©2009. **Е.А. Пронина**

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАРОТРОПНОГО ГАЗА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Рассматриваются эволюционная и спектральная задачи, порождённые малыми движениями сжимаемого баротропного вязкого и невязкого газа в ограниченной области.

Доказано, что начально–краевая задача о малых движениях идеального баротропного газа в замкнутом неподвижном сосуде имеет единственное сильное решение на любом отрезке времени. В соответствующей спектральной задаче установлено, что ее спектр состоит из бесконечнократного нулевого собственного значения (очевидное решение) и двух ветвей конечнократных собственных значений, локализованных в окрестности мнимой оси. Этим ветвям отвечает совокупность корневых элементов, образующая базис Абеля–Лидского в подпространстве, ортогональном к подпространству очевидных решений.

Аналогичные вопросы рассмотрены и для случая вязкого газа.

Ключевые слова: баротропный газ; спектральная задача; гильбертово пространство; задача Коши; операторный метод
MSC (2000): 35Q35; 76B03; 76D03

1. Общая постановка линейно начально-краевой задачи.

Будем считать, что некоторый сосуд $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей $S := \partial\Omega$ класса C^2 целиком заполнен сжимаемым газом. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t,x), x \in \Omega$, поле скоростей движения газа, через $P = P(t,x)$ – поле давлений, $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(t,x)$ – поле плотности, а через $\vec{F} = \vec{F}(t,x)$ – поле внешних массовых сил.

Рассмотрим малые движения газа, близкие к состоянию покоя. Пусть

$$\vec{F}(t,x) = -g\vec{e}_3 + \vec{f}(t,x), \qquad (1)$$

где $g > 0$ – ускорение силы тяжести, $\vec{e}_3$ – орт декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$, выбранной так, что ось Ox_3 направлена против ускорения гравитационного поля, а $\vec{f}(t,x)$ – малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное.

Пусть

$$P(t,x) = P_0(x_3) + p(t,x), \quad \tilde{\rho}(t,x) = \rho_0(x_3) + \rho(t,x), \qquad (2)$$

где $P_0(x_3)$ и $\rho_0(x_3)$ – давление и плотность газа в состоянии покоя. Считая, что вертикальный размер области Ω не является достаточно большим, будем иметь

$$\rho_0(x_3) \simeq \rho_0 = \text{const} > 0, \quad P_0(x_3) = -\rho_0 g x_3 + c. \qquad (3)$$

В этом приближении начально-краевая задача о малых движениях баротропного газа принимает следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \rho_0\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}-\mu\triangle\vec{u}-(\mu+\mu')\,\nabla\mathrm{div}\vec{u}+\rho g\vec{e}_3+\nabla p=\rho_0\vec{f},\\ \frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho_0\,\mathrm{div}\vec{u}=0,\ p=c^2\rho\ (\text{в }\Omega),\\ u_n:=\vec{u}\cdot\vec{n}=0\ (\text{на }S),\ \int\limits_{\Omega}\rho\,d\Omega=0,\\ \vec{u}(0,x)=\vec{u}^{\,0}(x),\ \rho(0,x)=\rho^0(x), x\in\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Здесь $c^2 = \mathrm{const} > 0$ – скорость звука в газе, μ и μ' – первая и вторая динамические вязкости газа, $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к границе $S = \partial\Omega$. Отметим еще, что условие $\int\limits_{\Omega}\rho\,d\Omega = 0$ следует из того, что в процессе движения газа его масса не изменяется. Кроме того, для вязкого газа на S вместо условия непротекания $u_n = 0$ должно выполняться условие прилипания $\vec{u} = \vec{0}$ (на S).

2. Задача о малых движениях идеального баротропного газа.

Рассмотрим задачу (4) при $\mu = \mu' = 0$, учтем условие баротропности $p = c^2\rho$ и перепишем эту задачу в более симметричном виде, введя вместо $\rho(t, x)$ новую искомую функцию:

$$\eta(t,x) = c\,\rho_0^{-1}\rho(t,x). \tag{5}$$

Тогда задача (4) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+c\nabla\eta+gc^{-1}\vec{e}_3\eta=\vec{f}(t,x),\ \frac{\partial\eta}{\partial t}+c\,\mathrm{div}\vec{u}=0\ (\text{в }\Omega),\\ u_n=0\ (\text{на }S),\ \int\limits_{\Omega}\eta\,d\Omega=0,\ \vec{u}(0,x)=\vec{u}^{\,0}(x),\ \eta(0,x)=\eta^0(x)\ (\text{в }\Omega). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Исследуем задачу (6) методами теории операторов, действующих в гильбертовом пространстве, и теории дифференциально-операторных уравнений (см., например, [1]).

С этой целью введем гильбертовы пространства $\vec{L}_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ векторных и скалярных функций со стандартными нормами

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)} := \int\limits_{\Omega}|\vec{u}|^2 d\Omega,\ \ \|\eta\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega}|\eta|^2 d\Omega, \tag{7}$$

и соответствующими скалярными произведениями. Далее, будем считать, что в (6) $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$ – функция переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega)$, а $\eta = \eta(t, x)$

– функция t со значениями в $L_2(\Omega)$. В связи с этим далее производные $\partial/\partial t$ заменяем на d/dt.

Интегральное условие в (6) показывает, что

$$\eta = \eta(t) \in L_{2,\Omega} := L_2(\Omega) \ominus \{1_\Omega\}. \tag{8}$$

Введем еще пространство $H^1(\Omega)$ с нормой

$$\|\eta\|^2_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega |\nabla\eta|^2 d\Omega + \Big(\int\limits_\Omega \eta\, d\Omega\Big)^2,$$

эквивалентной стандартной норме, и его подпространство

$$H^1_\Omega := \{\rho \in H^1(\Omega) : \int\limits_\Omega \rho\, d\Omega = 0\}. \tag{9}$$

Тогда

$$\|\rho\|^2_{H^1_\Omega} = \int\limits_\Omega |\nabla\rho|^2 d\Omega.$$

Перепишем уравнения задачи (6) в векторно-матричной форме

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \eta \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \mathrm{div} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \eta \end{pmatrix} + g\,c^{-1}\begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

и введем следующие обозначения:

$$\mathcal{H} := \vec{L}_2(\Omega) \oplus L_{2,\Omega}, \quad z(t) := (\vec{u};\eta)^t, \quad \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega), \eta \in L_{2,\Omega},$$

$$\|z\|^2_{\mathcal{H}} := \int\limits_\Omega |\vec{u}|^2 d\Omega + \int\limits_\Omega |\eta|^2 d\Omega, \quad f(t) := (\vec{f}(t);0)^t,$$

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} 0 & \nabla \\ \mathrm{div} & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(C) = \mathcal{H}, \tag{11}$$

$$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{B}}) := \{z = (\vec{u};\eta)^t : \vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega),\ u_n = 0 \text{ (на } S),\ \eta \in H^1_\Omega\}, \tag{12}$$

где $\vec{H}^1(\Omega)$ – пространство векторных полей $\vec{u} = \sum\limits_{k=1}^{3} u_k\,\vec{e}_k$ с проекциями на оси $u_k \in H^1(\Omega)$.

Лемма 1. *Оператор $\widetilde{\mathcal{B}}$, заданный на $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{B}})$, является кососамосопряженным неограниченным оператором, действующим в $\mathcal{H}$: $\widetilde{\mathcal{B}}^* = -\widetilde{\mathcal{B}}$, $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{B}}^*) = \mathcal{D}(\mathcal{B})$. При этом он имеет бесконечномерное ядро*

$$\mathrm{Ker}\widetilde{\mathcal{B}} = \{z = (\vec{u};0)^t : \forall\vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega)\}, \tag{13}$$

$$\vec{J}_0(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : \operatorname{div}\vec{u} = 0 \; (\textit{в}\; \Omega), \; u_n = 0 \, (\textit{на}\; S)\}. \tag{14}$$

(Здесь операции $\operatorname{div}\vec{u}$ *и* $u_n = \vec{u} \cdot \vec{n}$ *понимаются в смысле обобщенных функций (распределений).)*

Доказательство. Оно проводится по тому же плану, что и в работах [2-3], где рассматривалась плоская (двумерная) задача для вращающегося тонкого слоя идеальной несжимаемой жидкости. □

С учетом введенных обозначений и леммы 1 задачу (6) можно переписать в виде задачи Коши в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\frac{dz}{dt} = i\, c\mathcal{B}z - g\, c^{-1}\, Cz + f(t), \quad z(0) = z^0 = (\vec{u}^{\,0}; \eta^0)^t, \tag{15}$$

где

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^* = i\, \widetilde{\mathcal{B}}, \qquad \mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{B}}). \tag{16}$$

Так как оператор $\mathcal{B}$ самосопряжен, то оператор $ic\mathcal{B}$ является генератором сильно непрерывной группы унитарных операторов. В силу очевидной ограниченности оператора C (см. (11)) оператор $i\, c\mathcal{B} - g\, c^{-1}\, C$ также является генератором C_0-группы, и через нее можно выразить сильное решение задачи Коши (15)– (16), если выполнены условия

$$z^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{B}), \quad f(t) \in C^{\,1}([0,T];\, \mathcal{H}). \tag{17}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}^{\,0} \in \vec{H}^1(\Omega), \; u_n = 0 \, (\textit{на}\, S), \; \eta^0 \in H^1_\Omega, \; \vec{f}(t) \in C^{\,1}([0,T];\, \mathcal{H}). \tag{18}$$

Тогда задача (15)*, а вместе с ней и исходная задача* (6) *имеют единственное сильное решение на отрезке [0,T]. Это означает, что существует единственная функция* $z(t)$ *такая, что для любого* $t \in [0,T]$ *выполнено уравнение* (15)*, причем все слагаемые в нем являются непрерывными функциями* t*, а также выполнено начальное условие* (15)*. Соответственно в задаче* (6) *выполнены уравнения движения и неразрывности, причем в первом уравнении все слагаемые являются непрерывными функциями* t *со значениями в* $\vec{L}_2(\Omega)$*, а во втором уравнении - непрерывными функциями* t *со значениями в* $L_{2,\Omega}$*. При этом выполнены также начальные условия* (6)*.*

3. Задача о собственных колебаниях идеального баротропного газа.

Рассмотрим решения однородного уравнения (15), зависящие от t по закону $\exp(i\omega ct)$, где ωc – комплексная частота колебаний. Имеем $z(t) = e^{i\omega ct}z$, $z \in \mathcal{H}$, и для амплитудных элементов z приходим к спектральной задаче

$$\mathcal{B}z + igc^{-2}Cz = \omega z, \; z \in \mathcal{D}(\mathcal{B}), \tag{19}$$

относительно спектрального параметра $\omega \in \mathbb{C}$.

Лемма 2. *Число* $\omega = 0$ *является бесконечнократным собственным значением задачи* (19) *и*

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{B} + igc^{-2}C) = \mathrm{Ker}\mathcal{B} = \{z = (\vec{u}; 0)^t : \forall \vec{u} \in \vec{J}_0(\Omega)\} =: \mathcal{H}_0. \tag{20}$$

Доказательство. При $\omega = 0$ с учетом обозначений (16), (11) приходим к уравнениям

$$\nabla\eta + gc^{-2}\vec{e}_3\eta = 0, \int\limits_{\Omega} \eta \, d\Omega = 0; \quad \mathrm{div}\vec{u} = 0, \ u_n = 0 \ (\text{на } S). \tag{21}$$

Тогда

$$\eta = \eta(x_3) = \eta_0 e^{-gc^{-2}x_3}, \quad \eta_0 \int\limits_{\Omega} e^{-gc^{-2}x_3} d\Omega = 0 \Rightarrow \eta_0 = 0.$$

Отсюда и из (14) следует (20). □

Воспользуемся далее ортогональным разложением

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega), \tag{22}$$

где $\vec{G}(\Omega)$ – подпространство потенциальных полей:

$$\vec{G}(\Omega) := \{\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega) : \ \vec{v} = \nabla\varphi, \int\limits_{\Omega} \varphi \, d\Omega = 0\}. \tag{23}$$

Нетрудно видеть, что между элементами из $\vec{G}(\Omega)$ и H^1_Ω (см. (9)) имеется изометрический изоморфизм:

$$\|\nabla\varphi\|_{\vec{L}_2(\Omega)} = \|\varphi\|_{H^1_\Omega}, \ \forall\varphi \in H^1_\Omega. \tag{24}$$

Введем ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega) \oplus L_{2,\Omega} =: \mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1,$$

$$\mathcal{H}_1 := \{z = (\vec{u}; \eta)^t \in \mathcal{H} : \ \forall\vec{u} = \nabla\varphi \in \vec{G}(\Omega), \ \forall\eta \in L_{2,\Omega}\}.$$

Лемма 3. *Пусть* P_1 *– ортопроектор из* $\mathcal{H}$ *на* $\mathcal{H}_1$. *Оператор*

$$\mathcal{B}_1 := P_1\mathcal{B}|_{\mathcal{H}_1} = \mathcal{B}_1^*, \tag{25}$$

имеет дискретный спектр, состоящий из положительной и отрицательной ветвей собственных значений $\lambda_k^{\pm}(\mathcal{B})$ *с предельными точками* $\lambda = \pm\infty$ *соответственно и асимптотическим поведением*

$$\lambda_k^{\pm}(\mathcal{B}) = \pm\Big(|\Omega|/6\pi^2\Big)^{-1/3} k^{1/3}[1 + o(1)]\ (k \to \infty). \tag{26}$$

Система собственных элементов $z_k^{\pm} = (\nabla\varphi_k^{\pm};\ \eta_k^{\pm})^t$, $k = 1, 2, \ldots$, *отвечающая этим собственным значениям, образует ортогональный базис в* $\mathcal{H}_1$*:*

$$(z_k^{\pm}, z_l^{\pm})_{\mathcal{H}} = (\lambda_k^{\pm})^{-1}(\mathcal{B}z_k^{\pm}, z_l^{\pm})_{\mathcal{H}} = \delta_{kl}. \tag{27}$$

Доказательство. Оно основано на том, что задача на собственные значения для оператора $\mathcal{B}_1$ равносильна системе уравнений

$$i\nabla\eta = \lambda\nabla\varphi,\ i\mathrm{div}\nabla\varphi = \lambda\eta\ (\text{в } \Omega),\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0\ (\text{на } S),\ \int\limits_{\Omega}\eta\, d\Omega = \int\limits_{\Omega}\varphi\, d\Omega = 0, \tag{28}$$

которая, в свою очередь, приводит к известной задаче Неймана

$$-\triangle\eta = \lambda^2\eta\ (\text{в } \Omega),\ \frac{\partial\eta}{\partial n} = 0\ (\text{на } S = \partial\Omega),\ \int\limits_{\Omega}\eta\, d\Omega = 0. \tag{29}$$

В частности, асимптотические формулы (26) следуют из классической асимптотики Вейля для собственных значений задачи (29). □

Возвращаясь к задаче (19), представим ее решение в виде

$$z = z_0 + z_1,\ z_0 = (\vec{\omega}; 0)^t \in \mathcal{H}_0,\ \vec{\omega} \in \vec{J}_0(\Omega), \tag{30}$$

$$z_1 = (\nabla\varphi; \eta)^t \in \mathcal{H}_1,\ \nabla\varphi \in \vec{G}(\Omega),\ \eta \in H^1_{\Omega}. \tag{31}$$

Подставляя это представление в (19) (это можно делать, так как $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ – инвариантные подпространства для $\mathcal{B}$, см. лемму 3) и действуя ортопроекторами P_0 и P_1 соответственно, с учетом свойства $Cz_0 = 0$ (см. (11)), приходим к системе уравнений

$$\mathcal{B}_1 z_1 + igc^{-2}P_1CP_1z_1 = \omega z_1,\ igc^{-2}P_0CP_1z_1 = \omega z_0. \tag{32}$$

Отсюда следует, что элементы z_1 находятся из первого уравнения, а элементы z_0 выражаются через z_1 из второго соотношения.

Теорема 2. *Задача* (32) *имеет дискретный спектр* $\{\omega_k^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$, *состоящий из двух ветвей конечнократных собственных значений, локализованных в полосе* $|\mathrm{Im}\lambda| \le gc^{-2}$ *и имеющих асимптотическое поведение*

$$\omega_k^{\pm} = \lambda_k^{\pm}(\mathcal{B}) = \pm\Big(|\Omega|/6\pi^2\Big)^{1/2} k^{1/3}[1 + o(1)]\ (k \to \infty). \tag{33}$$

Корневые (собственные и присоединенные) элементы $\{z_{1k}^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$, $z_{1k}^{\pm} = P_1 z_k^{\pm}$, *отвечающие собственным значениям* $\omega_k^{\pm}$, *образуют базис Абеля-Лидского порядка* $\alpha > 3$ *в подпространстве* $\mathcal{H}_1$.

Доказательство. Первое уравнение (32) есть задача на собственные значения для слабо возмущенного самосопряженного неограниченного оператора с дискретным спектром. Поэтому утверждения теоремы следуют из утверждений 1^0 и 2^0 монографии [4], стр.292. □

Отметим, что спектру частот $\omega_k^{\pm}$ из (33) отвечают акустические волны, возникающие в баротропном газе при дополнительном действии гравитационных сил.

4. Малые движения вязкого баротропного газа.

Исследуя задачу о малых движениях вязкого баротропного газа, осуществим в (4) ту же замену (5), а также замены

$$\nu = \mu\rho_0^{-1},\ \nu' = \mu'\rho_0^{-1}.$$

Тогда возникает начально-краевая задача

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - (\nu\triangle\vec{u} + (\nu+\nu')\,\nabla\mathrm{div}\vec{u}) + c\nabla\eta + gc^{-1}\eta\vec{e}_3 = \vec{f}(t,x),\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + c\,\mathrm{div}\vec{u} = 0\ (\text{в }\Omega),\quad (34)$$

$$\int\limits_{\Omega}\eta\,d\Omega = 0,\ \vec{u} = \vec{0}\ (\text{на } S),\ \vec{u}(0,x) = \vec{u}^{\,0}(x),\ \eta(0,x) = \eta^0(x), x\in\Omega. \qquad (35)$$

Эту задачу, как и в п.2, приведем к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{L}_2(\Omega)\oplus L_{2,\Omega}$.

С этой целью рассмотрим оператор $A : \mathcal{D}(A)\subset\vec{L}_2(\Omega)\to\vec{L}_2(\Omega)$, действующий по закону

$$A\vec{u} := -(\nu\triangle\vec{u} + (\nu+\nu')\nabla\mathrm{div}\vec{u}), \qquad (36)$$

$$\mathcal{D}(A) := \{\vec{u}\in\vec{H}^2(\Omega):\ \vec{u} = \vec{0}\ (\text{на } S)\}. \qquad (37)$$

Лемма 4. *Оператор A является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором с дискретным спектром. Его собственные значения*
$\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^{\infty}$ *конечнократны и имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k(A) = c_A\,k^{2/3}[1+o(1)],\ c_A = |\Omega|/(2\pi^2),\ k\to\infty. \qquad (38)$$

Собственные элементы оператора A образуют ортогональный базис в пространстве $\vec{L}_2(\Omega)$ *и в пространстве* $\vec{H}_0^1(\Omega)$ *с эквивалентной нормой*

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}_0^1(\Omega)} = \nu\,E(\vec{u},\vec{u}) + \nu'\int\limits_{\Omega}|\mathrm{div}\vec{u}|^2 d\Omega, \qquad (39)$$

$$E(\vec{u},\vec{u}) := \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{j,k=1}^{3}\Big(|\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_j}|^2\Big)\,d\Omega, \quad \vec{H}^1_0(\Omega) := \{\vec{u}\in\vec{H}^1(\Omega):\ \vec{u}=\vec{0}\ (\textit{на}\ S)\}. \tag{40}$$

С помощью введенного оператора A задачу (34)– (35) можно переписать в виде

$$\frac{dz}{dt} = -\mathcal{A}z + i\,c\,\mathcal{B}z - g\,c^{-1}Cz + f(t), \quad z(0)=z^0, \tag{41}$$

$$z=(\vec{u};\eta)^t,\ \vec{u}\in\mathcal{D}(A),\ \eta\in H^1_\Omega,\ \mathcal{A}:=\mathrm{diag}(A;0). \tag{42}$$

Здесь операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ неограничены, $\mathcal{A}=\mathcal{A}^*\geq 0,\ \mathcal{B}=\mathcal{B}^*$.

Для приведения задачи (41) к стандартной изученной проблеме осуществим замену

$$z(t)=e^{at}y(t),\ a>0. \tag{43}$$

Тогда взамен (41) возникает задача Коши

$$\frac{dy}{dt} = -\begin{pmatrix} A_a & 0 \\ 0 & aI \end{pmatrix} y + i\,c\begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} y - gc^{-1}Cy + f_0(t), \tag{44}$$

$$f_0(t)=e^{-at}f(t),\ y(0)=z^0,\ A_a:=A+aI\gg 0, \tag{45}$$

где B_{12} и $B_{21}=B_{12}^*$ – соответствующие нулевые элементы матричного оператора $\mathcal{B}$ (см. (16) и (11)).

Лемма 5. *Имеет место факторизация*

$$\begin{pmatrix} A_a & -icB_{12} \\ -icB_{21} & aI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -icA_a^{-1/2}B_{12} \\ -icB_{21}A_a^{-1/2} & aI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{46}$$

причем оператор $Q := B_{21}A_a^{-1/2} : \vec{L}_2(\Omega)\to L_{2,\Omega}$ ограничен, а оператор $Q^+ := A_a^{-1/2}B_{12}$, $\mathcal{D}(Q^+)=\mathcal{D}(B_{12})=H^1_\Omega$, обладает свойствами

$$Q^+ = Q^*|_{H^1_\Omega}, \quad \overline{Q^+}=Q^*. \tag{47}$$

Лемма 6. *Операторная матрица* (46) *допускает замыкание до максимального равномерно аккретивного оператора:*

$$\mathcal{A}_a := \begin{pmatrix} A_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -icQ^* \\ -icQ & aI \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_a^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{48}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_a) = \{y = (\vec{y}_1; y_2)^t : \ A_a^{1/2}\vec{y}_1 - icQ^* y_2 \in \mathcal{D}(A_a^{1/2})\}, \tag{49}$$

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}_a y, y)_{\mathcal{H}} \geq a\|y\|^2_{\mathcal{H}}, \ \forall y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_a). \tag{50}$$

Рассмотрим наряду с (44)– (45) задачу Коши

$$\frac{dy}{dt} = -\mathcal{A}_a y - gc^{-1}C\, y + f_0(t), \quad y(0) = z^0. \tag{51}$$

Из леммы 6 следует, что оператор $-\mathcal{A}_a$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы. Так как оператор C ограничен, то оператор $-\mathcal{A}_a - g\, c^{-1}C$ является генератором C_0-полугруппы.

Из этих фактов следует утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*

$$\vec{u}^{\,0} \in \mathcal{D}(A), \ \eta^0 \in H^1_\Omega, \ \vec{f}(t,x) \in C^1([0,T]; \vec{L}_2(\Omega)). \tag{52}$$

Тогда задача (44)*, а поэтому и исходная задача* (34)– (35) *имеют единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Можно проверить, что из условий (52) следует, что в задаче (51) $z^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_a)$, $f_0(t) \in C^1([0,T]; \mathcal{H})$. Поэтому задача (51) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Далее устанавливается (с использованием теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода), что при этих же условиях задача (44)– (45) имеет единственное сильное решение. Отсюда, возвращаясь от (44)– (45) к исходной задаче (34)– (35), получаем, что она имеет единственное сильное решение, т.е. все слагаемые в первом уравнении (34) – непрерывные функции t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega)$, а во втором уравнении – непрерывные функции t со значениями в $L_{2,\Omega}$. При этом выполнены также начальные условия (35). □

Автор благодарит Копачевского Н.Д. за руководство работой.

1. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
2. *Иванов Ю.Б., Копачевский Н.Д.* О разрешимости начально-краевой задачи о малых движениях вращающегося слоя идеальной жидкости // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ, Симферополь). – №1. – 2003. – С. 61-77.
3. *Копачевский Н.Д.* Собственные колебания вращающегося слоя идеальной жидкости // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ, Симферополь). – №2. – 2006. – С. 3-27.
4. *Agranovich M.S., Katsenelenbaum B.Z., Sivov A.N., Voitovich N.N.* Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory. – Willy-VCH, Berlin,Toronto, 1999. – 380 pp.

Таврический национальный ун-т им. В.И. Вернадского, Симферополь
`namekat@gmail.com`

Получено 28.02.09