо лінійний простір вимірних (класів) функцій, які визначені на P, приймають значення в X і їх звуження на довільний відрізок $[t_1, t_2] \subset P$ належать простору $W_2^1([t_1, t_2]; X)$. Відомо [3], що $W_{2,\text{loc}}^1(P; X) \subset C(P; X)$.

Далі через $\mathcal{L}(X,Y)$, де X,Y – банахові простори, позначається банахів простір лінійних неперервних операторів, які діють на X і приймають значення в Y, з операторною нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$.

Нехай $S:=(-\infty,0]$. Розглянемо задачу без початкових умов для еволюційного рівняння: для заданої функції $f\in L^2(S;H)$ знайти функцію $y:S\to H$ таку, що

$$y'(t)+Ay(t)=f(t),\quad t\in S\,, \tag{10}$$

$$y\in L_2(S;H). \tag{11}$$

Цю задачу коротко називатимемо задачею (10),(11). Зауважимо, що вона є задачею $\mathbf{P_2}$ з роботи [8] при $\mu=0$, $q=2$ та з $-A$ замість A.

Згідно з [8] слабким розв'язком задачі (10),(11) називають функцію $y\in C(S;H)\cap L_2(S;H)$, яка задається формулою

$$y(t)=Lf(t):=\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-s)A}f(s)\,ds,\quad t\in S.$$

Під L_2-значним розв'язком задачі (10),(11) розуміють функцію $y\in W^1_{2,\mathrm{loc}}(S;H)\cap L_{2,\mathrm{loc}}(S;\mathcal{D}(A))\cap L_2(S;H)$, яка задовольняє рівняння (10) майже всюди на S.

З теореми 2.9 роботи [8] випливає, що задача (10),(11) має слабкий розв'язок. Якщо ж $f\in L^2(S;\mathcal{D}(A))$, то на підставі теореми 2.20 роботи [8] слабкий розв'язок задачі (10),(11) є єдиним її L_2-значним розв'язком, причому він належить простору $C(S;\mathcal{D}(A))$.

2. Формулювання задачі та основних результатів.

Нехай U – гільбертів простір керувань зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_U$ і нормою $|\cdot|_U$; $B\in\mathcal{L}(U;L_2(S;H))$ – деякий оператор. Через $B^*:L_2(S;H)\to U$ позначимо оператор, спряжений до оператора B, тобто $(B^*f,v)_U=((f,Bv))$ для будь-яких $f\in L_2(S;H)$, $v\in U$. Нагадаємо, що через $((\cdot,\cdot))$ позначається скалярний добуток в $L_2(S;H)$.

Припускаємо, що для кожного керування $v\in U$ стан системи визначається як слабкий розв'язок задачі без початкових умов

$$\frac{dy(t;v)}{dt}+Ay(t;v)=g(t)+Bv(t),\quad t\in S, \tag{12}$$

$$y(v)\in L_2(S;H), \tag{13}$$

де $g\in L^2(S;H)$ – задана функція, $Bv(t):=(Bv)(t)$, $t\in S$.

Нехай $N\in\mathcal{L}(U)$ – симетричний і коерцитивний оператор, тобто $(Nv,w)_U=(v,Nw)_U$ і $(Nv,v)_U\ge\nu\|v\|^2_U$ для будь-яких $v,w\in U$, де $\nu=\mathrm{const}>0$.

Введемо функціонал

$$J(v)=|y(0;v)-z_0|^2+(Nv,v)_U,\quad v\in U,$$

де $y(\cdot;v)$ – розв'язок задачі (12),(13), z_0 – який-небудь елемент з H.

Нехай U_∂ – опукла замкнена підмножина U. Розглянемо *задачу оптимального керування*: знайти функцію $u \in U_\partial$ (оптимальне керування) таку, що виконується (3). Далі цю задачу коротко називатимемо *задачею* (3).

Дослідження однозначної розв'язності задачі (3) є основною метою нашої роботи. Сформулюємо її основні результати.

Теорема 1. *Задача (3) має єдиний розв'язок (оптимальне керування) і він характеризується нерівністю*

$$\big(y(0;u) - z_0, y(0;v) - y(0;u)\big) + \big(Nu, v-u\big)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial. \tag{14}$$

Теорема 2. *Нехай* $z_0 \in \mathcal{D}(A)$, $g \in L_2(S;\mathcal{D}(A))$, $B(U_\partial) \subset L_2(S;\mathcal{D}(A))$. *Тоді оптимальне керування в задачі (3) характеризується співвідношеннями*

$$\frac{dy(t)}{dt} + Ay(t) = g(t) + Bu(t), \quad t \in S, \tag{15}$$

$$-\frac{dp(t)}{dt} + Ap(t) = 0, \quad t \in S; \quad p(0) = y(0) - z_0, \tag{16}$$

$$\big(B^*p + Nu, v-u\big)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial, \tag{17}$$

$$y \in W_2^1(S;H) \cap L_2(S;\mathcal{D}(A)), \quad p \in C^1(S;H) \cap C(S;\mathcal{D}(A)) \cap L_2(S;H), \quad u \in U_\partial. \tag{18}$$

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови теореми 2 і, крім того,* $U{=}L_2(S;\mathcal{D}(A))$, $B = I$ *(I – тотожній оператор),* $Nv = \nu v$, $v \in U (\nu = const > 0)$, $U_\partial = U$. *Тоді розв'язок задачі оптимального керування еволюційною системою без початкових умов (3) є розв'язком інтегрального рівняння*

$$\nu u(t)) + \int_S e^{(t+s)A} u(s)\,ds = e^{tA} z_0 - \int_S e^{(t+s)A} g(s)\,ds, \quad t \in S, \tag{19}$$

($e^{tA} := e^{-|t|A}$, $t \in S$*) та навпаки, причому для* $\nu > (2\lambda_1)^{-1}$ *рівняння (19) можна розв'язати методом послідовних наближень.*

3. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 1. При доведенні суттєво будемо опиратися на таке відоме (див. [5, теорема 1.3]) твердження.

Твердження 1. *Нехай* $v \to J(v) : U \to \mathbb{R}$ *– строго опуклий і диференційовний функціонал, який у випадку, коли* U_∂ *– необмежена множина, задовольняє умову*

$$J(v) \to +\infty \quad \textit{при} \quad \|v\|_U \to +\infty, \quad v \in U_\partial. \tag{20}$$

Тоді існує єдиний розв'язок (оптимальне керування) задачі (3) і він характеризується варіаційною нерівністю

$$J'(u)\cdot(v-u)\geq 0 \quad \forall\, v\in U_{\partial}. \tag{21}$$

Перевіримо виконання умов твердження 1 у нашому випадку. Для цього перш за все покажемо, що оператор $v\to y(0;v): U\to H$ є афінним і неперервним. Справді, з означення слабкого розв'язку задачі (12), (13) маємо

$$y(0;v)=L(g+Bv)(0)=\int_S e^{sA}g(s)\,ds+\int_S e^{sA}Bv(s)\,ds=$$
$$=Lg(0)+LBv(0)\equiv g_0+Mv,\ \ v\in U, \tag{22}$$

де $g_0:=Lg(0)\equiv\int_S e^{sA}g(s)\,ds$ – елемент H, а $M:U\to H$, де $Mv:=LBv(0)\equiv\int_S e^{sA}Bv(s)\,ds,\ \ v\in U,$ – лінійний оператор.

Доведемо, що оператор M є неперервним. Справді, використовуючи (9), для довільного $v\in U$ маємо

$$|Mv|=|LBv(0)|=\left|\int_S e^{sA}Bv(s)\,ds\right|\leq\int_S e^{-\omega_0 s}|Bv(s)|\,ds\leq$$
$$\leq\left(\int_S e^{-2\omega_0 s}\,ds\right)^{1/2}\left(\int_S |Bv(s)|^2\,ds\right)^{1/2}=(2|\omega_0|)^{-1}||Bv||_{L_2(S;H)}\leq$$
$$\leq(2\lambda_1)^{-1}||B||_{\mathcal{L}(U;L_2(S;H))}||v||_U,$$

звідки випливає те, що нам потрібно.

Тепер переконаємося, що функціонал J є строго опуклим. Нехай $u,w\in U$ – довільні і різні. Маємо

$$2(Nv,w)_U<(Nv,v)_U+(Nw,w)_U. \tag{23}$$

Справді, з коерцитивності і симетричності оператора N випливає

$$0<\nu||v-w||_U^2\leq(N(v-w),v-w)_U=(Nv,v)_U-2(Nv,w)_U+(Nw,w)_U,$$

звідки маємо (23).

Тепер на підставі (22), (23), симетричності оператора N і опуклості функціонала $|\cdot|^2:H\to\mathbb{R}$ для будь-якого $\alpha\in(0,1)$ маємо

$$J(\alpha v+(1-\alpha)w)=|y(0;\alpha v+(1-\alpha)w)-z_0|^2+(N(\alpha v+(1-\alpha)w),\alpha v+(1-\alpha)w)_U=$$
$$=|\alpha(g_0+Mv-z_0)+(1-\alpha)(g_0+Mw-z_0)|^2+$$
$$+\alpha^2(Nv,v)_U+2\alpha(1-\alpha)(Nv,w)_U+(1-\alpha)^2(Nw,w)_U<$$

$$< \alpha|g_0 + Mv - z_0|^2 + (1-\alpha)|g_0 + Mw - z_0|^2 + \alpha(Nv, v)_U + (1-\alpha)(Nw, w)_U =$$
$$= \alpha J(v) + (1-\alpha)J(w),$$

що і доводить строгу опуклість функціонала J.

Доведемо, що функціонал J є диференційовним і знайдемо його диференціал. Нехай $v, h \in U$ – довільні. Тоді, враховуючи (22), маємо

$$J(v+h) - J(v) = |y(0; v+h) - z_0|^2 + (N(v+h), v+h)_U - |y(0; v) - z_0|^2 - (Nv, v)_U =$$
$$= |g_0 + Mv - z_0 + Mh|^2 - |g_0 + Mv - z_0|^2 + 2(Nv, h)_U + (Nh, h)_U =$$
$$= 2(g_0 + Mv - z_0, Mh) + 2(Nv, h)_U + |Mh|^2 + (Nh, h)_U.$$

Звідси випливає, що функціонал J є диференційовним і його диференціал

$$J'(v)h = 2(y(0; v) - z_0, Mh) + 2(Nv, h)_U, \quad v, h \in U. \tag{24}$$

Умова (20) для функціонала J випливає з коерцитивності оператора N. Отже, ми переконалися, що виконуються умови твердження 1, а значить, існує єдиний розв'язок $u \in U_\partial$ задачі (3) і він характеризується нерівністю (21).

Згідно з (24) нерівність (21) має вигляд

$$(y(0; u) - z_0, M(v-u)) + (Nu, v-u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial. \tag{25}$$

На підставі означення M маємо

$$M(v-u) = LB(v-u)(0) = \int_S e^{sA}(Bv - Bu)(s)ds = y(0; v) - y(0; u),$$

звідки та з (25) випливає нерівність (14). $\square$

Доведення теореми 2. Перш за все зауважимо, що на підставі теореми 2.20 роботи [8] при наших припущеннях для будь-якого $v \in U_\partial$ слабкий розв'язок задачі (12), (13) є єдиним її L_2-значним розв'язком, причому $y(v) \in W_2^1(S; H) \cap L_2(S; \mathcal{D}(A)) \cap C(S; \mathcal{D}(A))$.

Введемо в розгляд спряжений стан $p(t)$, $t \in S$, як розв'язок задачі

$$-\frac{dp(t)}{dt} + Ap(t) = 0, \;\; t \in S, \tag{26}$$

$$p(0) = y(0; u) - z_0, \tag{27}$$

$$p \in C^1(S; H) \cap C(S; \mathcal{D}(A)) \cap L_2(S; H). \tag{28}$$

Доведемо, що задача (26) – (28) має єдиний розв'язок. Для цього зробимо заміну змінних $\tau = -t$ і покладемо $\tilde{S} := [0; +\infty)$, $\tilde{p}(\tau) := p(-\tau)$, $\quad \tau \in \tilde{S}$. У результаті одержимо задачу

$$\frac{d\tilde{p}(\tau)}{d\tau} + A\tilde{p}(\tau) = 0, \;\; \tau \in \tilde{S}, \tag{29}$$

$$\tilde{p}(0) = p_0 := y(0;u) - z_0, \tag{30}$$

$$\tilde{p} \in C^1(\tilde{S};H) \cap C(\tilde{S};\mathcal{D}(A)) \cap L_2(\tilde{S};H). \tag{31}$$

Покажемо, що задача (29) – (31) має єдиний розв'язок. Для цього зауважимо, що задача відшукання функції $\tilde{p} \in C(\tilde{S};H) \cap C^1((0,+\infty);H) \cap C((0,+\infty);\mathcal{D}(A)))$, яка задовольняє рівняння (29) на промені $(0,+\infty)$ та початкову умову (30), є не що інше, як задача Коші для рівняння (29) в класичній постановці. З теорії півгруп (див., наприклад [9, 10]) і того, що $p_0 \in \mathcal{D}(A)$, випливає існування єдиної функції $\tilde{p} \in C^1(\tilde{S};H) \cap C(\tilde{S};\mathcal{D}(A)))$, яка задовольняє рівняння (29) на $\tilde{S}$, умову (30) та має зображення

$$\tilde{p}(\tau) = e^{-\tau A} p_0, \quad \tau \geq 0. \tag{32}$$

Звідси та з нерівності (9) маємо

$$|\tilde{p}(\tau)| \leq e^{\omega_0 \tau} |p_0|, \quad \tau \geq 0,$$

звідки видно, що $\tilde{p} \in L_2(\tilde{S};H)$.

Отож, ми довели існування єдиного розв'язку задачі (29) – (31), а значить, і однозначну розв'язність задачі (26) – (28) та зображення (див. (32)) розв'язку цієї задачі у вигляді

$$p(t) = e^{tA}(y(0;u) - z_0), \quad t \in S. \tag{33}$$

Нехай p – розв'язок задачі (26) – (28) і $t_0 < 0$ – довільне. Для кожного $t \in [t_0, 0]$ домножимо скалярно рівність (26) на $y(t;v) - y(t;u)$ і проінтегруємо отриману рівність за t від t_0 до 0 :

$$0 = -\int_{t_0}^{0} \left(\frac{dp(t)}{dt}, y(t;v) - y(t;u) \right) dt + \int_{t_0}^{0} (Ap(t), y(t;v) - y(t;u)) dt. \tag{34}$$

Використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо

$$-\int_{t_0}^{0} \left(\frac{dp(t)}{dt}, y(t;v) - y(t;u) \right) dt = -(p(0), y(0;v) - y(0;u)) + (p(t_0), y(t_0;v) - y(t_0;u)) +$$

$$+ \int_{t_0}^{0} \left(p(t), \frac{dy(t;v)}{dt} - \frac{dy(t;u)}{dt} \right) dt. \tag{35}$$

На підставі симетричності оператора A маємо

$$\int_{t_0}^{0} (Ap(t), y(t;v) - y(t;u)) dt = \int_{t_0}^{0} (p(t), Ay(t;v) - Ay(t;u)) dt. \tag{36}$$

Підставивши (35) і (36) в (34) та врахувавши (12) і (27), після простих перетворень отримаємо

$$\big(y(0;u)-z_0, y(0;v)-y(0;u)\big) = \big(p(t_0), y(t_0;v)-y(t_0;u)\big) + \int_{t_0}^{0} \big(p(t), B(v-u)(t)\big)\,dt. \tag{37}$$

З (33) випливає, що $|p(t_0)| \to 0$ при $t_0 \to -\infty$, а з того, що $y(\cdot;v) \in W_2^1(S;H)$, маємо $|y(t_0;v)| \to 0$ при $t_0 \to -\infty$. Зі сказаного, враховуючи, що p і $B(v-u)$ належать $L_2(S;H)$, випливає можливість граничного переходу в (37) при $t_0 \to -\infty$. У результаті цього переходу отримаємо

$$(y(0;u)-z_0, y(0;v)-y(0;u)) = ((p, B(v-u))), \tag{38}$$

де, як було раніше сказано, $((\cdot,\cdot))$ – скалярний добуток в $L_2(S;H)$.

Звідси та з (14) маємо нерівність, яка характеризує оптимальне керування

$$((p, B(v-u))) + (Nv, v-u)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_\partial.$$

З цієї нерівності, якщо врахувати означення оператора B^*, отримаємо (17). Отже, підсумовуючи сказане, приходимо до висновку про правильність нашої теореми. □

Доведення наслідку 1. З теореми 2 на підставі додаткових припущень нашого твердження випливає, що оптимальне керування u характеризується співвідношеннями

$$\frac{dy(t)}{dt} + Ay(t) = g(t) + u(t), \quad t \in S, \tag{39}$$

$$-\frac{dp(t)}{dt} + Ap(t) = 0, \quad t \in S, \qquad p(0) = y(0) - z_0, \tag{40}$$

$$p(t) + \nu u(t) = 0, \quad t \in S, \tag{41}$$

$$\begin{gathered} y \in W_2^1(S;H) \cap L_2(S;\mathcal{D}(A)), \\ p \in C^1(S;H) \cap C(S;\mathcal{D}(A)) \cap L^2(S;H), \ u \in L_2(S;\mathcal{D}(A)). \end{gathered} \tag{42}$$

В системі співвідношень (39) – (42) виключимо функцію p, використавши (41):

$$\frac{dy(t)}{dt} + Ay(t) = g(t) + u(t), \quad t \in S, \tag{43}$$

$$-\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = 0, \quad t \in S; \quad u(0) = -\frac{1}{\nu}\big(y(0) - z_0\big), \tag{44}$$

$$y \in W_2^1(S;H) \cap L_2(S;\mathcal{D}(A)), \quad u \in C^1(S;H) \cap C(S;\mathcal{D}(A)) \cap L_2(S;\mathcal{D}(A)). \tag{45}$$

Тепер виключимо із співвідношень (43) – (45) функцію y, використовуючи теорію півгруп лінійних обмежених операторів з $\mathcal{L}(H)$. При цьому використовуватимемо введену вище півгрупу $\{T(\tau) \equiv e^{-\tau A} \,|\, \tau \geq 0\}$.

Перш за все відмітимо, що функцію $y \in W_2^1(S,H) \cap L_2(S,\mathcal{D}(A))$, яка задовольняє рівняння (43), можна трактувати, як L_2-значний розв'язок задачі (12), (13) з $B = I$, $v = u$, а отже (див. [8, теорема 2.20]), її можна записати у вигляді

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)g(s)\,ds + \int_{-\infty}^{t} T(t-s)u(s)\,ds, \quad t \in S. \tag{46}$$

Звідси отримаємо

$$y(0) = \int_{-\infty}^{0} T(-s)g(s)\,ds + \int_{-\infty}^{0} T(-s)u(s)\,ds. \tag{47}$$

Отже, ми приходимо до висновку, що оптимальне керування u, тобто розв'язок задачі (3), характеризується співвідношеннями

$$(44), (47) \quad \text{та} \quad u \in C^1(S;H) \cap C(S;\mathcal{D}(A)) \cap L_2(S;\mathcal{D}(A)).$$

Спростимо ці співвідношення. Для цього зробимо в них заміну змінних $\tau = -t$ і покладемо

$$\tilde{S} := [0,+\infty); \qquad \tilde{u}(\tau) := u(-\tau), \quad \tilde{g}(\tau) := g(-\tau) \quad \forall \tau \in \tilde{S}.$$

У результаті отримаємо співвідношення

$$\frac{d\tilde{u}(\tau)}{d\tau} + A\tilde{u}(\tau) = 0, \quad \tau \in \tilde{S}; \quad \tilde{u}(0) = -\frac{1}{\nu}\big(y(0) - z_0\big), \tag{48}$$

$$y(0) = \int_{0}^{+\infty} T(s)\tilde{u}(s)\,ds + \int_{0}^{+\infty} T(s)\tilde{g}(s)\,ds. \tag{49}$$

$$\tilde{u} \in C^1(\tilde{S},H) \cap C(\tilde{S},\mathcal{D}(A)) \cap L_2(\tilde{S},\mathcal{D}(A)). \tag{50}$$

На основі теорії півгруп [9, 10] легко довести, що ці співвідношення є рівносильними співвідношенням

$$\tilde{u}(\tau) = -\frac{1}{\nu}T(\tau)\Big(\int_{0}^{+\infty} T(s)\tilde{u}(s)\,ds + \int_{0}^{+\infty} T(s)\tilde{g}(s)\,ds - z_0\Big), \quad \tau \in \tilde{S}, \tag{51}$$

$$\tilde{u} \in L_2(\tilde{S},\mathcal{D}(A)). \tag{52}$$

Справді, нехай $\tilde{u}$ є розв'язком задачі (51),(52). Тоді

$$\int_{0}^{+\infty} T(s)\tilde{u}(s)\,ds + \int_{0}^{+\infty} T(s)\tilde{g}(s)\,ds - z_0 \,\in\, \mathcal{D}(A),$$

а отже, з рівності (51) випливає, що $\tilde{u}$ належить $C^1(\tilde{S}, H) \cap C(\tilde{S}, \mathcal{D}(A))$ і задовольняє (48), (49). Це означає, що для $\tilde{u}$ є правильними співвідношення (48) – (50). Правильність оберненого твердження легко перевіряється через зображення розв'язків за допомогою півгруп.

Тепер зауважимо, що рівність (51) можна записати у вигляді

$$\tilde{u}(\tau) = -\frac{1}{\nu}\Big(\int_0^{+\infty} T(\tau+s)\tilde{u}(s)\,ds + \int_0^{+\infty} T(\tau+s)\tilde{g}(s)\,ds - T(\tau)z_0\Big), \quad \tau \in \tilde{S}. \quad (53)$$

Рівняння (53) є інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду, але з необмеженим проміжком інтегрування. Покажемо, що розв'язок $\tilde{u} \in L_2(\tilde{S}; \mathcal{D}(A))$ цього рівняння можна знайти методом послідовних наближень. Для цього спочатку запишемо це рівняння у вигляді операторного рівняння і доведемо, що при $\nu > (2\lambda_1)^{-1}$ до цього рівняння можна застосувати теорему Банаха про існування нерухомої точки оператора стиску.

Введемо оператор

$$G : L_2(\tilde{S}; \mathcal{D}(A)) \to L_2(\tilde{S}; \mathcal{D}(A)),$$

значення якого на довільному елементі $q \in L_2(\tilde{S}; \mathcal{D}(A))$ задається за правилом

$$(Gq)(\tau) = -\frac{1}{\nu}\Big(\int_0^{+\infty} T(\tau+s)q(s)\,ds +$$

$$+ \int_0^{+\infty} T(\tau+s)\tilde{g}(s)\,ds - T(\tau)z_0\Big), \quad \tau \in \tilde{S}. \quad (54)$$

Покажемо, що це означення оператора є коректним, тобто переконаємося, що для будь-якого елемента $q \in L_2(\tilde{S}; \mathcal{D}(A))$ маємо $Gq \in L_2(\tilde{S}; \mathcal{D}(A))$.

Нехай q – довільний елемент простору $L_2(\tilde{S}; \mathcal{D}(A))$. Зауважимо, що для будь-якого $\tau \in \tilde{S}$ маємо $T(\tau+s)q(s) \in \mathcal{D}(A)$ для майже всіх $s \in \tilde{S}$ і $T(\tau+\cdot)q(\cdot) \in L_2(\tilde{S}; \mathcal{D}(A))$. Легко переконатися, що для довільних $\tau \in \tilde{S}$ і майже всіх $s \in \tilde{S}$ правильним є такий ланцюжок нерівностей (через $\|\cdot\|$ позначається, як було раніше сказано, норма в $\mathcal{D}(A)$ (див. (7))):

$$\|T(\tau+s)q(s)\|^2 = |T(\tau+s)q(s)|^2 + |AT(\tau+s)q(s)|^2 \le \|T(\tau+s)\|^2_{\mathcal{L}(H)}|q(s)|^2 +$$

$$+ \|T(\tau+s)\|^2_{\mathcal{L}(H)}|Aq(s)|^2 \le \|T(\tau+s)\|^2_{\mathcal{L}(H)}\|q(s)\|^2,$$

тобто

$$\|T(\tau+s)q(s)\| \le \|T(\tau+s)\|_{\mathcal{L}(H)}\|q(s)\|. \quad (55)$$

Аналогічно

$$\|T(\tau+s)\tilde{g}(s)\| \le \|T(\tau+s)\|_{\mathcal{L}(H)}\|\tilde{g}(s)\|, \quad \|T(\tau)z_0\| \le \|T(\tau)\|_{\mathcal{L}(H)}\|z_0\| \quad (56)$$

для всіх $\tau \in \tilde{S}$ та майже всіх $s \in \tilde{S}$.

Отож, для довільного $\tau \in \tilde{S}$ і майже кожного $s \in \tilde{S}$, використовуючи (9), (55), (56) і позначення $\mu := -\omega_0 \equiv \lambda_1 > 0$, отримаємо оцінки

$$\nu \, \|Gq(\tau)\| \le \Big\| \int_0^{+\infty} T(\tau+s)q(s)\,ds \Big\| + \Big\| \int_0^{+\infty} T(\tau+s)\tilde{g}(s)\,ds \Big\| + \Big\| T(\tau)z_0 \Big\| \le$$

$$\le \int_0^{+\infty} \|T(\tau+s)\|_{\mathcal{L}(H)} \|q(s)\|\,ds + \int_0^{+\infty} \|T(\tau+s)\|_{\mathcal{L}(H)} \|\tilde{g}(s)\|\,ds + e^{-\mu\tau}\|z_0\| \le$$

$$\le e^{-\mu\tau} \int_0^{+\infty} e^{-\mu s}\|q(s)\|\,ds + e^{-\mu\tau} \int_0^{+\infty} e^{-\mu s}\|\tilde{g}(s)\|\,ds + e^{-\mu\tau}\|z_0\| \le$$

$$\le \Bigg[\left(\int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}\,ds \right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} \|q(s)\|^2 ds \right)^{1/2} +$$

$$+ \left(\int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}\,ds \right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} \|\tilde{g}(s)\|^2\,ds \right)^{1/2} + \|z_0\| \Bigg] e^{-\mu\tau} \le$$

$$\le \big[(2\mu)^{-1/2}\|q\|_{L_2\left(\tilde{S};\mathcal{D}(A)\right)} + (2\mu)^{-1/2}\|\tilde{g}\|_{L_2\left(\tilde{S};\mathcal{D}(A)\right)} + \|z_0\| \big] e^{-\mu\tau}, \quad \tau \in \tilde{S}. \tag{57}$$

Звідси випливає, що $Gq \in L_2(\tilde{S};\mathcal{D}(A))$.

Тепер відмітимо, що рівняння (53), враховуючи (54), можна записати у вигляді

$$\tilde{u} = G\tilde{u}. \tag{58}$$

Доведемо, що при $\nu > (2\mu)^{-1}$ оператор G є оператором стиску. Справді, для будь-яких $q_1,\ q_2 \in L_2(\tilde{S};\mathcal{D}(A))$ і довільного $\tau \in \tilde{S}$, враховуючи (55), маємо

$$\|Gq_1(\tau) - Gq_2(\tau)\| \le \frac{1}{\nu} \int_0^{+\infty} \|T(\tau+s)\|_{\mathcal{L}(H)} \|q_1(s) - q_2(s)\|\,ds \le$$

$$\le \frac{e^{-\mu\tau}}{\nu} \int_0^{+\infty} e^{-\mu s}\|q_1(s) - q_2(s)\|\,ds \le$$

$$\le \frac{e^{-\mu\tau}}{\nu} \left(\int_0^{+\infty} e^{-2\mu s}\,ds \right)^{1/2} \left(\int_0^{+\infty} \|q_1(s) - q_2(s)\|^2\,ds \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{e^{-\mu\tau}}{\nu\sqrt{2\mu}} \|q_1 - q_2\|_{L^2(\tilde{S};\mathcal{D}(A))},$$

звідки

$$\|Gq_1 - Gq_2\|_{L_2(\tilde{S};\mathcal{D}(A))} \le$$

$$\le \frac{1}{\nu\sqrt{2\mu}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-2\mu\tau} d\tau \right)^{1/2} \|q_1 - q_2\|_{L_2(\tilde{S};\mathcal{D}(A))} =$$

$$= \frac{1}{2\nu\mu}\|q_1 - q_2\|_{L_2(\tilde{S};\mathcal{D}(A))},$$

тобто

$$\|Gq_1 - Gq_2\|_{L_2(\tilde{S};\mathcal{D}(A))} \leq (2\nu\mu)^{-1}\|q_1 - q_2\|_{L_2(\tilde{S};\mathcal{D}(A))}. \tag{59}$$

З (59) випливає, що при $\nu > (2\mu)^{-1}$ оператор G є оператором стиску, а отже, до рівняння (58) можна застосувати теорему Банаха про існування нерухомої точки оператора стиску. Звідси отримуємо існування єдиного елемента $\tilde{u} \in L_2(\tilde{S};\mathcal{D}(A))$, який є розв'язком рівняння (58), а отже, і рівняння (53), яке є рівносильним рівнянню (51). Тепер залишилося тільки повернутися в рівнянні (53) до змінної t замість τ, чим і завершити доведення даного твердження. □

1. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления – М.: Наука , 1969.
2. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределёнными параметрами – М.: Наука, 1975.
3. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения - М: Мир,1978.
4. *Згуровский М.З.* Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями - К.: Наукова думка, 2004.
5. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными– М.: Мир , 1972.
6. *Balakrishnan V.* Semigroup theory and control theory – Washington, 1965.
7. *Bermudez A.* Some applications of optimal control theory of distributed systems // Control, optimasation and calculus of variations. – 2002. – V.8. – P.195-218.
8. *Bokalo M., Lorenzi A.* Linear evolution first-order problems without initial conditions // Milan Journal of Mathematics. – 2009. – V. 77. – 437-494.
9. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations – Springer-Verlag, New York, 1983.
10. *Showalter R.E.* Hilbert space methods for partial differential equations – Monographs and studies in mathematics (Monographs in differential equations), Volume 1, Pitman, London, 1977.

Львівський національний університет
імені Івана Франка, Україна
mm.bokalo@gmail.com

Отримано 8.02.11