©2009. **В.И. Войтицкий**

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЁЛОЙ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТОМ СОСУДЕ

Рассматривается линейная начально-краевая задача, порождённая малыми движениями сверхтекучей жидкости в открытом сосуде. Считается, что жидкость находится в достаточно сильном гравитационном поле, поэтому влияние капиллярных сил не учитывается. Получены достаточные условия существования сильного решения задачи на произвольном отрезке времени $[0; T]$.

Ключевые слова: малые движения, гильбертово пространство, разложение Вейля, вложение пространств, самосопряжённый оператор, операторная матрица, дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве, сильное решение
MSC (2000): 35Q35, 47F05

1. Введение. Постановка задачи.

В данной работе в рамках двухскоростной модели Л.Д. Ландау рассматривается линейная начально-краевая задача, порожденная малыми движениями сверхтекучего гелия (He II) в открытом сосуде.

Эксперименты Капицы и др. (1938) показали, что при температурах ниже $2,17°$K жидкий гелий может протекать сквозь узкие капилляры (диаметром порядка 10^{-4} см.), не испытывая сколько-нибудь заметного сопротивления. Это явление (присущее идеальной жидкости) получило название "сверхтекучесть". Однако, в ряде других опытов выяснилось, что вязкость сверхтекучего гелия всё же проявляется. В результате физики пришли к выводу, что при низких температурах He II проявляет себя как идеальная и вязкая жидкость одновременно. Это позволило Л.Д. Ландау построить в 1941 г. двухскоростную модель, согласно которой для описания движения сверхтекучей жидкости вместо одного поля скоростей следует ввести два поля: поле скоростей движения сверхтекучей (идеальной) компоненты и поле скоростей движения нормальной (вязкой) компоненты сверхтекучей жидкости.

Итак, пусть сверхтекучий гелий частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ограниченную твердой стенкой S и открытой свободной поверхностью Γ (граница $\partial\Omega = \Gamma \cup S$ является липшицевой). Будем считать, что поверхность Γ является в состоянии покоя плоской, расположенной перпендикулярно ускорению достаточно сильного гравитационного поля $\vec{g}$. Тогда силами поверхностного натяжения можно пренебречь.

Согласно модели Л.Д. Ландау введем поля скоростей сверхтекучей и нормальной компоненты жидкости $\vec{w}(x,t)$ и $\vec{v}(x,t)$ $(x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega)$ соответственно. Компоненты взаимно проникают друг в друга без трения и относительное количество их в каждом единичном элементе объема равно ρ_s/ρ и

ρ_n/ρ ($\rho = \rho_s + \rho_n$). Плотности соответствующих компонент ρ_s и ρ_n считаем заданными константами. Не учитывая также изменения ряда других физических параметров (энтропия, теплопроводность и др.), что не противоречит физическому смыслу задачи, уравнения Ландау могут быть записаны как соответствующие уравнения движения идеальной и вязкой несжимаемой жидкости (см. [1], с. 184).

Выберем систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы начало координат O находилось на Γ и $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, тогда после линеаризации получаем следующие уравнения (см. [1], с. 133):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_n}\nabla p_n + \nu\Delta\vec{v} + \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad (\text{в } \Omega), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_s}\nabla p_s + \vec{f}, \qquad \operatorname{div}\vec{w} = 0, \quad (\text{в } \Omega). \tag{2}$$

Здесь кроме полей скоростей неизвестными также являются поля динамических давлений p_n и p_s, являющиеся отклонениями давлений нормальной и сверхтекучей компоненты жидкости от соответствующих равновесных давлений p_n^0 и p_s^0. В состоянии покоя (с учетом выбора системы координат) имеем

$$p_n^0(x_3) = c_n - \rho_n g x_3, \quad p_s^0(x_3) = c_s - \rho_s g x_3, \quad c_n + c_s = p_a,$$

где c_n и c_s — некоторые заданные константы, а p_a — постоянное внешнее (атмосферное) давление. Уравнения (1) и (2) — это линеаризованные уравнения Навье-Стокса и Эйлера, описывающие малые движения вязкой и идеальной нисжимаемых жидкостей соответствено под действием заданного поля внешних сил $\vec{f}$.

Перейдем теперь к граничным условиям. Будем предполагать, что на твердой стенке S отсутствует поток тепла (стенка теплоизолирована), тогда имеем $\vec{v}\cdot\vec{n} = \vec{w}\cdot\vec{n} = 0$ (на S), где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе области Ω. Кроме этого, поскольку на нормальную компоненту скорости действуют вязкие напряжения, то также следует положить равной нулю тангенциальную составляющую скорости $\vec{v}$, т.е. $\vec{v}\cdot\vec{\tau} = 0$ для любого вектора $\vec{\tau}$ из касательной плоскости к S. Отсюда получаем

$$\vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{w}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } S). \tag{3}$$

Далее рассмотрим граничные условия на свободной поверхности. Считая отклонения движущейся поверхности $\Gamma(t)$ от равновесной поверхности Γ малыми, введём функцию

$$\zeta(t, x_1, x_2) = x_3, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma, \tag{4}$$

описывающую в момент времени t малые отклонения Γ вдоль внешней нормали $\vec{n} = \vec{e}_3$. С помощью функции ζ от условий на $\Gamma(t)$ можно перейти к условиям на Γ и считать занимаемую сверхтекучей жидкостью область Ω фиксированной.

Согласно квантово-механическим принципам в любой момент времени каждая молекула жидкости участвует как в сверхтекучем, так и в нормальном типе движения, т.е. нормальная и сверхтекучая компоненты существуют одновременно во всем объёме, занимаемом сверхтекучей жидкостью (см. [1], с. 45, а также [2], с. 707). Отсюда следует, что нормальные составляющие $\vec{v}$ и $\vec{w}$ на Γ совпадают. Иначе на свободной границе будут образовываться зоны, заполненные лишь одной компонентой скорости.

Учитывая этот факт, получаем, что на Γ должно выполняться кинематическое условие

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{w} \cdot \vec{n} \quad (\text{на } \Gamma). \tag{5}$$

В процессе движения также выполняется условие сохранения объема

$$\int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0 \tag{6}$$

и динамические условия

$$\rho_n \nu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (\text{на } \Gamma), \tag{7}$$

$$p_n + p_s - 2\rho_n \nu \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \rho g \zeta \qquad (\text{на } \Gamma). \tag{8}$$

Граничные условия (7), (8) соответствуют условиям на свободной поверхности в задаче о малых колебаниях вязкой жидкости в открытом неподвижном сосуде (см. [3], п.7.1, а также [4]). Они означают, что касательное напряжение нормальной компоненты равно нулю, а нормальное напряжение компенсируется скачком давлений. В правой части (8) учтено, что сверхтекучая жидкость является тяжелой, т.е. находится под действием гравитационного поля.

Для полной постановки задачи о малых движениях тяжелой сверхтекучей жидкости в открытом сосуде к уравнениям (1), (2) и граничным условиям (3), (5)–(8) необходимо добавить начальные условия

$$\vec{v}(0, x) = \vec{v}^0(x), \tag{9}$$

$$\vec{w}(0, x) = \vec{w}^0(x), \tag{10}$$

$$\zeta(0, x_1, x_2) = \zeta^0(x_1, x_2). \tag{11}$$

Отметим, что данная задача является близкой к задаче о малых движениях частично диссипативной гидросистемы в открытом сосуде (см. [5], а также [6], п. 10.2.).

2. Применение метода ортогонального проектирования.

Будем использовать сейчас некоторые подходы из [3], гл. 2, к исследованию задачи (1)–(11). Будем считать что начально-краевая задача имеет решение, и в любой момент времени t имеем

$$\vec{v}, \vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega), \quad \|\vec{v}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)} := \int_\Omega |\vec{v}|^2 d\Omega < \infty. \tag{12}$$

Требование (12) означает, что в любой момент времени жидкость обладает конечной кинетической энергией.

При исследовании малых движений жидкости в открытом сосуде естественно использовать модифицированное разложение Г. Вейля (см. [3], п.2.1):

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) =: \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega). \tag{13}$$

Здесь

$$\vec{J}_0(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : \ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \ (\text{в } \Omega), \ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \ (\text{на } \partial\Omega)\}, \tag{14}$$

$$\vec{J}_{0,S}(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : \ \operatorname{div} \vec{u} = 0 \ (\text{в } \Omega), \ \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \ (\text{на } S\}, \tag{15}$$

являются подпространствами пространства соленоидальных полей $\vec{J}(\Omega)$, а $\vec{G}(\Omega)$ — пространство потенциальных полей, разлагающееся в прямую сумму (см. [3], с. 106) подпространств

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega) := \{\vec{u} = \nabla p : \Delta p = 0 \ (\text{в } \Omega), \ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S)\}, \tag{16}$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) := \{\vec{u} = \nabla p : p = 0 \ (\text{на } \Gamma)\}. \tag{17}$$

Потенциалы полей из $\vec{G}(\Omega) = \vec{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}$ принадлежат пространству $H^1(\Omega) = H^1_{h,S}(\Omega) \oplus H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$, где $H^1_{h,S}(\Omega)$ — подпространство потенциалов полей из $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$, а $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ — подпространство потенциалов полей из $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$. Снабдим пространство $H^1(\Omega)$ эквивалентной нормой

$$\|p\|^2_{H^1(\Omega)} := \int_\Omega |\nabla p|^2 \, d\Omega + \left(\int_\Gamma p \, d\Gamma \right)^2. \tag{18}$$

Так как потенциалы определяются с точностью до константы, будем предполагать далее, что выполнено условие нормировки

$$\int_\Gamma p \, d\Gamma = 0, \tag{19}$$

тогда квадрат нормы потенциалов будет равен интегралу Дирихле. Множество всех потенциалов с такой нормой будем обознать через $H^1_\Gamma(\Omega)$.

Пусть P_0 — ортопроектор из $\vec{L}_2(\Omega)$ на $\vec{J}_0(\Omega)$, тогда $(I-P_0)$ — ортопроектор на $\vec{G}(\Omega)$. Справедливо разложение сверхтекучей компоненты:

$$\vec{w} = P_0\vec{w} + (I - P_0)\vec{w} =: P_0\vec{w} + \nabla\Phi. \tag{20}$$

Действуя на обе части (2) проектором P_0, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}P_0\vec{w} = P_0\vec{f}.$$

Отсюда с учётом начального условия (10) получаем, что составляющая $P_0\vec{w}$ однозначно определяется начальным условием и полем внешних сил по формуле

$$P_0\vec{w} = \int_0^t (P_0\vec{f})(\tau)d\tau + P_0\vec{w}^0. \tag{21}$$

По условию задачи $\vec{w} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega)$. Отсюда и из (20) следует, что $\nabla\Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$. Потенциал $\Phi \in H^1_\Gamma(\Omega)$ является решением задачи Неймана для уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \vec{v}\cdot\vec{n} = \vec{w}_n\cdot\vec{n} =: \psi \ \ (\text{на } \Gamma). \tag{22}$$

Согласно теореме Гальярдо (см. [7]) для области Ω с липшицевой границей оператор следа

$$\gamma_\Gamma\Phi := \Phi|_\Gamma \tag{23}$$

действует ограниченно из $H^1_\Gamma(\Omega)$ на пространство $H^{1/2}_\Gamma$, где

$$H^{1/2}_\Gamma := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma} \tag{24}$$

компактно вложено в $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$. Он имеет бесконечномерное ядро $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$.

Если пространство $H^{1/2}_\Gamma$ снабдить эквивалентной нормой

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}_\Gamma} := \min_{\gamma_\Gamma\Phi=\varphi} \|\Phi\|_{H^1_\Gamma(\Omega)}, \tag{25}$$

то γ_Γ будет изометрически отображать $H^1_{h,S}(\Omega)$ на $H^{1/2}_\Gamma$. Минимум в (25) достигается при $\Phi \in H^1_{h,S}(\Omega)$.

Известно (см. [3], с. 45-46), что для любого элемента $\psi \in H^{-1/2}_\Gamma := (H^{1/2}_\Gamma)^*$ существует единственное слабое решение $\Phi \in H^1_{h,S}(\Omega) \subset H^1_\Gamma(\Omega)$ задачи (22), которое определяется через ограниченный оператор $T_\Gamma : \ H^{-1/2}_\Gamma \to H^1_{h,S}(\Omega)$. При этом оператор T_Γ является сопряжённым к оператору следа в смысле тождества

$$(\Phi, T_\Gamma\psi)_{H^1(\Omega)} = \langle\gamma_\Gamma\Phi, \psi\rangle_{L_{2,\Gamma}}, \quad \forall\Phi \in H^1(\Omega), \ \forall\psi \in H^{-1/2}_\Gamma. \tag{26}$$

Здесь косыми скобками обозначено значение функционала ψ на элементе $\gamma_\Gamma\Phi$.

Таким образом, решение задачи (22) находится по формуле

$$\Phi = T_\Gamma\psi = T_\Gamma(\vec{v}\cdot\vec{n}). \tag{27}$$

Отсюда

$$\Phi|_\Gamma = \gamma_\Gamma\Phi = \gamma_\Gamma T_\Gamma\psi = C_\Gamma(\vec{v}\cdot\vec{n}) \quad (\text{на } \Gamma). \tag{28}$$

Оператор $C_\Gamma := \gamma_\Gamma T_\Gamma$ действует непрерывным образом из $H_\Gamma^{-1/2}$ в $H_\Gamma^{1/2}$, а его сужение на $L_{2,\Gamma}$ является компактным (в силу компактности вложения $H_\Gamma^{1/2}$ в $L_{2,\Gamma}$) самосопряжённым положительным оператором в $L_{2,\Gamma}$. При этом обратный положительно определённый оператор C_Γ^{-1} является оператором гильбертовой пары $(H_\Gamma^{1/2}; L_{2,\Gamma})$ (см. [3], с. 41).

Пусть теперь $(I-P_0)\vec{f} =: \nabla f$. Действуя проектором $(I-P_0)$ на уравнение (2), получаем

$$\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_s}p_s - f\right) = 0,$$

отсюда

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_s}p_s = f + c(t), \tag{29}$$

где $c(t)$ — произвольная функция времени. Равенство (29) — это интеграл Коши-Лагранжа, из которого можно найти p_s. По определению оператора следа должно выполняться включение $\gamma_\Gamma p_s \in H_\Gamma^{1/2} \subset L_{2,\Gamma}$. Очевидно, оно выполнено, если $f_1 := f|_\Gamma + c(t) \in L_{2,\Gamma}$, т.е.

$$c(t) = -\int_\Gamma f(t,x_1,x_2,0)d\Gamma.$$

Отсюда

$$f_1 = f(t,x_1,x_2,0) - \int_\Gamma f(t,x_1,x_2,0)d\Gamma. \tag{30}$$

Из (29), (28) следует, что

$$\gamma_\Gamma p_s = p_s|_\Gamma = -\rho_s\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_\Gamma + \rho_s f_1 = -\rho_s\frac{\partial}{\partial t}\left(C_\Gamma(\vec{v}\cdot\vec{n})\right) + \rho_s f_1 \in H_\Gamma^{1/2}. \tag{31}$$

Из проделанных выше построений следует, что поле сверхтекучей компоненты скорости

$$\vec{w} = P_0\vec{w} + \nabla\Phi = \int_0^t (P_0\vec{f})(\tau)d\tau + P_0\vec{w}^0 + \nabla T_\Gamma\gamma_n\vec{v}, \tag{32}$$

а также давление

$$p_s = -\rho_s\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \rho_s(f+c(t)) = -\rho_s\frac{\partial}{\partial t}\left(T_\Gamma\gamma_n\vec{v}\right) + \rho_s(f+c(t)), \tag{33}$$

однозначным образом определяются по полю внешних сил $\vec{f} \in \vec{L}_2(\Omega)$, по начальным данным $\vec{w}^0(x) \in \vec{L}_2(\Omega)$ и по значению нормальной компоненты поля $\vec{v}$ на границе Γ:

$$\gamma_n \vec{v} := (\vec{v} \cdot \vec{n})|_\Gamma = (v_3)\big|_\Gamma. \tag{34}$$

Известно, что оператор γ_n, заданный на $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, действует ограниченно на $H^{1/2}_\Gamma$, либо компактно в $L_{2,\Gamma}$ (см. [3], с. 114).

Таким образом, проделанные преобразования позволяют исключить из исходной начально-краевой задачи уравнения и слагаемые, содержащие сверхтекучую компоненту скорости. Заметим, однако, что начальные данные $\vec{w}^0(x)$ не могут быть произвольными, а связаны с $\vec{v}^0(x)$ условием согласования $\vec{w}^0 \cdot \vec{n} = \vec{v}^0 \cdot \vec{n}$ (на Γ).

Будем использовать теперь модифицированное разложение Вейля (13) применительно к нормальной компоненте скорости $\vec{v}$. Введем ортопроекторы $P_{0,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ из $\vec{L}_2(\Omega)$ на подпространства $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ соответственно. Из условия задачи следует, что $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$. Поэтому, действуя проектором $P_{0,\Gamma}$ на уравнение (1), получаем

$$\frac{1}{\rho_n} P_{0,\Gamma} \nabla p_n = \nu P_{0,\Gamma} \Delta \vec{v} + P_{0,\Gamma} \vec{f}. \tag{35}$$

Из этого уравнения поле $P_{0,\Gamma}\nabla p_n$ однозначно определяется по полю $\vec{v}$.

Действуя теперь на обе части уравнения (1) проектором $P_{0,S}$, получаем

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \widetilde{p}_n + \nu P_{0,S} \Delta \vec{v} + P_{0,S} \vec{f}, \tag{36}$$

где $\nabla \widetilde{p}_n := (1/\rho_n) P_{0,S} \nabla p_n$. Так как потенциал поля $P_{0,\Gamma}\nabla p_n$ обращается в нуль на Γ, то $\widetilde{p}_n|_\Gamma = (1/\rho_n) p_n|_\Gamma$. Кроме этого, в силу разложения $\vec{J}_{0,S}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega)$, имеем $\nabla \widetilde{p}_n \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$, поэтому

$$\Delta \widetilde{p}_n = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial \widetilde{p}_n}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \int_\Gamma \widetilde{p}_n \, d\Gamma = 0. \tag{37}$$

Таким образом, разрешимость исходной задачи (1)–(11) сводится к разрешимости следующей проблемы:

$$-\nu P_{0,S} \Delta \vec{v} + \nabla \widetilde{p}_n = \vec{\Phi}(:= P_{0,S}\vec{f} - \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}) \quad (\text{в } \Omega), \tag{38}$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{v} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \tag{39}$$

$$\nu \tau_{i3}(\vec{v}) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (\text{на } \Gamma), \tag{40}$$

$$-\widetilde{p}_n + \nu \tau_{33}(\vec{v}) = -\psi(:= -\frac{\rho}{\rho_n} g\zeta - \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\partial}{\partial t}(C_\Gamma \gamma_n \vec{v}) + \frac{\rho_s}{\rho_n} f_1) \quad (\text{на } \Gamma), \tag{41}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \gamma_n \vec{v} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta \, d\Gamma = 0, \tag{42}$$

$$\vec{v}(0, x) = \vec{v}^0(x), \quad \zeta(0, x_1, x_2) = \zeta^0(x_1, x_2). \tag{43}$$

Здесь через
$$\tau_{ij}(\vec{v}) := \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{44}$$
обозначены компоненты тензора деформации нормальной компоненты жидкости. Краевое условие (41) получено с учётом соотношения (31). Неизвестными в задаче считаем поле $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и функцию $\zeta \in L_{2,\Gamma}$, определяемые по правым частям $\vec{\Phi} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и $\psi \in H^{1/2}_{\Gamma} \subset L_{2,\Gamma}$. Элемент $\psi \in H^{1/2}_{\Gamma}$, поскольку все определяющие его слагаемые принадлежат $H^{1/2}_{\Gamma}$. Поле давлений $\nabla\widetilde{p}_n \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$ однозначно определяется через поле $\vec{v}$ из условий (37) и (41).

Заметим, что задача (38)–(43) является в точности задачей о малых движениях вязкой жидкости в открытом сосуде при $\rho_s = 0$. Такая задача изучалась ранее в большой серии работ (см., например, [3], [6], [8]). Применим сейчас используемые ранее подходы к исследуемой задаче в случае $\rho_s \geq 0$.

3. О формуле Грина для задачи Стокса.

Воспользуемся сейчас обобщенной формулой Грина для задачи Стокса, полученной в [9] на основе абстрактной формулы Грина.

Будем считать, что решение $\vec{v}$ задачи (38)–(43) обладает большей гладкостью, чем произвольный элемент из $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$. Именно, предположим, в любой момент времени t поле $\vec{v}$ является функцией со значениями в подпространстве
$$\vec{J}^1_{0,S}(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega) : \ \operatorname{div}\vec{u} = 0 \ (\text{в } \Omega), \ \vec{u} = \vec{0} \ (\text{на } S)\} \tag{45}$$
пространства векторных полей
$$\vec{H}^1(\Omega) = \{\vec{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i\vec{e}_i, \ u_i \in H^1(\Omega) \ (i = 1, 2, 3)\}, \quad \|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{3}\|u_i\|^2_{H^1(\Omega)}. \tag{46}$$

Наличие вязких сил приводит к диссипации энергии в жидкости, скорость которой вычисляется по формуле
$$\rho_n\nu E(\vec{v}, \vec{v}) := \frac{1}{2}\rho_n\nu\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}|\tau_{ij}(\vec{v})|^2 d\Omega. \tag{47}$$
С помощью неравенства Корна (см., например, [3], п. 2.2.6) можно доказать, что введенная посредством (47) квадратичная форма $E(\vec{u}, \vec{u})$ на подпространстве $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ определяет норму, эквивалентную стандартной норме пространства $\vec{H}^1(\Omega)$. Будем считать далее, что подпространство $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ снабжено соответствующим скалярным произведением
$$E(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{3}\tau_{ij}(\vec{u})\tau_{ij}(\vec{v}) d\Omega. \tag{48}$$

Известно (см. [8], с. 17, [3], с. 155, а также [10]), что для элементов

$$\vec{u} \in \vec{C}^2(\overline{\Omega}) \cap \vec{J}^1_{0,S}(\Omega), \quad \vec{v} \in \vec{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \vec{J}^1_{0,S}(\Omega), \quad \nabla p \in \vec{G}(\Omega), \tag{49}$$

справедлива формула Грина для задачи Стокса

$$\int_\Omega (\nabla p - P_{0,S}\Delta\vec{u}) \cdot \vec{v}\, d\Omega = E(\vec{u},\vec{v}) - \int_\Gamma \sum_{i=1}^{3} (\tau_{i3}(\vec{u}) - p\delta_{i3}) v_i \, d\Gamma, \tag{50}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Для дальнейших рассмотрений, однако, удобно пользоваться более общей формулой, полученной в [9] на базе абстрактной формулы Грина

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{51}$$

В [9] доказано (см. также [3], [11]–[13]), что формула Грина (51) однозначным образом строится по произвольным сепарабельным гильбертовым пространствам E, F, G и ограниченному абстрактному оператору следа $\gamma : F \to \mathcal{R}(\gamma) =: G_+$, если выполнены условия: 1) F ограниченно (плотно) вложено в E; 2) G_+ ограниченно вложено в G. В (51) выражения в косых скобках являются значениями функционалов $Lu \in F^*$ и $\partial u \in (G_+)^*$, действующх на элементы $v \in F$ и $\gamma v \in G_+$ соответственно.

Решение $\vec{v}$ задачи (38)–(41) ищем в подпространстве $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega) = F$, плотно вложенном в $\vec{J}_{0,S}(\Omega) = E$. Так как из условия сохранения объема и кинематического условия следует, что

$$\int_\Gamma v_3 \, d\Gamma = \int_\Gamma \gamma_n \vec{v}\, d\Gamma = 0, \tag{52}$$

то по теореме Гальярдо (см. [7]) оператор следа

$$\gamma\vec{v} := \vec{v}\big|_\Gamma, \tag{53}$$

ограниченно действует из $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ на $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}_\Gamma = G_+$, причём G_+ компактно вложено в пространство $L_2(\Gamma) \oplus L_2(\Gamma) \oplus L_{2,\Gamma} = G$ (см. [9]).

Таким образом, выполняются все условия существования формулы Грина вида (51) для данным образом выбранных пространств E, F, G и оператора следа γ. В [9] доказано, что в этом случае мы получаем обобщение формулы Грина (50) для задачи Стокса:

$$\begin{aligned} &\langle \vec{\eta}, \nabla p - \nu P_{0,S}\Delta\vec{v}\rangle_{\vec{L}_2(\Omega)} = \\ &= E(\vec{\eta}, \nu\vec{v}) - \langle \gamma\vec{\eta}, \sum_{i=1}^{3} (\tau_{i3}(\nu\vec{v}) - p\delta_{i3})\vec{e}_i\rangle_{L_2(\Gamma)}, \, \forall \vec{\eta}, \vec{v} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega), \end{aligned} \tag{54}$$

причём формула (54) справедлива для любого (не обязательно связанного с $\vec{v}$) поля $p \in H^1_{h,S}(\Omega)$. Она является частным случаем абстрактной формулы Грина (51) при

$$L(\nu\vec{v}) = -\nu P_{0,S}\Delta\vec{v} + \nabla\widetilde{p}_n \in (\vec{J}^1_{0,S}(\Omega))^*, \tag{55}$$

$$\partial(\nu\vec{v}) = \sum_{i=1}^{3}(\tau_{i3}(\nu\vec{v}) - p\delta_{i3})\vec{e}_i \in (H^{1/2}(\Gamma))^* \times (H^{1/2}(\Gamma))^* \times (H^{1/2}_{\Gamma})^*. \tag{56}$$

4. Вспомогательные краевые задачи.

Будем искать решение задачи (38)–(43) в виде суммы решений вспомогательных краевых задач.

Итак, пусть $\nabla\widetilde{p}_n = \nabla p_1 + \nabla p_2$, где $p_1 \in H^1_{h,S}(\Omega)$:

$$\Delta p_1 = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial p_1}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S), \quad \int_\Gamma p_1\, d\Gamma = 0, \tag{57}$$

— поле давлений задачи (первой вспомогательной задачи С.Г. Крейна):

$$-\nu P_{0,S}\Delta\vec{v} + \nabla p_1 = \vec{\Phi} - \nabla p_2, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \tag{58}$$

$$\vec{v} = \vec{0} \qquad (\text{на } S), \tag{59}$$

$$\nu\tau_{i3}(\vec{v}) = 0, \quad i = 1, 2, \qquad (\text{на } \Gamma), \tag{60}$$

$$-p_1 + \nu\tau_{33}(\vec{v}) = 0 \qquad (\text{на } \Gamma), \tag{61}$$

а $p_2 \in H^1_{h,S}(\Omega)$ — решение задачи Зарембы для уравнения Лапласа

$$\Delta p_2 = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial p_2}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S), \quad p_2 = \psi \ \ (\text{на } \Gamma). \tag{62}$$

Очевидно, что если задачи (58)–(61) и (62) имеют решения, то тогда поле давлений $\widetilde{p}_n = p_1 + p_2$ и поле скорости $\vec{v}$ (решение задачи (58)–(61)) являются решениями задачи (38)–(43).

Лемма 4.1. *Задача* (58)–(61) *имеет единственное решение* $\nu\vec{v} = A^{-1}(\vec{\Phi} - \nabla p_2) \in \mathcal{D}(A) \subset \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ *(p_1 определяется через $\vec{v}$) для любой правой части* $\vec{\Phi} - \nabla p_2 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$, *где оператор задачи* $A: \ \mathcal{D}(A) \to \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ *является самосопряжённым положительно определённым оператором гильбертовой пары* $(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega); \vec{J}_{0,S}(\Omega))$.

Доказательство. Действительно, обозначим через A оператор задачи (58)–(61). Пользуясь обозначениями (55)–(56), получаем, что A определяется из соотношений $A\vec{v} = L\vec{v}$, $\vec{v} \in \mathcal{D}(A) := \{\vec{v} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega) : \ \partial\vec{v} = \vec{0}\}$. Очевидно, что задача (58)–(61) записывается кратко в виде

$$A(\nu\vec{v}) = \vec{\Phi} - \nabla p_2 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega). \tag{63}$$

Согласно формуле Грина (54) для оператора A выполнено тождество

$$\langle \vec{\eta}, A\vec{v} \rangle_{\vec{L}_2(\Omega)} = E(\vec{\eta}, \vec{v}), \quad \forall \vec{\eta} \in \vec{J}^1_{0,S}(\Omega), \ \forall \vec{v} \in \mathcal{D}(A). \tag{64}$$

Поскольку $A\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$, то от функционалов в левой части (64) можно перейти к скалярному произведению. Отсюда получаем тождество, из которого однозначно определяется оператор гильбертовой пары $(\vec{J}^1_{0,S}(\Omega); \vec{J}_{0,S}(\Omega))$ (см., например, [9]). Следовательно, оператором этой пары является построенный оператор A. Он является положительно определённым самосопряжённым оператором в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$. Отсюда существует обратный ограниченный в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ оператор A^{-1} (можно доказать, что он является даже компактным). Тогда из (63) следует, что задача (58)–(61) имеет единственное решение, которое находится по формуле $\nu\vec{v} = A^{-1}(\vec{\Phi} - \nabla p_2)$.

□

Лемма 4.2. *Задача* (62) *имеет единственное решение* $p_2 \in H^1_{h,S}(\Omega)$ *для любой правой части* $\psi \in H^{1/2}_\Gamma$. *При этом* $\nabla p_2 = G\psi$, *где оператор* G *осуществляет изометрию между* $H^{1/2}_\Gamma$ *и* $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$.

Доказательство. Выше мы упоминали, что оператор следа γ_Γ изометрически отображает подпространство $H^1_{h,S}(\Omega)$ на $H^{1/2}_\Gamma$ с нормой (25). Отсюда обратный к нему оператор будет определять единственное решение $p_2 \in H^1_{h,S}(\Omega)$ задачи (62) для любой правой части $\psi \in H^{1/2}_\Gamma$, при этом

$$\|G\psi\|_{\vec{L}_2(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla p_2|^2 \, d\Omega = \|p_2\|_{H^1_\Gamma(\Omega)} = \|\gamma_\Gamma p_2\|_{H^{1/2}_\Gamma} = \|\psi\|_{H^{1/2}_\Gamma}. \tag{65}$$

□

Таким образом, согласно Леммам 4.1 и 4.2 получаем, что решение задачи (38)–(43) удовлетворяет соотношению $\nu\vec{v} = A^{-1}(\vec{\Phi} - \nabla p_2) = A^{-1}(\vec{\Phi} + G(-\psi))$. Применяя теперь к обеим частям полученного равенства оператор A и вспоминая определения выражений $\vec{\Phi}$ и $(-\psi)$, получаем, что задача (38)–(43) равносильна системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \nu A\vec{v} + \left(\frac{\rho g}{\rho_n}\right) G\zeta + \frac{\rho_s}{\rho_n} G \frac{d}{dt}(C_\Gamma \gamma_n)\vec{v} = \frac{\rho_s}{\rho_n} G f_1 + P_{0,S}\vec{f}, \tag{66}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma_n \vec{v}, \tag{67}$$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}^0(x), \quad \zeta(0) = \zeta^0(x_1, x_2). \tag{68}$$

Здесь уравнение (66) рассматривается в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, а (67) — в пространстве $L_{2,\Gamma}$. При этом, для решений задачи $\vec{v} \in \mathcal{D}(A)$, а $\zeta \in H^{1/2}_\Gamma$. Последнее включение выполняется в силу условия (67), поскольку оператор следа γ_n, заданный в (53), действует ограниченно из $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$ на $H^{1/2}_\Gamma$. Оказывается, что этот оператор можно расширить на пространство $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$. При этом справедливо утверждение

Лемма 4.3. *Операторы* $\gamma_n: \ \vec{J}_{0,S}(\Omega) \to H_\Gamma^{-1/2}$ *и* $G: \ H_\Gamma^{1/2} \to \vec{G}_{h,S}(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ *являются взаимно сопряженными ограниченными операторами.*

Доказательство. Действительно, поскольку оператор нормальной производной

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}: \ H^1_{h,S}(\Omega) \to H_\Gamma^{-1/2} \tag{69}$$

осуществляет изометрию между указанными пространствами (см. [3], с. 46), то оператор следа γ_n действует ограниченным образом из $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$ на $H_\Gamma^{-1/2}$. Имеем,

$$\gamma_n \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{n} = \nabla\Phi \cdot \vec{n} = (\partial\Phi)/(\partial n) \in H_\Gamma^{-1/2}, \quad \forall \Phi \in H^1_{h,S}(\Omega). \tag{70}$$

Так как $\vec{J}_{0,S}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega)$ и на элементах $\vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega): \ \ \gamma_n\vec{v} = 0$, то оператор $\gamma_n: \ \vec{J}_{0,S}(\Omega) \to H_\Gamma^{-1/2}$ является ограниченным.

Далее, абстрактная формула Грина (51) в случае $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1_\Gamma(\Omega)$, $G = L_{2,\Gamma}$, $\gamma_\Gamma: \ H^1_\Gamma(\Omega) \to G_+ = H_\Gamma^{1/2} \subset G$ даёт обобщение формулы Грина для оператора Лапласа в виде

$$\langle p, -\Delta\Phi\rangle_{L_2(\Omega)} = (p, \Phi)_{H^1_\Gamma(\Omega)} - \langle \gamma_\Gamma p, \frac{\partial\Phi}{\partial n}\rangle_{L_{2,\Gamma}}, \quad \forall p, \Phi \in H^1_\Gamma(\Omega). \tag{71}$$

Пусть в ней $p, \Phi \in H^1_{h,S}(\Omega)$, тогда $\Delta\Phi = 0$. Обозначая $\gamma_\Gamma p =: \psi \in H_\Gamma^{1/2}$, получаем тождество

$$\begin{aligned}(G\psi, \vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega)} &= \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla\Phi \, d\Omega = (p, \Phi)_{H^1_\Gamma(\Omega)} = \\ &= \langle \gamma_\Gamma p, \frac{\partial\Phi}{\partial n}\rangle_{L_{2,\Gamma}} = \langle \psi, \gamma_n\vec{v}\rangle_{L_{2,\Gamma}}, \quad \forall \psi \in H_\Gamma^{1/2}, \ \forall \vec{v} \in \vec{G}_{h,S}(\Omega). \end{aligned} \tag{72}$$

Тождество (72) остаётся верным и при $\vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega)$, поскольку в этом случае $\gamma_n\vec{v} = 0$, а $(G\Psi, \vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega)} = 0$ в силу ортогональности подпространств $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$ и $\vec{J}_0(\Omega)$. □

Так как согласно Лемме 4.3 оператор γ_n действвет ограниченно из $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ на $H_\Gamma^{-1/2}$, а оператор C_Γ ограниченно переводит $H_\Gamma^{-1/2}$ в $H_\Gamma^{1/2}$, то оператор $C_\Gamma\gamma_n: \ \vec{J}_{0,S}(\Omega) \to H_\Gamma^{1/2}$ является ограниченным. Следовательно, он коммутирует с оператором дифференцирования по времени, и в (66) возникает оператор

$$J := I + \frac{\rho_s}{\rho_n} G C_\Gamma \gamma: \ \vec{J}_{0,S}(\Omega) \to \vec{J}_{0,S}(\Omega), \tag{73}$$

действующий на элемент $d\vec{v}/dt$. Так как оператор C_Γ самосопряжён и положителен, а операторы γ_n и G являются взаимно сопряжёнными и ограниченными, то оператор J является ограниченным самосопряжённым и положительно определённым. Отсюда обратный J^{-1} также является ограниченным самосопряжённым положительно определённым оператором в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$.

Обозначая $\alpha := (\rho g)/\rho_n$ и умножая обе части (67) на α, получаем операторно-матричную формулировку системы дифференциальных уравнений (66)–(68) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}$:

$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \alpha I_\Gamma \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu A & \alpha G \\ -\alpha\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \zeta \end{pmatrix} = F_0(t). \tag{74}$$

Здесь I_Γ — единичный оператор в $L_{2,\Gamma}$, $F_0(t) := (P_{0,S}\vec{f} + \frac{\rho_s}{\rho_n} G f_1; 0)^t \in \mathcal{H}$.

5. Исследование дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве.

Введём операторные матрицы

$$\mathcal{J} := \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & \alpha I_\Gamma \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{J}) := \mathcal{H}, \quad \mathcal{A} := \begin{pmatrix} \nu A & \alpha G \\ -\alpha\gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) := \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(G), \tag{75}$$

действующие на элементы $X(t) := (\vec{v}(t); \zeta(t))^t \in \mathcal{H}$. Тогда задачу (74) можно записать в краткой форме

$$\mathcal{J}\frac{d}{dt}X(t) + \mathcal{A}X(t) = F_0(t), \quad X(0) = \begin{pmatrix} \vec{v}^0 \\ \zeta^0 \end{pmatrix}. \tag{76}$$

Очевидно, оператор $\mathcal{J}$ обладает теми же свойствами, что и оператор J, т.е. является ограниченным и ограниченно обратимым самосопряжённым и положительно определённым в $\mathcal{H}$. Из взаимной сопряжённости операторов γ_n и G следует аккретивность оператора $\mathcal{A}$:

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}X, X)_{\mathcal{H}} = \nu \|A^{1/2}\vec{v}_n\|^2_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} \geq 0. \tag{77}$$

Чтобы получить задачу с равномерно аккретивным оператором, введём новую неизвестную функцию

$$Y(t) := (\widetilde{v}; \widetilde{\zeta})^t = e^{-t}X(t). \tag{78}$$

Подставляя $X(t) = e^t Y(t)$ в (76), после умножения обеих частей на e^{-t} приходим к дифференциальному уравнению

$$\mathcal{J}\frac{d}{dt}Y(t) + (\mathcal{A} + \mathcal{J})\,Y(t) = F_1(t), \quad F_1(t) := F_0(t)e^{-t}, \quad Y(0) = X(0), \tag{79}$$

с равномерно аккретивным в $\mathcal{H}$ оператором

$$\mathcal{A}_{\mathcal{J}} := \mathcal{A} + \mathcal{J} = \begin{pmatrix} \nu A + J & \alpha G \\ -\alpha\gamma & \alpha I_{\Gamma} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{J}}) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(G). \tag{80}$$

В силу свойства $\nu A + J \geq I$ получаем, что

$$\mathrm{Re}(\mathcal{A}_{\mathcal{J}} Y, Y)_{\mathcal{H}} \geq \min\{1; \alpha\} \|Y\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{81}$$

Обозначим

$$Q := \alpha\gamma_n A^{-1/2} : \ \vec{J}_{0,S}(\Omega) \to L_{2,\Gamma}, \quad Q^+ := \alpha A^{-1/2} G : \ H_{\Gamma}^{1/2} \to \vec{J}_{0,S}(\Omega). \tag{82}$$

Можно проверить, что оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$ допускает факторизацию

$$\mathcal{A}_{\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I_{\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu I + A^{-1/2} J A^{-1/2} & Q^+ \\ -Q & \alpha I_{\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I_{\Gamma} \end{pmatrix}. \tag{83}$$

Лемма 5.1. *Оператор Q является компактным. При этом $Q^+ \subset Q^*$, $Q^+ = Q^*\big|_{\mathcal{D}(G)}$, $\overline{Q^+} = Q^*$.*

Доказательство. Так как оператор $A^{-1/2}$ действует непрерывно из $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ в $\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, а оператор $\gamma_n : \ \vec{J}^1_{0,S}(\Omega) \to L_{2,\Gamma}$ является компактным, то их произведение является компактным оператором.

Для всех $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$, $\zeta \in \mathcal{D}(G)$ справедливо тождество

$$(Q\vec{v}, \zeta)_{L_{2,\Gamma}} = (\alpha\gamma_n A^{-1/2}\vec{v}, \zeta)_{L_{2,\Gamma}} = (\alpha A^{-1/2}\vec{v}, G\zeta)_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} = \\ = (\vec{v}, \alpha A^{-1/2} G\zeta)_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} = (\vec{v}, Q^+)_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)}. \tag{84}$$

Отсюда $Q^+ = Q^*\big|_{\mathcal{D}(G)}$. Так как оператор Q является ограниченным, то оператор $Q^* : \ L_{2,\Gamma} \to \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ также является ограниченным. Поскольку $\mathcal{D}(G) = H_{\Gamma}^{1/2}$ является плотным множеством в $L_{2,\Gamma}$, то оператор Q^+ при замыкании даёт Q^*. $\square$

Оператор $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$ задан на плотном в $\mathcal{H}$ множестве $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{J}}) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(G)$. Он может быть расширен (замкнут) до максимального равномерно аккретивного оператора в $\mathcal{H}$.

Лемма 5.2. *Оператор*

$$\mathcal{A}_m := \overline{\mathcal{A}_{\mathcal{J}}}, \ \mathcal{D}(\mathcal{A}_m) := \{Y(t) = (\widetilde{v}; \widetilde{\zeta})^t : \ \nu\widetilde{v} + A^{-1/2} Q^* \widetilde{\zeta} \in \mathcal{D}(A)\}, \tag{85}$$

является максимальным равномерно аккретивным оператором в $\mathcal{H}$. Он допускает факторизацию в форме

$$\mathcal{A}_m = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu I + A^{-1/2} J A^{-1/2} & Q^* \\ -Q & \alpha I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I_\Gamma \end{pmatrix}. \tag{86}$$

Доказательство. Действительно, замыкание оператора $\mathcal{A}_\mathcal{J}$ в силу представления (83) эквивалентно замене элемента Q^+ оператором Q^*, поскольку в (83) все остальные элементы являются замкнутыми операторами. Для замкнутого оператора $\mathcal{A}_m$ выполняются свойства $\mathcal{D}(\mathcal{A}_m^{-1}) = \mathcal{R}(\mathcal{A}_m) = \mathcal{H}$, $\mathcal{D}(\mathcal{A}_m) = \mathcal{R}(\mathcal{A}_m^{-1})$. Значит, областью определения оператора $\mathcal{A}_m$ являются все элементы $Y \in \mathcal{H}$ для которых $\mathcal{A}_m Y \in \mathcal{H}$.

Имеем, $Y = (\widetilde{v}; \widetilde{\zeta})^t \in \mathcal{D}(\mathrm{diag}\{A^{1/2}; I_\Gamma\})$, отсюда $\widetilde{v} \in \mathcal{D}(A^{1/2})$. Далее, из включения

$$\begin{pmatrix} \nu I + A^{-1/2} J A^{-1/2} & Q^* \\ -Q & \alpha I_\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2}\widetilde{v} \\ \widetilde{\zeta} \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathrm{diag}\{A^{1/2}; I_\Gamma\}) \tag{87}$$

следует, что $\nu A^{1/2}\widetilde{v} + A^{-1/2} J \widetilde{v} + Q^* \widetilde{\zeta} \in \mathcal{D}(A^{1/2})$. Очевидно, это условие выполнено, если

$$\nu \widetilde{v} + A^{-1/2} Q^* \widetilde{\zeta} \in \mathcal{D}(A). \tag{88}$$

Поскольку $A^{-1/2} Q^* \widetilde{\zeta} \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, то из справедливости (88) условие $\widetilde{v} \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ следует автоматически. Таким образом, $\mathcal{A}_m Y \in \mathcal{H}$ для всех $Y \in \mathcal{H}$, для которых выполняется (88). □

Перейдём от задачи (79) к задаче

$$\mathcal{J} \frac{d}{dt} Y(t) + \mathcal{A}_m Y(t) = F_1(t), \quad Y(0) = X(0). \tag{89}$$

Подействуем на обе части (89) ограниченным оператором $\mathcal{J}^{-1}$. Так как оператор $\mathcal{J}$ является ограниченным и ограниченно обратимым положительным оператором, то скалярное произведение

$$\langle Y, Z \rangle := (\mathcal{J} Y, Z)_\mathcal{H} \tag{90}$$

определяет в $\mathcal{H}$ эквивалентную норму.

Итак, получаем задачу

$$\frac{d}{dt} Y(t) = -\mathcal{J}^{-1} \mathcal{A}_m Y(t) + \mathcal{J}^{-1} F_1(t), \quad Y(0) = X(0) = (\vec{v}^0; \zeta^0)^t, \tag{91}$$

с максимальным равномерно диссипативным оператором $-\mathcal{J}^{-1}\mathcal{A}_m$ в скалярном произведении (90). Именно, согласно (81) имеем

$$\mathrm{Re}\langle -\mathcal{J}^{-1} \mathcal{A}_m Y, Y \rangle = -\mathrm{Re}(\mathcal{A}_m Y, Y) \le -\min\{1; \alpha\} \|Y\|_\mathcal{H}^2. \tag{92}$$

Следовательно (см. [14], гл. 1, теорема 4.5), оператор $-\mathcal{J}^{-1}\mathcal{A}_m$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы операторов $\{U(t)\}_{t\geq 0}$. Пусть в задаче (91) выполнено условие $Y(0)\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_m)$, т.е.

$$\nu\vec{v}^0 + A^{-1/2}Q^*\zeta^0 \in \mathcal{D}(A). \tag{93}$$

Тогда согласно теореме Р.С. Филлипса (см. также [14], гл. 1, теорема 6.5) задача (91) при любой функции

$$\mathcal{J}^{-1}F_1(t) \in C^1([0;T];\mathcal{H}) \tag{94}$$

является корректно поставленной задачей Коши, при этом единственное ее сильное на отрезке $[0;T]$ решение $Y(t)$ выражается формулой

$$Y(t) = U(t)Y(0) + \int_0^t U(t-s)\mathcal{J}^{-1}F_1(t)\,ds. \tag{95}$$

Под сильным на отрезке $[0;T]$ решением задачи (91) понимается функция $Y(t)$ такая, что выполнено уравнение и начальное условие, причём все слагаемые в (91) являются непрерывными функциями времени $t\in[0;T]$ со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, т.е. $Y(t)\in C([0;T],\mathcal{D}(\mathcal{A}_m))\cap C^1([0;T],\mathcal{H})$.

Теорема 5.1. О разрешимости финальной задачи. *Пусть выполнены условия:*

1°. $\vec{v}^0\in\mathcal{D}(A)$;

2°. $\zeta^0\in H_\Gamma^{1/2}$;

3°. $P_{0,S}\vec{f}+\dfrac{\rho_s}{\rho_n}Gf_1\in C^1([0;T];\vec{J}_{0;S}(\Omega))$, *тогда финальная задача* (91) *имеет единственное сильное на отрезке* $[0;T]$ *решение* $Y(t)$ *вида* (95).

Доказательство. Действительно, второе условие эквивалентно тому, что $\zeta^0\in\mathcal{D}(G)$. Отсюда согласно лемме 5.1 имеем $A^{-1/2}Q^*\zeta^0=\alpha A^{-1}G\zeta^0\in\mathcal{D}(A)$. Так как согласно условию 1° имеем $\vec{v}^0\in\mathcal{D}(A)$, то $\nu\vec{v}^0+A^{-1/2}Q^*\zeta^0\in\mathcal{D}(A)$. Следовательно, $Y(0)\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_m)$.

Из условия 3° следует, что $F_0(t)=(P_{0,S}\vec{f}+\frac{\rho_s}{\rho_n}Gf_1;0)^t\in C^1([0;T];\mathcal{H})$. Тогда в силу ограниченности оператора $\mathcal{J}^{-1}$ имеем $\mathcal{J}^{-1}F_1(t)=\mathcal{J}^{-1}F_0(t)e^{-t}\in C^1([0;T];\mathcal{H})$. Таким образом, при выполнении условий 1°–3° для задачи (91) выполняются все условия теоремы Филлипса, т.е. задача (91) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0;T]$. □

Теорема 5.2. *При выполнении условий* 1°–3° *теоремы 5.1 сильное решение задачи* (91) *является также единственным сильным решением задачи* (79).

Доказательство. Согласно Теореме 5.1 при выполнении условий 1°–3° существует единственное сильное решение задачи (91). Действуя на обе части (91) ограниченным оператором $\mathcal{J}$, получаем, что задача (89) имеет единственное сильное решение $Y(t) = (\widetilde{v}; \widetilde{\zeta})^t \in \mathcal{H}$. Запишем уравнение (89) в виде системы:

$$J\frac{d}{dt}\widetilde{v} + J\widetilde{v} + A\left(\nu\widetilde{v} + A^{-1/2}Q^*\widetilde{\zeta}\right) = e^{-t}P_{0,S}\vec{f} + e^{-t}\frac{\rho_s}{\rho_n}Gf_1, \tag{96}$$

$$\alpha\frac{d}{dt}\widetilde{\zeta} - QA^{1/2}\widetilde{v} + \alpha\widetilde{\zeta} = 0, \tag{97}$$

$$\widetilde{v}(0) = \vec{v}^0(x), \quad \widetilde{\zeta}(0) = \zeta^0(x_1, x_2). \tag{98}$$

Заметим, что, вообще говоря, скобки в (96) пока раскрыть нельзя, поскольку сумма $\nu\widetilde{v} + A^{-1/2}Q^*\widetilde{\zeta} \in \mathcal{D}(A)$, но каждое слагаемое в отдельности может не принадлежать $\mathcal{D}(A)$. Однако сейчас будет показано, что для решений задачи (89) все же $\widetilde{\zeta} \in \mathcal{D}(G)$, $\widetilde{v} \in \mathcal{D}(A)$, т.е. $Y(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\mathcal{J}}) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(G)$, и значит решение задачи (89) является также решением задачи (79).

Действительно, умножим обе части (97) на e^t. Получаем

$$\alpha\frac{d}{dt}(e^t\widetilde{\zeta}) = e^tQA^{1/2}\widetilde{v}. \tag{99}$$

Отсюда $\widetilde{\zeta} = (1/\alpha)\int_0^t e^{-(t-s)}QA^{1/2}\widetilde{v}\,ds + \zeta^0$. Подставляя в это выражение $Q = \alpha\gamma_n A^{-1/2}$, получаем

$$\widetilde{\zeta} = \int_0^t e^{-(t-s)}\gamma_n\widetilde{v}\,ds + \zeta^0. \tag{100}$$

Так как $\widetilde{v} \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, то $\gamma_n\widetilde{v} \in H^{1/2}_\Gamma$. Согласно условиям теоремы 5.1 имеем $\zeta^0 \in H^{1/2}_\Gamma$, поэтому из (100) следует, что $\widetilde{\zeta} \in H^{1/2}_\Gamma = \mathcal{D}(G)$. Тогда в силу свойства $Q^*|_{\mathcal{D}(G)} = Q^+$ получаем $\nu\widetilde{v} + A^{-1/2}Q^*\widetilde{\zeta} = \nu\widetilde{v} + A^{-1/2}Q^+\widetilde{\zeta} = \nu\widetilde{v} + \alpha A^{-1}G\widetilde{\zeta} \in \mathcal{D}(A)$. Отсюда $\widetilde{v} \in \mathcal{D}(A)$. Что и требовалось доказать. □

Определение 5.1. *Будем говорить, что заданных начальных данных* (9)–(11) *и поля внешних сил* $\vec{f}$ *исходная начально-краевая задача* (1)–(11) *имеет сильное на отрезке* $[0;T]$ *решение, если существуют единственные функции*

$$\vec{v}(t) \in C([0;T], \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0;T], \vec{J}_{0,S}(\Omega)), \tag{101}$$

$$\vec{w}(t) \in C^1([0;T], \vec{J}_{0,S}(\Omega)), \tag{102}$$

$$\zeta(t) \in C([0;T], H^{1/2}_\Gamma) \cap C^1([0;T], L_{2,\Gamma}), \tag{103}$$

удовлетворяющие уравнению (1) *в смысле распределений, а всем остальным соотношениям* (1)–(11) *в смысле равенств (для всех* $t \in [0;T]$*) элементов из соответствующих гильбертовых пространств. При этом в уравнении* (2) *и* *краевом условии* (8) *все слагаемые являются непрерывными функциями времени со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах* $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ *и* $L_{2,\Gamma}$, *а элементы* $\vec{v}(t)$ *и* $\zeta(t)$ *являются сильным решением спроектированной задачи* (38)–(43). *Это значит, что для всех* $t \in [0;T]$ *выполняются начальные условия* (43) *и соотношения* (39), *уравнение* (38) *в пространстве* $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, *краевые условия* (40)–(42) *в пространстве* $L_{2,\Gamma}$, *причем все слагаемые в уравнении* (38) *являются непрерывными функциями времени со значениями в* $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$.

На основании проделанных рассмотрений получаем утверждение о разрешимости исходной начально-краевой задачи о малых движениях тяжёлой сверхтекучей жидкости в открытом сосуде.

Теорема 5.3. О разрешимости исходной начально-краевой задачи. *Пусть в задаче* (1)–(11) *выполнены условия*

1°. $\vec{v}^0(x) \in \mathcal{D}(A) \subset \vec{J}^1_{0,S}(\Omega)$, *где* $\mathcal{D}(A)$ — *область определения оператора Стокса (оператора первой вспомогательной задачи* (58)–(61)*);*

2°. $\vec{w}^0(x) \in \vec{L}_2(\Omega)$, *такой, что на* Γ *выполнено условие согласования* $\vec{w}^0 \cdot \vec{n} = \vec{v}^0 \cdot \vec{n}$*;*

3°. $\zeta^0(x) \in H^{1/2}_\Gamma = H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}$, $L_{2,\Gamma} = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$;

4°. $\vec{f} \in C([0;T];\vec{L}_2(\Omega))$, *причём* $P_{0,S}\vec{f} + \dfrac{\rho_s}{\rho_n} G f_1 \in C^1([0;T];\vec{J}_{0;S}(\Omega))$, *где* $P_{0,S}$ — *проектор на подпространство соленоидальных полей* $\vec{J}_{0;S}(\Omega)$ *(см.* (15)*), а* $f_1 \in H^{1/2}_\Gamma$ *определяется по полю* $\vec{f}$ *через* (30).

Тогда исходная начально-краевая задача (1)–(11) *имеет сильное на отрезке* $[0;T]$ *решение.*

Доказательство. В Теореме 5.2 доказано существование сильного решения задачи (79) при выполнении условий 1°, 3°, 4°. Осуществляя обратную замену к (78), получаем, что задача (76) имеет единственное сильное на отрезке $[0;T]$ решение. Это значит, что

$$X(t) = (\vec{v}(t); \zeta(t))^t \in C([0;T], \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1([0;T], \mathcal{H}), \tag{104}$$

причём для всех $t \in [0;T]$ выполняется уравнение в $\mathcal{H}$ и начальное условие.

Записывая операторно-матричное уравнение в виде системы, получаем, что задача (66)–(68) имеет сильное решение. Под сильным решением здесь понимаем функции $\vec{v}(t)$ и $\zeta(t)$ такие, что выполняются начальные условия (68), уравнение (66) в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, уравнение (67) в пространстве $L_{2,\Gamma}$, причём все слагаемые в уравнениях являются непрерывными функциями времени со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах. В силу (104) для решений задачи (66)–(68) выполнены соотношения $\vec{v}(t) \in C([0;T], \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0;T], \vec{J}_{0,S}(\Omega))$, $\zeta(t) \in C([0;T], H^{1/2}_\Gamma) \cap C^1([0;T], L_{2,\Gamma})$. Так как задача (66)–(68) эквивалентна задаче (38)–(43), то для последней справедливы аналогичные свойства, т.е. выполняются начальные условия (43), соотношения (39), уравнение (38) в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, краевые условия (40)–(42) в пространстве $L_{2,\Gamma}$, причем все слагаемые в уравнении (38) являются непрерывными функциями времени со значениями в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$.

Имеем $P_{0,S}\Delta\vec{v} \in C([0;T], \vec{J}_{0,S}(\Omega))$. Однако, поскольку в исходной задаче область Ω имеет липшицеву границу, то элемент $\Delta\vec{v}$ может не принадлежать пространству $\vec{L}_2(\Omega)$ (см., например, [15]), в общем случае он является распределением. Отсюда следует, что соотношение (35) выполняется в смысле распределений. Складывая его с соотношением (38), получаем что поле $\vec{v}$ и, определяемое через него, поле ∇p_n удовлетворяют для всех $t \in [0;T]$ уравнению (1) в смысле равенства функционалов.

Далее, при выполнении условия 2° поля $\vec{w}$ и p_s восстанавливаются по значению поля $\vec{v}$ на границе Γ посредством формул (32), (33). Отсюда в силу свойства $\vec{v}(t) \in C^1([0;T], \vec{J}_{0,S}(\Omega))$ следует, что $\vec{w}(t) \in C^1([0;T], \vec{J}_{0,S}(\Omega))$. По построению поля $\vec{w}$ и ∇p_s обращают уравнение (2) в верное равенство элементов из $\vec{L}_2(\Omega)$. Условия (3), (6), а также краевые условия (5), (7)–(8) выполняются по построению, причём последние выполняются в смысле равенства элементов гильбертова пространства $L_{2,\Gamma}$. □

Автор благодарит проф. Копачевского Н.Д. за постановку задачи и руководство работой.

1. *Паттерман С.* Гидродинамика сверхтекучей жидкости. – М.: Мир, 1978. – 520 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 734 с.
3. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
4. *Крейн С.Г.* О колебаниях вязкой жидкости в открытом сосуде // Докл. АН СССР. – 1964. – 159, № 2. – С. 262-265.
5. *Закора Д.А.* Малые движения частично диссипативной гидродинамической системы // Межведомственный научный сборник "Динамические системы". – №15. – 1999. – С. 149-154.
6. *Kopachevsky, N. D., Krein, S. G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluid. — Birkhäuser Verlag. – Basel – Boston – Berlin. 2003. — 444 pp. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146).
7. *Gagliargo E.* Caratterizzazioni delletrace sulla frontiera relative ad alaine classi di funzioni in n variabili // Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova. –V.27. – 1957. – P. 284-305.
8. *Azizov T.Ya., Hardt V., Kopachevsky N.D., Mennicken R.* On the problem of small motions and normal oscillations of a viscous fluid in a partially filled container. – Math. Nachr., 248, 249, 2003. pp. 3-39.
9. *Копачевский Н.Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). – №2. – 2004. – С. 52-80.
10. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1961. – 204 с.
11. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи // Украинский матем. вестник.

– Т. 1, № 1. – 2004. – С. 69-97.

12. *Обэн Ж.-П.* Приближённое решение эллиптических краевых задач. – М.: Мир, 1977. – 384 с.
13. *Showalter R.* Hilbert space methods for partial differential equations. – Electronic journal of differential equations. 1994. – 214 pp.
14. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
15. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

Кафедра математического анализа
Таврического национального университета
им. В.И. Вернадского
просп. Вернадского 4
95007, г. Симферополь
victor.voytitsky@gmail.com

Получено 26.02.2009