 В.П. Бурский, А.А. Мирошникова

О РАСШИРЕНИЯХ ОБЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Известная гильбертова схема построения общей теории граничных задач посредством изучения расширений дифференциального оператора в области переносится на случай банаховых пространств типа L_p, $p > 1$

Ключевые слова: расширения дифференциальных операторов; банаховы пространства
MSC (2000): 35G15; 47F05

Введение.

Как известно, основы обшей теории граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными были заложены в работе М.Й. Вишика [3], где граничная задача понималась как задание области определения некоторого расширения минимального оператора, порожденного дифференциальной операцией из изучаемого уравнения. Этот подход Вишика был уточнен Л. Хермандером [4], где было предложено эквивалентное понимание граничной задачи как линейного подпространства в граничном пространстве. Построения Вишика, Хермандера и их последователей проводились в гильбертовых пространствах. В книге [1] одного из авторов настоящей работы была предложена функциональная гильбертова схема дальнейшего построения теории и даны приложения к нелинейным граничным задачам. Там же была намечена структура развития теории для случая банаховых пространств. В настоящей работе мы осуществляем намеченные построения в части, обобщающей построения Вишика и Хермандера. Кроме того, на банаховые пространства будет перенесена схема доказательства корректности общей граничной задачи, для гильбертового случая впервые предложенная в книге [1]. Ниже мы будем иметь в виду изучение граничных задач для дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}(x, D)u = f,$$

где $\mathcal{L}(x, D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$, $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \cdot \partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot \partial x_1^{\alpha_n}$ – общая дифференциальная операция с гладкими комплекснозначными матричными коэффициентами в ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$, расположенной по одну сторону области Ω.

1. Общая функциональная схема для банахова случая.

Здесь мы изложим общую функциональную схему, внутри которой будут проводиться основные рассуждения.

Пусть $p > 1,\ q = p/(p-1)$ и нам даны:

I_1). Четыре рефлексивных банаховых пространства B_p , B_p^+ , B_q , B_q^+ , которые будем называть **центральными**. Причем $B_p = (B_q)^*$, $B_p^+ = (B_q^+)^*$ с обычным банаховским сопряжением $*$;

четыре банаховы пространства B_p^l , B_p^{+l} , B_q^l , B_q^{+l} (с некоторым $l \in \mathbb{N}$), которые будем называть **гладкими**, вложенных соответственно в B_p , B_p^+ , B_q , B_q^+ с топологией: $B_p^l \subset B_p$, $B_p^{+l} \subset B_p^+$, $B_q^l \subset B_q$, $B_q^{+l} \subset B_q^+$;

замкнутые подпространства $\overset{\circ}{B}{}_p^l \subset B_p^l$, $\overset{\circ}{B}{}_p^{+l} \subset B_p^{+l}$, $\overset{\circ}{B}{}_q^l \subset B_q^l$, $\overset{\circ}{B}{}_q^{+l} \subset B_q^{+l}$, которые будем называть **финитными**, причем выполнено условие:

вложения $\overset{\circ}{B}{}_p^l \subset B_p$, $\overset{\circ}{B}{}_p^{+l} \subset B_p^+$, $\overset{\circ}{B}{}_q^l \subset B_q$, $\overset{\circ}{B}{}_q^{+l} \subset B_q^+$ плотны.
В некоторых случаях будем предполагать, специально оговаривая, что

$$B_p^+ = B_p,\ B_p^{+\,l} = B_p^l,\ \overset{\circ}{B}{}_p^{+\,l} = \overset{\circ}{B}{}_p^l. \tag{1.1}$$

I_2). Линейные непрерывные операторы $\mathcal{L}_p : B_p^l \to B_p^+$, $\mathcal{L}_p^+ : B_p^{+l} \to B_p$, $\mathcal{L}_q : B_q^l \to B_q^+$, $\mathcal{L}_q^+ : B_q^{+l} \to B_q$, связанные соотношениями

$$< \mathcal{L}_p u, v >=< u, \mathcal{L}_q^+ v >, u \in B_p^l \ , v \in B_q^+,$$

$$< \mathcal{L}_q u, v >=< u, \mathcal{L}_p^+ v >, u \in B_q^l \ , v \in B_p^+,$$

где хотя бы один из элементов u или v финитен.

2. Основной пример.

Основной пример конкретных пространств и операторов изложенной схемы связан с дифференциальной операцией без типа:

$$\mathcal{L} = \sum_{|\alpha| \le l} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad D^\alpha = \frac{(-i\partial)^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha},$$

с $N^+ \times N$-матричными коэффициентами с $C^\infty(\bar{\Omega})$-гладкими комплекснозначными функциями в качестве матричных элементов в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, находящейся с одной стороны от её гладкой $(n-1)$-мерной границы $\partial\Omega$. Ничто не мешает также считать область Ω произвольной (понимая, как обычно, пространство $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)$ как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в соболевской норме, а пространство $W_p^l(\Omega)$, например, как замыкание пространства $C^\infty(\bar{\Omega}) = \{u|_\Omega \ \ |u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ в этой же норме), что мы и будем подразумевать там, где не используется полная формула Грина.

Операция $\mathcal{L}$ порождает формально сопряжённую операцию

$$\mathcal{L}^+ = \sum_{|\alpha| \le l} D^\alpha(a_\alpha^*(x)\ \cdot),$$

где $a_\alpha^*(x)-$ сопряжённая матрица, если $a_\alpha(x)-$ матрица, сопряжённый оператор, если $a_\alpha(x)-$ оператор, и сопряжённое число, если $a_\alpha(x)-$ число.

Пространства будем выбирать таким образом: $B_p = L_p^N(\Omega) = [L_p(\Omega)]^N$, $\overset{\circ}{B}{}_p^l = [\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)]^N$, $B_p^l = [W_p^l(\Omega)]^N$, $B_p^+ = L_p^{N^+}(\Omega)$, $\overset{\circ}{B}{}_p^{+\,l} = [\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega)]^{N^+}$, $B_p^{+\,l} = [W_p^l(\Omega)]^{N^+}$. Аналогично вводятся пространства с q.

Равенства п. (I_2) теперь есть формулы Грина, где граничные члены исчезли из-за финитности.

Тем самым, предположения пп. I_1) и I_2) выполнены.

Предположениям (1.1) отвечает равенство $N = N^+$, и в этом случае проще всего представлять себе случай $N = 1$, т.е. случай общего скалярного дифференциального оператора. Заметим, что, если рассматривать только случай скалярного оператора или оператора с квадратными матрицами в качестве коэффициентов, то можно забыть обо всех плюсах в индексах, кроме как в индексах при буквах $\mathcal{L}, L$ и Γ. Кроме того, и об этих плюсах можно забыть, если исходная дифференциальная операция формально самосопряжена.

3. Основные положения общей теории граничных задач.

Ниже мы будем строить теорию расширений дифференциальных операторов.

Введём две нормы графика

$$\| u \|_{L_p}^2 = \| u \|_{B_p(\Omega)}^2 + \| \mathcal{L}u \|_{B_p^+(\Omega)}^2,$$

$$\| u \|_{L_q}^2 = \| u \|_{B_q(\Omega)}^2 + \| \mathcal{L}u \|_{B_q^+(\Omega)}^2,$$

конечные на элементах из пространств B_p^l и B_q^l. Пополнения пространств B_p^l, $\overset{\circ}{B}{}_p^l$, B_q^l, $\overset{\circ}{B}{}_q^l$ по этой норме обозначим соответственно $D(L_{p0})$, $D(\tilde{L_p})$, $D(L_{q0})$, $D(\tilde{L_q})$. Оператор $\mathcal{L}$ при этом допускает продолжение по непрерывности на пространство $D(\tilde{L_p})$ и $D(\tilde{L_q})$ в силу оценок $\|\mathcal{L}u\|_{B_p^+(\Omega)} \le \|u\|_{L_p}$ и $\|\mathcal{L}u\|_{B_q^+(\Omega)} \le \|u\|_{L_q}$. Сужение так полученного оператора $\tilde{L}_p : D(\tilde{L}_p) \to B_p^+$ на $D(L_{p0})$ и $\tilde{L}_q : D(\tilde{L}_q) \to B_q^+$ на $D(L_{q0})$ будем называть минимальными расширениями оператора $\mathcal{L}|_{\overset{\circ}{B}{}_p^l}$ и $\mathcal{L}|_{\overset{\circ}{B}{}_q^l}$ или просто **минимальными операторами** и соответственно обозначать L_{p0} и L_{q0}. Аналогично введём нормы графика

$$\| u \|_{L_p^+}^2 = \| u \|_{B_p^+(\Omega)}^2 + \| \mathcal{L}^+u \|_{B_p(\Omega)}^2,$$

$$\| u \|_{L_q^+}^2 = \| u \|_{B_q^+(\Omega)}^2 + \| \mathcal{L}^+u \|_{B_q(\Omega)}^2,$$

пространства $D(L_{p0}^+)$, $D(\tilde{L_p}^+)$, $D(L_{q0}^+)$, $D(\tilde{L_q}^+)$ и операторы $\tilde{L}_p^+, L_{p0}^+, \tilde{L}_q^+, L_{q0}^+$.

Мы вводим максимальные операторы L_p и L_q или просто **максимальные операторы** формулами $L_p = (L_{q0}^+)^*$ и $L_q = (L_{p0}^+)^*$. Из определений и п.(I_2)

общей схемы ясно, что операторы L_p и L_q являются соответственно расширением операторов L_{p0} и $\tilde{L}_p$, L_{q0} и $\tilde{L}_q$, т.е. их области определения $D(L_p)$ и $D(L_q)$ включают в себя пространства $D(\tilde{L}_p)$, $D(L_{p0})$ и $D(\tilde{L}_q)$, $D(L_{q0})$ соответственно в качестве замкнутых подпространств. Аналогично определение максимальных операторов $L_p^+ = L_{q0}^*$ и $L_q^+ = L_{p0}^*$. Мы будем называть их **гладко максимальными** операторами.

Введём теперь, **граничные пространства** $C(L_p)$, $C(L_q)$, $C(L_p^+)$, $C(L_q^+)$ операторов L_p, L_q, L_p^+, L_q^+ как фактор-пространства $C(L_p) = D(L_p)/D(L_{p0})$, $C(L_q) = D(L_q)/D(L_{q0})$, $C(L_p^+) = D(L_p^+)/D(L_{p0}^+)$, $C(L_p^+) = D(L_p^+)/D(L_{p0}^+)$, а также фактор-отображения $\Gamma_p : D(L_p) \to C(L_p)$, $\Gamma_q : D(L_q) \to C(L_q)$, $\Gamma_p^+ : D(L_p^+) \to C(L_p^+)$, $\Gamma_q^+ : D(L_q^+) \to C(L_q^+)$.

Рассмотрим условия:

$$\text{оператор } L_{p0} : D(L_{p0}) \to B_p^+ \text{ имеет непрерывный левый обратный } L_{p0}^{-1}; \tag{$(3.1)_p$}$$

$$\text{оператор } L_{q0} : D(L_{q0}) \to B_q^+ \text{ имеет непрерывный левый обратный } L_{q0}^{-1}; \tag{$(3.1)_q$}$$

$$\text{оператор } L_{p0}^+ : D(L_{p0}^+) \to B_p \text{ имеет непрерывный левый обратный;} \tag{$(3.2)_p$}$$

$$\text{оператор } L_{q0}^+ : D(L_{q0}^+) \to B_q \text{ имеет непрерывный левый обратный;} \tag{$(3.2)_q$}$$

$$\tilde{L}_p = (L_{q0}^+)^*; \tag{$(3.3)_p$}$$

$$\tilde{L}_q = (L_{p0}^+)^*; \tag{$(3.3)_q$}$$

$$\tilde{L}_p^+ = (L_{q0})^*; \tag{$(3.4)_p$}$$

$$\tilde{L}_q^+ = (L_{p0})^*. \tag{$(3.4)_q$}$$

Напомним, что существование непрерывного левого обратного к плотно заданному замкнутому оператору $T : B_1 \supset D(T) \to B_2$, действующему в банаховых пространствах [2], эквивалентно наличию априорной оценки $\|u\|_{B_1} \le C\|Tu\|_{B_2}$. Оператор T с такой оценкой называется **корректно разрешимым**. Т.о., условия $(3.1)_p$, $(3.1)_q$ и $(3.2)_p$, $(3.2)_q$ означают корректную разрешимость операторов L_{p0}, L_{q0} и L_{p0}^+, L_{q0}^+ соответственно. Сравнивая с определением максимальных операторов L_p, L_p^+ и L_q, L_q^+, мы видим, что условия $(3.3)_p$, $(3.4)_p$ и $(3.3)_q$, $(3.4)_q$ означают соответственно равенства $D(\tilde{L}_p) = D(L_p)$, $D(\tilde{L}_p^+) = D(L_p^+)$, $D(\tilde{L}_q) = D(L_q)$, $D(\tilde{L}_q^+) = D(L_q^+)$, т.е. возможность приблизить каждый элемент из $D(L_p)$, $D(L_p^+)$ или $D(L_q)$, $D(L_q^+)$ элементами из гладкого пространства B_p^l, $B_p^{+\,l}$ или B_q^l, $B_q^{+\,l}$ в соответствующей норме графика.

Введем понятие общей граничной задачи. Рассмотрим подходы М.Й.Вишика и Л.Хёрмандера, одновременно вводя необходимые ниже определения.

Следуя М.Й.Вишику ([3]), будем считать, что задание граничного условия проявляется посредством указания области определения $D(L_{pB})$ некоторого оператора L_{pB}, являющегося расширением минимального L_{p0} и сужением максимального L_p операторов: $D(L_{p0}) \subset D(L_{pB}) \subset D(L_p)$. Такие операторы принято называть **расширениями** (оператора L_{p0}), при этом расширение $L_{pB} : D(L_{pB}) \to B_p^+$ называется **разрешимым**, если существует непрерывный двусторонний обратный оператор

$$L_{pB}^{-1} : B_p^+ \to D(L_{pB}),\ L_{pB}L_{pB}^{-1} = \mathrm{id}_{B_p^+},\ L_{pB}^{-1}L_{pB} = \mathrm{id}_{D(L_{pB})}.$$

Ясно, что такой оператор разрешает граничную задачу $u \in D(L_{pB})$ для уравнения $L_p u = f$ с любой правой частью $f \in B_p^+$. Оператор $L_{p1} : D(L_{p1}) \to B_p^+$, являющийся сужением оператора L_p, назовём **разрешимым сужением**, если у него имеется непрерывный двусторонний обратный. Этот обратный оператор является непрерывным правым обратным к оператору L_p и наоборот, каждый непрерывный правый обратный M_p к оператору L_p порождает некоторое разрешимое сужение с областью определения $D(L_{p1}) = \mathrm{Im}\, M_p$, которое является разрешимым расширением (оператора L_{p0}), если $D(L_{p0}) \subset \mathrm{Im}\, M_p$. Расширение L_{pB} называется **вполне разрешимым**, если оно разрешимо и композиция обратного оператора L_{pB}^{-1} с вложением $i_{D(L_p)} : D(L_p) \subset B_p$ вполне непрерывна, т.е. если вполне непрерывен оператор L_{pB}^{-1}, понимаемый как действующий из B_p^+ в B_p. Мы будем также называть расширение $L_{pB} : D(L_{pB}) \to B_p^+$ **нормально разрешимым**, если образ $\mathrm{Im} L_{pB}-$ замкнут. Аналогичны определения разрешимого, вполне разрешимого и нормально разрешимого расширения операторов L_{p0}^+, L_{q0}, L_{q0}^+.

Следуя Л.Хёрмандеру ([4]), назовём **однородной граничной задачей** соотношения

$$L_p u = f, \quad \Gamma_p u \in B, \tag{3.3$_p$}$$

где $B \subset C(L_p)-$ линейное подпространство в граничном пространстве, определяющее граничную задачу. Легко видеть, что граничное условие типа $u \in D(L_{pB})$ порождает условие $\Gamma_p u \in B$, где $B = D(L_{pB})/D(L_{p0})$, и наоборот, пространство B порождает некоторый оператор L_{pB} с областью определения $D(L_{pB}) = \Gamma_p^{-1}(B)$, являющийся сужением оператора L_p на пространство $D(L_{pB})$ и расширением оператора L_{p0}, и который замкнут, если и только если пространство B замкнуто в $C(L_p)$, или, что то же, если пространство $D(L_{pB})$ замкнуто в $D(L_p)$. Граничная задача (3.3) называется **корректно поставленной** или просто **корректной**, если ею порождённый оператор L_{pB} является разрешимым расширением оператора L_{p0}, т.е. если оператор $L_{pB} : D(L_{pB}) \to B_p^+$ имеет непрерывный двусторонний обратный. Аналогично с q.

Сформулируем теперь основное утверждение общей теории граничных задач.

Утверждение 3.1$_p$. *У оператора $L_{p\,0}$ существует разрешимое расширение и для оператора L_p существует корректная граничная задача тогда и только тогда, когда выполнены условия (3.1)$_p$ и (3.2)$_q$.*

Утверждение 3.1$_q$. *У оператора L_{q0} существует разрешимое расширение и для оператора L_q существует корректная граничная задача тогда и только тогда, когда выполнены условия (3.1)$_q$ и (3.2)$_p$.*

Справедливы аналогичные утверждения с плюсованными операторами.

Строение области определения максимального оператора L_p описывает

Утверждение 3.2$_p$. *В условиях* $(3.1)_p$ *и* $(3.2)_q$ *имеет место разложение в прямую сумму*

$$D(L_p) = D(L_{p0}) \oplus \ker L_p \oplus W_p, \tag{3.4$_p$}$$

где W_p- некоторое подпространство в $D(L_p)$ такое, что $L_p|_{W_p} : W_p \to \ker L_p^+-$ изоморфизм.

Справедливо аналогичное утверждение для максимального оператора L_q:

Утверждение 3.2$_q$. *В условиях* $(3.1)_q$ *и* $(3.2)_p$ *имеет место разложение в прямую сумму*

$$D(L_q) = D(L_{q0}) \oplus \ker L_q \oplus W_q, \tag{3.4$_q$}$$

где W_q- некоторое подпространство в $D(L_q)$ такое, что $L_q|_{W_q} : W_q \to \ker L_q^+-$ изоморфизм.

Справедливы аналогичные утверждения с плюсованными операторами.

Сформулируем теперь критерий Вишика разрешимости расширения и критерий Хёрмандера корректности граничной задачи.

Утверждение 3.3$_p$. *Пусть выполнены условия* $(3.1)_p$, $(3.2)_q$. *Для того, чтобы расширение L_{pB} было бы разрешимым (а задача (3.3)$_p$ – корректна в пространстве B_p), необходимо и достаточно, чтобы существовал такой непрерывный оператор $V_p : \ker L_p^+ \to \ker L_p$, что*

$$D(L_{pB}) = D(L_{p0}) \oplus G(V_p L_p|_{W_p}), \tag{3.5$_p$}$$

где $G(V_p L|_{W_p}) = \{w + V_p L_p w | w \in W_p\}-$ график оператора $V_p L_p|_{W_p}$. При этом $D(L_p) = D(L_{pB}) \oplus \ker L_p$.

Оператор V_p будем называть **оператором Вишика** граничной задачи $(3.3)_p$. Отметим, что согласно критериям Вишика [3], разрешимое расширение L_{pB} вполне разрешимо (если вложения $D(L_{p0}) \subset B_p$ и $D(L_{p0}^+) \subset B_p^+$ вполне непрерывны) тогда и только тогда, когда оператор Вишика вполне непрерывен; разрешимое расширение (при условиях (1.2)) самосопряжено тогда и только тогда, когда оператор Вишика самосопряжён; там же описаны также нормально разрешимые расширения и также нормально регулярно разрешимые расширения, т.е. фредгольмовы с нулевым индексом.

Утверждение 3.4$_p$. *Пусть выполнены условия (3.1)$_p$, (3.2)$_q$. Для того, чтобы задача (3.3)$_p$ была бы корректна, необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение в прямую сумму $C(L_p) = C(\ker L_p) \oplus B$, где $C(\ker L_p) = \Gamma \ker L_p -$ граничное пространство ядра $\ker L_p$.*

Прямое слагаемое B в последнем разложении будем называть **слагаемым Хёрмандера**. Ясно, что в этом случае $B-$ график оператора $\Gamma_{\ker} V_p$, если $\Gamma_{\ker} = \Gamma|_{\ker L_p}$.

Аналогично с плюсованными операторами и с индексом q.

Доказательства утверждений вида $3.1-3.4$ будут предоставлены в разделе 4.

Наряду с условиями вида (3.1) - (3.4) будут использоваться также следующие условия:

$$\text{оператор } L_p : D(L_p) \to B_p^+ \text{ сюрьективен;} \tag{3.6$_p$}$$

$$\text{оператор } L_q : D(L_q) \to B_q^+ \text{ сюрьективен;} \tag{3.6$_q$}$$

$$\text{оператор } L_p^+ : D(L_p^+) \to B_p \text{ сюрьективен;} \tag{3.7$_p$}$$

$$\text{оператор } L_q^+ : D(L_q^+) \to B_q \text{ сюрьективен;} \tag{3.7$_q$}$$

$$\text{оператор } L_{p0} \text{ нормально разрешим;} \tag{3.8$_p$}$$

$$\text{оператор } L_{q0} \text{ нормально разрешим;} \tag{3.8$_q$}$$

$$\text{оператор } L_{p0}^+ \text{ нормально разрешим;} \tag{3.9$_p$}$$

$$\text{оператор } L_{q0}^+ \text{ нормально разрешим.} \tag{3.9$_q$}$$

Замечание 3.1. Отметим, что по определению максимального оператора условие (3.6)$_p$ эквивалентно условию (3.2)$_q$, а условие (3.6)$_q$ эквивалентно условию (3.2)$_p$ ([5]).

Замечание 3.2. Нетрудно видеть, что, например, условие (3.1)$_p$ эквивалентно выполнению неравенства

$$\|\mathcal{L}\varphi\|_{L_p(\Omega)} \leq C\|\varphi\|_{L_p(\Omega)} \tag{3.10}$$

для финитных бесконечно дифференцируемых функций. Хорошо известно неравенство Хермандера $\|\mathcal{L}\varphi\|_{L_2(\Omega)} \leq C\|\varphi\|_{L_2(\Omega)}$ для функций из $C_0^\infty(\Omega)$ и скалярных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в ограниченной области. Однако в пространстве $L_p(\Omega)$ с $p \neq 2$ такое неравенство не доказано для более или менее широких классов операторов. Тем не менее, можно указать некоторые операторы, где неравенство (3.10) имеет место. Так, для скалярной дифференциальной операции $\Box = \partial^2/\partial x_1 \partial x_2$ в плоской ограниченной области услови (3.10) выполняется из-за возможности разложения оператора в произведение операторов первого порядка и известного неравенства Соболева-Гальярдо.

4. Коммутативная диаграмма.

Напомним, что в предабелевой категории (т.е аддитивной с ядром и коядром у каждого морфизма) последовательность объектов и морфизмов

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{M} C \to 0 \tag{4.1}$$

точна, если образ предыдущего оператора изоморфен ядру последующего, и что такая последовательность расщепляется, если $B = A \oplus C$. Для расщепления достаточно существования правого обратного морфизма к M или существования левого обратного морфизма к i. Таковой является категория $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ линейных пространств и линейных операторов (которая, более того, является абелевой) и категория $\mathcal{B}$ банаховых пространств непрерывных линейных операторов с замнутыми образами. Для этих категорий, в частности, точность в члене A означает инъективность оператора i, а точность в члене C означает сюрьективность оператора M.

Для пары операторов $L_{p\,0}$, L_p также, как и в работе [1], построим коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами, в которой $L_0 = L_{p\,0}$ $L = L_p$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \ker L_0 & \xrightarrow{i_{L_0}} & D(L_0) & \xrightarrow{L_0} & \mathrm{Im}\ L_0 & \to & 0 \\
 & & \downarrow i_{\ker} & & \downarrow i_0 & & \downarrow i_{\mathrm{Im}} & & \\
0 & \to & \ker L & \xrightarrow{i_L} & D(L) & \xrightarrow{L} & \mathrm{Im}\ L & \to & 0 \\
 & & \downarrow \Gamma_{\ker} & & \downarrow \Gamma & & \downarrow \Gamma_{\mathrm{Im}} & & \\
0 & \to & C(\ker L) & \xrightarrow{i_C} & C(L) & \xrightarrow{L_C} & \mathrm{Im}\ L/\ \mathrm{Im}\ L_0 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array} \tag{4.2}$$

и такую же диаграмму, где $L_0 = L_{q0}$ $L = L_q$. Для случая $\ker L_0 = 0$, $\mathrm{Im}\ L = B_p^+$

имеем диаграмму

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & D(L_0) & \xrightarrow{L_0} & \mathrm{Im}\ L_0 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow i_0 & & \downarrow i_{\mathrm{Im}} & & \\
0 & \to & \ker L & \xrightarrow{i_L} & D(L) & \xrightarrow{L} & B_p^+ & \to & 0 \\
 & & \downarrow \Gamma_{\ker} & & \downarrow \Gamma & & \downarrow \Gamma_{\mathrm{Im}} & & \\
0 & \to & C(\ker L) & \xrightarrow{i_C} & C(L) & \xrightarrow{L_C} & B_p^+/\ \mathrm{Im}\ L_0 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
\qquad (4.3)
$$

Объекты, входящие в диаграмму (4.2), – банаховы пространства. Операторы L и L_0 непрерывны, поэтому их ядра замкнуты в топологии $D(L)$. Диаграмма (4.2) (как и (4.3)) станет диаграммой категории $\mathcal{B}$, если операторы Γ_{Im} и L_C будут непрерывны, т.е. если их ядра $\mathrm{Im}\, L_0$ и $C(\ker L)$ замкнуты. Заметим, что непрерывность одного из этих операторов влечёт непрерывность другого. Действительно, пусть, например, непрерывен оператор Γ_{Im}. Тогда, если последовательность классов $v_k = y_k + D(L_0), y_k \in D(L)$ сходится к нулю в фактор-пространстве $C(L) = D(L)/D(L_0)$, то для оператора $L_C v = \Gamma_{\mathrm{Im}} L \Gamma^{-1} v$ с линейным (но не обязательно непрерывным) Γ^{-1} имеем $\exists a_k \in D(L_0), y_k + a_k \to 0$ в $D(L)$. Тогда $L_C v_k = \Gamma_{\mathrm{Im}}\, L(y_k + a_k) = L(y_k + a_k) +\ \mathrm{Im}\, L_0 \to 0$ в $\mathrm{Im}\, L/\ \mathrm{Im}\, L_0$, что и требовалось. Здесь и ниже A^{-1} для оператора A из диаграммы (4.3) будет означать какой-нибудь правый или левый обратный к A линейный оператор, расщепляющий соответствующую последовательность диаграммы в смысле категории $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ комлексных линейных пространств.

Замечание 4.1. *Отметим, что условие* $(3.1)_p$ *влечет расщепление* $B_p^+ = \ker L_{p\,0}^{-1} \oplus\ ImL_{p\,0}$.

В работе [1] были доказаны следующие утверждения:

Утверждение 4.1$_p$. *В категории* $\mathcal{B}$ *существование разрешимого расширения* L_{pB} *равносильно свойствам* $\ker L_0 = 0$ *и* $(3.8)_p$ *и равносильно разложению в прямую сумму* $(3.4)_p$*, где* $L_p|_{W_p} : W_p \to B_p^+/\ Im\, L_{p0}-$ *изоморфизм.*

Утверждение 4.2$_p$. *В категории* $\mathcal{B}$ *свойство* $(3.1)_p$ *и свойство*

$$\text{оператор } L_p : D(L_p) \to B_p^+ \text{ имеет непрерывный правый обратный;} \qquad (4.4)_p$$

равносильны свойству $(3.8)_p$ *и разложению в прямую сумму* $(3.4)_p$*, где* $L_p|_{W_p} : W_p \to B_p^+/\ Im\, L_{p0}-$ *изоморфизм.*

Аналогичны утверждения с индексом q.

Доказательства утверждений вида 3.1 - 3.3 получим из утверждений вида 4.1, 4.2, если заметим, что равенство $L_pM_p = id_{B_p^+}$ после сопряжения перейдёт в $M_p^* L_{p\,0}^+ = id_{D(L_{q\,0}^+)}$ и наоборот. Аналогично с индексом q. Мы здесь пользуемся сопряжением в смысле банаховых пространств для операторов с плотной областью определения [5].

Доказательства утверждений вида 3.4 легко получить из утверждений вида 3.3, опять же, не привлекая структуру гильбертова пространства.

5. О проверке корректности граничной задачи.

Здесь мы покажем, как может быть использована диаграмма (4.3) при доказательстве корректности граничной задачи.

Утверждение 5.1$_p$. *В условиях (3.1)$_p$ и (3.2)$_q$ каждое разрешимое расширение L_{pB} раскладывается в прямую сумму $L_{pB} = L_{p0} \oplus L_{pB}^{\partial}$, где $L_{pB}^{\partial} : B \to \ker L_{p0}^{-1}-$ некоторый изоморфизм.*

Доказательство. Из коммутативности диаграммы (4.3) с $\operatorname{Im} L_p = B_p^+$ следует, что $L_p = L_{p0} \oplus L_C$, но $C(L_p) = \ker L_C \oplus B, \ker L_C = C(\ker L_p)$, поэтому оператор $L_{pB}^{\partial} = L_C|_B-$ изоморфизм.

Утверждение 5.1$_q$. *В условиях (3.1)$_q$ и (3.2)$_p$ каждое разрешимое расширение L_{qB} раскладывается в прямую сумму $L_{qB} = L_{q0} \oplus L_{qB}^{\partial}$, где $L_{qB}^{\partial} : B \to \ker L_q^+-$ некоторый изоморфизм.*

Для доказательства см. утверждение 1.17 в работе [1].

Утверждение 5.2$_p$. *В условиях (3.1)$_p$ и (3.2)$_q$ всякое линейное пространство $B \subset C(L_p)$ такое, что*

1) $\Gamma_p^{-1} B \cap \ker L_p = 0$,

2) существует оператор $M_p : \ker L_{p0}^{-1} \to D(L_p)$ со свойствами:

а) $L_pM_p = id|_{\ker L_{p\,0}^{-1}}$, б) $Im M_p \subset \Gamma_p^{-1} B$,

порождает корректную граничную задачу (3.3)$_p$.

Доказательство. Заметим сначала, что из свойств 1) и 2а) следует линейность оператора M_p, а также его непрерывность по теореме Банаха. Заметим затем, что сумма $M_p \oplus L_{p0}^{-1} : B_p^+ \to D(L_p)-$ некоторый непрерывный правый обратный к оператору L_p, а оператор $\Gamma_p M_p-$ непрерывный правый обратный к оператору L_C. Из свойств прямой суммы вытекает разложение в прямую сумму

$$C(L_p) = C(\ker L_p) \oplus B_1, \text{ где } B_1 = \operatorname{Im} \Gamma_p M_p.$$

Ясно, что $B \supset B_1$ и $B \cap C(\ker L_p) = 0$. Но это влечёт равенство $B = B_1$, поскольку, если элемент $b \in B$ такой, что $b \notin B_1$, то после факторизации

$\Gamma_{p1} : C(L_p) \to C(\ker L_p)$ вдоль B_1 мы получим элемент $\Gamma_{p1}b \in C(\ker L_p)$, принадлежащий B, что даёт противоречие.

Аналогично доказывается утверждение с индексом q.

1. *Бурский В.П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев.: Наукова думка, 2002. – 315с.
2. *Боярский Б.В.* О задаче Дирихле для системы уравнений эллиптического типа в пространстве.– Бюлл. Польской АН. сер. мат., астр. и физ. наук, 1960, 8, №1,– с.19-23.
3. *Вишик М.Й.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений.– Тр. Моск. мат. о-ва, 1(1952),– с. 187-246.
4. *Хёрмандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных.– М.: ИЛ, 1959.
5. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве.– М.: Наука, 1971.

ИПММ НАН Украины,
ул. Розы Люксембург, 74,
83114, Донецк, Украина
v30@dn.farlep.net, nastya.miroshnikova@gmail.com

Получено 7.12.09