©2008. **В. С. Ільків, Т. В. Магеровська**

ДОСЛІДЖЕННЯ УМОВ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТРИЧНОГО ПІДХОДУ

Задача Коші для рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами досліджувалась у роботі Гельфанда і Шилова [1], в якій за допомогою операторного методу і методу Фур'є доведено існування та єдиність розв'язку, а також встановлено відповідні класи існування та єдиності розв'язку цієї задачі. Отримані результати є точними, не залежать від коефіцієнтів диференціального рівняння певного (приведеного) порядку та враховують задачі з різною гладкістю розв'язків.

У даній роботі за допомогою метричного підходу[2, 3] отримано результати, які доповнюють результати щодо умов розв'язності і гладкості розв'язку задачі Коші для „майже всіх" диференціальних рівнянь у випадку умов 2π-періодичності за просторовими змінними; зокрема показано, що гладкість залежить як від порядку рівняння, так і від кількості просторових змінних

Ключові слова: задача Коші, регулярність, метричний підхід
MSC (2000): 35R45, 35C05, 35E05

1. Основні позначення.

Нехай $\mathcal{D}^p = [0,T] \times \Omega^p_{2\pi}$, де $\Omega^p_{2\pi} = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ — p-вимірний тор просторових змінних $x = (x_1, \dots, x_p)$, t – часова (виділена) змінна, $t \in [0,T]$, $T > 0$.

Простори $\mathbf{E}_{h,l}(\Omega^p_{2\pi})$, $h \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, та $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$, $q \in \mathbb{R}$, є поповненнями множини скінченних тригонометричних сум $v(x) = \sum_k \widehat{v}_k e^{i(k,x)}$ відповідно за нормами

$$\|v; \mathbf{E}_{h,l}(\Omega^p_{2\pi})\| = \Big(\sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}^p} \exp(2h\widetilde{k}^{\,l}) |\widehat{v}_k|^2 \Big)^{1/2},$$

$$\|v; \mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\| = \Big(\sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{\,2q} |\widehat{v}_k|^2 \Big)^{1/2},$$

де $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $(k,x) = k_1x_1 + \dots + k_px_p$, $\widetilde{k} = (1 + k_1^2 + \dots + k_p^2)^{1/2}$.

Оператор $F(D)$, де $D = (D_1, \dots, D_p)$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$, діє на функцію $v(x) = \sum_k \widehat{v}_k e^{i(k,x)}$ за правилом

$$F(D)v(x) = \sum_k F(k) \widehat{v}_k e^{i(k,x)}.$$

Простір $\mathbf{E}^n_{\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$, $\Lambda \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, складається з функцій $u = u(t,x)$, похідні $(1-\Delta)^{l(n-j)/2} D_t^j u(t,\cdot)$, $j = 0, 1, \ldots, n$, яких при $t \in [0,T]$ належать до простору $\mathbf{E}_{\Lambda t,l}(\Omega^p_{2\pi})$, причому функція $\|(1-\Delta)^{l(n-j)/2} D_t^j u(t,\cdot); \mathbf{E}_{\Lambda t,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2$ є неперервною на відрізку $[0,T]$, де Δ — оператор Лапласа від p змінних, $\Delta = -(D_1^2 + \cdots + D_p^2)$, $D_t = \partial/\partial t$, із скінченною нормою

$$\|u; \mathbf{E}^n_{\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)\|^2 = \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{n} \int_0^T \|(1-\Delta)^{l(n-j)/2} D_t^j u(t,\cdot); \mathbf{E}_{\Lambda t,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 dt.$$

2. Рівняння першого порядку за часовою змінною.

У цьому випадку для довільної функції $\varphi_0 \in \mathbf{H}_0(\Omega^p_{2\pi})$ існує єдиний розв'язок $u = u(t,x)$ задачі Коші

$$D_t u - (1-\Delta)^{l/2} u = 0, \qquad l/2 \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0; \tag{2}$$

цей розв'язок задається формулою

$$u(t,x) = \exp\big((1-\Delta)^{l/2} t\big)\varphi_0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \exp(t\widetilde{k}^{\,l})\widehat{\varphi}_0(k) e^{i(k,x)}, \tag{3}$$

де $\varphi_0 = \varphi_0(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{\varphi}_0(k) e^{i(k,x)}$, $\widehat{\varphi}_0(k) \in \mathbb{C}$ — коефіцієнти Фур'є функції φ_0.

При фіксованому $t = h \in [0,T]$ функція $u(h,\cdot)$ належить до $\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})$ і виконується рівність

$$\|u(h,\cdot); \mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 = \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \exp(-2h\widetilde{k}^{\,l}) |\exp(h\widetilde{k}^{\,l})\widehat{\varphi}_0(k)|^2 =$$

$$= \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |\widehat{\varphi}_0(k)|^2 = \|\varphi_0; \mathbf{H}_0(\Omega^p_{2\pi})\|^2.$$

Аналогічне твердження (у вигляді нерівності) вірне для кожного рівняння

$$D_t u = a_1(D) u, \tag{4}$$

де $a_1(D) = \sum\limits_{|s|\leq l} a_{1s} D^s$, l — приведений порядок рівняння (4), $a_{1s} \in \mathbb{C}$, $|a_{1s}| \leq B$, B — довільне фіксоване додатне число.

Справді, нехай $\widetilde{a}_1(k) = a_1(k)/\widetilde{k}^{\,l}$, $S(\alpha) = \{k \in \mathbb{Z}^p : \mathrm{Re}\,\widetilde{a}_1(k) > \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, число Λ вибрано так, що $S(\Lambda)$ — скінченна множина, а $S(\alpha)$ — нескінченна множина для всіх $\alpha < \Lambda$, тобто Λ — найменше дійсне число, для якого лише скінченне число разів $\mathrm{Re}\,\widetilde{a}_1(k) > \Lambda$; зокрема для рівняння (1), яке є частинним випадком рівняння (4) при $a_1(D) = \left(1 + D_1^2 + \cdots + D_p^2\right)^{l/2}$, де l — парне додатне число, маємо $\widetilde{a}_1(k) = 1$, $\Lambda = 1$, $S(\Lambda) = \emptyset$ і $S(\alpha) = \mathbb{Z}^p$ при $\alpha < \Lambda$.

Тоді задача Коші (4), (2) має розв'язок

$$u(t,x) = \exp\big(a_1(D)t\big)\varphi_0(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \exp\big(\widetilde{a}_1(k)t\widetilde{k}^{\,l}\big)\widehat{\varphi}_0(k)e^{i(k,x)}, \quad (5)$$

який при $t = h$ є функцією із $\mathbf{E}_{-\Lambda h,l}(\Omega_{2\pi}^p)$ за умови $\varphi_0 \in \mathbf{H}_0(\Omega_{2\pi}^p)$ і справджує нерівність

$$\begin{aligned}
&\|u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-\Lambda h,l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 = \\
&= \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \exp(-2\Lambda h\widetilde{k}^{\,l})\big|\exp\big(\widetilde{a}_1(k)h\widetilde{k}^{\,l}\big)\widehat{\varphi}_0(k)\big|^2 \le \\
&\le \textstyle\sum_{k\in S(\Lambda)} \Big(\exp\big(2(\mathrm{Re}\,\widetilde{a}_1(k) - \Lambda)h\widetilde{k}^{\,l}\big) - 1\Big)|\widehat{\varphi}_0(k)|^2 + \\
&\qquad\qquad + \|\varphi_0;\mathbf{H}_0(\Omega_{2\pi}^p)\|^2.
\end{aligned}$$

Простір $\mathbf{E}_{-\Lambda h,l}(\Omega_{2\pi}^p)$ при фіксованих l і h є точним стосовно числа Λ, яке не може бути зменшене, оскільки для довільного $\alpha < \Lambda$ і функції $\varphi_0 = \sum\limits_{k\in S(\alpha)\setminus S(\Lambda)} \widehat{\varphi}_0(k)e^{i(k,x)}$ маємо протилежну нерівність

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_0;\mathbf{H}_0(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 = \\
&= \sum_{k\in S(\alpha)\setminus S(\Lambda)} \exp\big(-2\mathrm{Re}\,\widetilde{a}_1(k)h\widetilde{k}^{\,l}\big)\big|\exp\big(\widetilde{a}_1(k)h\widetilde{k}^{\,l}\big)\widehat{\varphi}_0(k)\big|^2 < \\
&< \sum_{k\in S(\alpha)\setminus S(\Lambda)} \exp\big(-2\alpha h\widetilde{k}^{\,l}\big)|u_k(h)|^2 = \|u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-\alpha h,l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2.
\end{aligned}$$

3. Рівняння другого порядку за часовою змінною.

Розглянемо два модельні диференціальні рівняння

$$D_t^2u - (1-\Delta)^l u = 0 \quad (6)$$

та

$$\left(D_t - (1-\Delta)^{l/2}\right)^2 u = 0, \qquad (7)$$

які мають однаковий зведений порядок l. Проаналізуємо умови розв'язності задачі Коші з початковими умовами

$$u|_{t=0} = \varphi_0, \qquad D_t u|_{t=0} = \varphi_1, \qquad (8)$$

для рівнянь (6) та (7).

Коефіцієнти Фур'є $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, розв'язку $u = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)e^{i(k,x)}$ задачі (6), (8) є розв'язками таких задач:

$$u_k''(t) - \widetilde{k}^{\,2l} u_k(t) = 0, \qquad u_k(0) = \widehat{\varphi}_0(k), \quad u_k'(0) = \widehat{\varphi}_1(k),$$

тому

$$u_k(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\exp(t\widetilde{k}^{\,l}) & \exp(-t\widetilde{k}^{\,l})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_0(k)\\ \widetilde{k}^{\,-l}\widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix},$$

$$u_k'(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\exp(t\widetilde{k}^{\,l}) & \exp(-t\widetilde{k}^{\,l})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{k}^{\,l}\widehat{\varphi}_0(k)\\ \widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix},$$

і

$$\begin{aligned}&\widetilde{k}^{\,2l}\exp(-t\widetilde{k}^{\,l})u_k(t) = \\ &= \tfrac{1+\exp(-2t\widetilde{k}^{\,l})}{2}\widetilde{k}^{\,2l}\widehat{\varphi}_0(k) + \tfrac{1-\exp(-2t\widetilde{k}^{\,l})}{2}\widetilde{k}^{\,l}\widehat{\varphi}_1(k),\\ &\widetilde{k}^{\,l}\exp(-t\widetilde{k}^{\,l})u_k'(t) = \\ &= \tfrac{1-\exp(-2t\widetilde{k}^{\,l})}{2}\widetilde{k}^{\,2l}\widehat{\varphi}_0(k) + \tfrac{1+\exp(-2t\widetilde{k}^{\,l})}{2}\widetilde{k}^{\,l}\widehat{\varphi}_1(k).\end{aligned}$$

Звідси отримуємо нерівності

$$\exp(-2t\widetilde{k}^{\,l})\left|\widetilde{k}^{\,2l}u_k(t)\right|^2 \le 2\left|\widetilde{k}^{\,2l}\widehat{\varphi}_0(k)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\widetilde{k}^{\,l}\widehat{\varphi}_1(k)\right|^2,$$

$$\exp(-2t\widetilde{k}^{\,l})\left|\widetilde{k}^{\,l}u_k'(t)\right|^2 \le \frac{1}{2}\left|\widetilde{k}^{\,2l}\widehat{\varphi}_0(k)\right|^2 + 2\left|\widetilde{k}^{\,l}\widehat{\varphi}_1(k)\right|^2.$$

В результаті підсумовування цих нерівностей маємо для всіх $h \in [0, T]$ нерівності для норм

$$\begin{aligned}&\|(1-\Delta)^l u(h,\cdot); \mathbf{E}_{-h,l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 \le \\ &\le 2\|\varphi_0; \mathbf{H}_{2l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 + \frac{1}{2}\|\varphi_1; \mathbf{H}_l(\Omega_{2\pi}^p)\|^2,\\ &\|(1-\Delta)^{l/2} D_t u(h,\cdot); \mathbf{E}_{-h,l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 \le \\ &\le \frac{1}{2}\|\varphi_0; \mathbf{H}_{2l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 + 2\|\varphi_1; \mathbf{H}_l(\Omega_{2\pi}^p)\|^2.\end{aligned} \qquad (9)$$

Якщо $\varphi_1 = 0$, то

$$\widetilde{k}^{\,2l} \exp(-t\widetilde{k}^{\,l}) u_k(t) = \frac{1 + \exp(-2t\widetilde{k}^{\,l})}{2} \widetilde{k}^{\,2l} \widehat{\varphi}_0(k),$$

$$\widetilde{k}^{\,l} \exp(-t\widetilde{k}^{\,l}) u'_k(t) = \frac{1 - \exp(-2t\widetilde{k}^{\,l})}{2} \widetilde{k}^{\,2l} \widehat{\varphi}_0(k),$$

тому виконується двостороння оцінка

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{4}\|\varphi_0; \mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \leq \\ \leq \|(1-\Delta)^l u(h,\cdot); \mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \leq \|\varphi_0; \mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \end{gathered} \tag{10}$$

для довільної функції $\varphi_0 \in \mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})$; якщо додатково

$$\varphi_0 = \sum_{2h\widetilde{k}^{\,l} \geq \ln 2} \widehat{\varphi}_0(k) e^{i(k,x)},$$

то

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{16}\|\varphi_0; \mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \leq \\ \leq \|(1-\Delta)^{l/2} D_t u(h,\cdot); \mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \leq \tfrac{1}{4}\|\varphi_0; \mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \end{gathered} \tag{11}$$

Аналогічно при $\varphi_0 = 0$ маємо

$$\widetilde{k}^{\,2l} \exp(-t\widetilde{k}^{\,l}) u_k(t) = \frac{1 - \exp(-2t\widetilde{k}^{\,l})}{2} \widetilde{k}^{\,l} \widehat{\varphi}_1(k),$$

$$\widetilde{k}^{\,l} \exp(-t\widetilde{k}^{\,l}) u'_k(t) = \frac{1 + \exp(-2t\widetilde{k}^{\,l})}{2} \widetilde{k}^{\,l} \widehat{\varphi}_1(k).$$

тому для всіх $\varphi_1 \in \mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})$ виконуються оцінки

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{4}\|\varphi_1; \mathbf{H}_{l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \leq \\ \leq \|(1-\Delta)^{l/2} D_t u(h,\cdot); \mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \leq \|\varphi_1; \mathbf{H}_{l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2; \end{gathered} \tag{12}$$

якщо $\varphi_1 = \sum\limits_{2h\widetilde{k}^{\,l} \geq \ln 2} \widehat{\varphi}_1(k) e^{i(k,x)} \in \mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})$, то

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{16}\|\varphi_1; \mathbf{H}_{l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \leq \\ \leq \|(1-\Delta)^l u(h,\cdot); \mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \leq \tfrac{1}{4}\|\varphi_1; \mathbf{H}_{l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2. \end{gathered} \tag{13}$$

Ці нерівності означають, що класом розв'язності задачі (6), (8) є простір $\mathbf{E}^2_{-1,l}(\mathcal{D}^p)$, якщо $\varphi_0 \in \mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})$ і $\varphi_1 \in \mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})$, причому із нерівностей (9) та рівності $D^2_t u = (1-\Delta)^l u$ маємо оцінку

$$\|u; \mathbf{E}^2_{-1,l}(\mathcal{D}^p)\|^2 \leq \frac{9}{2}\|\varphi_0; \mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 + 3\|\varphi_1; \mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})\|^2.$$

Розв'язок $u = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)e^{i(k,x)}$ задачі (7), (8) має коефіцієнти Фур'є $u_k(t)$, які є розв'язками задач

$$\left(\tfrac{d}{dt} - \widetilde{k}^{\,l}\right)^2 u_k(t) = u''_k(t) - 2\widetilde{k}^{\,l}u'_k(t) + \widetilde{k}^{\,2l}u_k(t) = 0,$$

$$u_k(0) = \widehat{\varphi}_0(k), \quad u'_k(0) = \widehat{\varphi}_1(k),$$

а саме

$$u_k(t) = \exp(t\widetilde{k}^{\,l})\begin{pmatrix}1 & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\widetilde{k}^{\,l} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_0(k)\\ \widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix},$$

$$u'_k(t) = \exp(t\widetilde{k}^{\,l})\begin{pmatrix}\widetilde{k}^{\,l} & 1 + t\widetilde{k}^{\,l}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\widetilde{k}^{\,l} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_0(k)\\ \widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо рівності

$$\widetilde{k}^{\,2l}\exp(-t\widetilde{k}^{\,l})u_k(t) = (1 - t\widetilde{k}^{\,l})\widetilde{k}^{\,2l}\widehat{\varphi}_0(k) + t\widetilde{k}^{\,2l}\widehat{\varphi}_1(k),$$

$$\widetilde{k}^{\,l}\exp(-t\widetilde{k}^{\,l})u'_k(t) = -t\widetilde{k}^{\,3l}\widehat{\varphi}_0(k) + (1 + t\widetilde{k}^{\,l})\widetilde{k}^{\,l}\widehat{\varphi}_1(k)$$

та нерівності

$$\exp(-2t\widetilde{k}^{\,l})\left|\widetilde{k}^{\,2l}u_k(t)\right|^2 \leq$$

$$\leq 2\left|\widetilde{k}^{\,2l}\widehat{\varphi}_0(k)\right|^2 + 2t^2\left|\widetilde{k}^{\,3l}\widehat{\varphi}_0(k)\right|^2 + 2t^2\left|\widetilde{k}^{\,2l}\widehat{\varphi}_1(k)\right|^2,$$

$$\exp(-2t\widetilde{k}^{\,l})\left|\widetilde{k}^{\,l}u'_k(t)\right|^2 \leq$$

$$\leq 3t^2\left|\widetilde{k}^{\,3l}\widehat{\varphi}_0(k)\right|^2 + 3\left|\widetilde{k}^{\,l}\widehat{\varphi}_1(k)\right|^2 + 3t^2\left|\widetilde{k}^{\,2l}\widehat{\varphi}_1(k)\right|^2.$$

Підсумовуючи за індексом $k \in \mathbb{Z}^p$ маємо

$$\|(1-\Delta)^l u(h,\cdot); \mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 \leq 2\|\varphi_0; \mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 + 2h^2\|\varphi_0; \mathbf{H}_{3l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 + 2h^2\|\varphi_1; \mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2, \quad (14)$$

$$\|(1-\Delta)^{l/2}D_t u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 \le 3h^2\|\varphi_0;\mathbf{H}_{3l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 + 3\|\varphi_1;\mathbf{H}_l(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 + 3h^2\|\varphi_1;\mathbf{H}_{2l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2. \quad (15)$$

Якщо $\varphi_1 = 0$, то

$$u_k(t) = \exp(t\widetilde{k}^{\,l})(1-t\widetilde{k}^{\,l})\widehat{\varphi}_0(k),$$

$$u_k'(t) = -t\exp(t\widetilde{k}^{\,l})\widetilde{k}^{\,2l}\widehat{\varphi}_0(k).$$

Звідси отримуємо такі оцінки:

$$\big|\widetilde{k}^{\,l}\widehat{\varphi}_0(k)\big|^2/4 \le \exp(-2t\widetilde{k}^{\,l})\big|u_k(t)\big|^2 \le 2t^2\big|\widetilde{k}^{\,l}\widehat{\varphi}_0(k)\big|^2 + 2|\widehat{\varphi}_0(k)|^2$$

при $t\widetilde{k}^{\,l} \ge 2$ та

$$\exp(-2t\widetilde{k}^{\,l})\big|u_k'(t)\big|^2 = t^2\big|\widetilde{k}^{\,2l}\widehat{\varphi}_0(k)\big|^2,$$

або при $h > 0$

$$\sum_{h\widetilde{k}^{\,l}<2}\Big(\big|1-h\widetilde{k}^{\,l}\big| - \frac{1}{4}h^2\widetilde{k}^{\,2l}\Big)\big|\widetilde{k}^{\,2l}\widehat{\varphi}_0(k)\big|^2 + \frac{1}{4}h^2\|\varphi_0;\mathbf{H}_{3l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 \le$$
$$\le \|(1-\Delta)^l u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 \le$$
$$\le 2\|\varphi_0;\mathbf{H}_{2l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 + 2h^2\|\varphi_0;\mathbf{H}_{3l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2, \quad (16)$$

$$\|(1-\Delta)^{l/2}D_t u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 = h^2\|\varphi_0;\mathbf{H}_{3l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2. \quad (17)$$

Якщо ж $\varphi_0 = 0$, то $u_k(t) = t\exp(t\widetilde{k}^{\,l})\widehat{\varphi}_1(k)$, $u_k'(t) = \exp(t\widetilde{k}^{\,l})(1+t\widetilde{k}^{\,l})\widehat{\varphi}_1(k)$ та виконуються оцінки

$$\exp(-2t\widetilde{k}^{\,l})\big|u_k(t)\big|^2 = t^2\big|\widehat{\varphi}_1(k)\big|^2,$$

$$t^2\big|\widetilde{k}^{\,l}\widehat{\varphi}_1(k)\big|^2 \le \exp(-2t\widetilde{k}^{\,l})\big|u_k'(t)\big|^2 \le 2\big|\widehat{\varphi}_1(k)\big|^2 + 2t^2\big|\widetilde{k}^{\,l}\widehat{\varphi}_1(k)\big|^2,$$

підсумовуючи які маємо

$$\|(1-\Delta)^l u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 = h^2\|\varphi_1;\mathbf{H}_{2l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2, \quad (18)$$

$$h^2\|\varphi_1;\mathbf{H}_{2l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 \le \|(1-\Delta)^{l/2}D_t u(h,\cdot);\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 \le$$
$$\le 2\|\varphi_1;\mathbf{H}_l(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 + 2h^2\|\varphi_1;\mathbf{H}_{2l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2. \quad (19)$$

Із оцінок (9) випливає існування розв'язку задачі (6), (8) у просторі $\mathbf{E}^2_{-1,l}(\mathcal{D}^p)$ для довільних функцій $\varphi_0 \in \mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})$. Це точний результат щодо гладкості функцій φ_0 та φ_1. Дійсно, із нерівностей (10), (11) випливає, що якщо $\varphi_0 \notin \mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})$, $\varphi_1 = 0$, то $(1-\Delta)^l u$ і $(1-\Delta)^{l/2} D_t u$ не належать до простору $\mathbf{E}_{-h,l}(\Omega^p_{2\pi})$; така ж ситуація (див. нерівності (12), (13)) виникає при $\varphi_1 \notin \mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})$, $\varphi_0 = 0$.

Для належності розв'язку задачі (7), (8) до простору $\mathbf{E}^2_{-1,l}(\mathcal{D}^p)$ необхідно (і достатньо) накладати значно сильніші умови гладкості на праві частини (8), а саме $\varphi_0 \in \mathbf{H}_{3l}(\Omega^p_{2\pi})$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{2l}(\Omega^p_{2\pi})$. Необхідність цих умов випливає із нерівностей (16)–(19), а достатність із нерівностей (14), (15).

Тому розв'язність задачі Коші з умовами (8) для довільного лінійного диференціального рівняння другого порядку за змінною t і зведеного порядку l, що має вигляд

$$D_t^2 u + a_1(D) D_t u + a_2(D) u = 0, \tag{20}$$

де $a_1(D) = \sum\limits_{|s|\le l} a_{1s} D^s$, $a_2(D) = \sum\limits_{|s|\le 2l} a_{2s} D^s$, $a_{1s} \in \mathbb{C}$, $a_{2s} \in \mathbb{C}$, $|a_{1s}| \le B$, $|a_{2s}| \le B$, у просторі $\mathbf{E}^2_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$ вимагає накладання умов на функції φ_0 і φ_1 не слабших, ніж у задачі (7), (8).

Знайдемо оцінки розв'язку задачі (20), (8), ввівши такі позначення:

Λ — найменше число, для якого $\mathrm{R}e\ \lambda_1(k) \le \Lambda$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, крім, можливо, скінченної множини $S = S(\Lambda)$, для якої $\mathrm{R}e\ \lambda_1(k) > \Lambda$, $k \in S$;

Λ_1 — найменше число, для якого $\max(|\lambda_1(k)|, |\lambda_2(k)|) \le \Lambda_1$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, крім скінченної множини $S_1 = S_1(\Lambda_1)$, для якої $\max(|\lambda_1(k)|, |\lambda_2(k)|) > \Lambda_1$, $k \in S_1$, де $\lambda_1(k)$, $\lambda_2(k)$ — корені рівняння $\lambda^2 + \widetilde{a}_1(k)\lambda + \widetilde{a}_2(k) = 0$, які впорядковані так, що $\mathrm{R}e\ \lambda_1(k) \ge \mathrm{R}e\ \lambda_2(k)$.

Тут $\widetilde{a}_1(k) = a_1(k)/\widetilde{k}^{\,l}$, $\widetilde{a}_2(k) = a_2(k)/\widetilde{k}^{\,2l}$ є обмеженими за модулем функціями параметра $k \in \mathbb{Z}^p$, при $k \notin S_1$.

Для рівнянь (6) та (7) множини S та S_1 є порожніми, а також виконуються рівності $\mathrm{R}e\ \lambda_1(k) = \lambda_1(k) = |\lambda_2(k)| = \Lambda(k) = \Lambda_1(k) = 1$.

Коефіцієнти Фур'є $u_k(t)$ розв'язку u задачі (20), (8) задовольняють такі задачі Коші:

$$u_k''(t) + a_1(k) u_k'(t) + a_2(k) u_k(t) = 0, \quad u_k(0) = \widehat{\varphi}_0(k), \quad u_k'(0) = \widehat{\varphi}_1(k).$$

Отримуємо формули для розв'язків цих задач

$$u_k(t) = \Big(\exp(t\lambda_1(k)\widetilde{k}^{\,l}) \quad \exp(t\lambda_2(k)\widetilde{k}^{\,l})\Big) \times$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1(k)\widetilde{k}^{\,l} & \lambda_2(k)\widetilde{k}^{\,l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k) \end{pmatrix} =$$
$$= \left(\frac{\exp(t\lambda_1(k)\widetilde{k}^{\,l})}{\lambda_2(k) - \lambda_1(k)} \quad \frac{\exp(t\lambda_2(k)\widetilde{k}^{\,l})}{\lambda_2(k) - \lambda_1(k)} \right) \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \lambda_2(k) & -1 \\ -\lambda_1(k) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widetilde{k}^{\,-l}\widehat{\varphi}_1(k) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Оскільки $\lambda_{1,2}(k) = \dfrac{\widetilde{a}_1(k) \pm D^{1/2}(k)}{2}$, то $\lambda_1(k) - \lambda_2(k) = D^{1/2}(k)$, де $D(k)$ є дискримінантом многочлена $\lambda^2 + \widetilde{a}_1(k)\lambda + \widetilde{a}_2(k)$, $D(k) = \widetilde{a}_1^2(k) - 4\widetilde{a}_2(k)$. Із формули (21) випливають рівності

$$u_k(t) = \frac{\lambda_1(k)\exp(t\lambda_2(k)\widetilde{k}^{\,l}) - \lambda_2(k)\exp(t\lambda_1(k)\widetilde{k}^{\,l})}{D^{1/2}(k)}\widehat{\varphi}_0(k) +$$
$$+ \frac{\exp(t\lambda_1(k)\widetilde{k}^{\,l}) - \exp(t\lambda_2(k)\widetilde{k}^{\,l})}{D^{1/2}(k)}\widetilde{k}^{\,-l}\widehat{\varphi}_1(k),$$

$$u_k'(t) = \frac{\lambda_1(k)\lambda_2(k)\Big(\exp(t\lambda_2(k)\widetilde{k}^{\,l}) - \exp(t\lambda_1(k)\widetilde{k}^{\,l})\Big)}{D^{1/2}(k)}\widetilde{k}^{\,l}\widehat{\varphi}_0(k) +$$
$$+ \frac{\lambda_1(k)\exp(t\lambda_1(k)\widetilde{k}^{\,l}) - \lambda_2(k)\exp(t\lambda_2(k)\widetilde{k}^{\,l})}{D^{1/2}(k)}\widehat{\varphi}_1(k),$$

на основі яких встановлюємо (при $k \notin S \cup S_1$) оцінки

$$\begin{aligned} \big|\exp(-t\Lambda\widetilde{k}^{\,l})u_k(t)\big|^2 &\le 8D^{-1}(k)\big(\Lambda_1^2|\widehat{\varphi}_0(k)|^2 + |\widetilde{k}^{\,-l}\widehat{\varphi}_1(k)|^2\big), \\ \big|\exp(-t\Lambda\widetilde{k}^{\,l})u_k'(t)\big|^2 &\le 8\Lambda_1^2 D^{-1}(k)\big(\Lambda_1^2|\widetilde{k}^{\,l}\widehat{\varphi}_0(k)|^2 + |\widehat{\varphi}_1(k)|^2\big). \end{aligned} \quad (22)$$

Для оцінки знизу дискримінанта $D(k)$ використаємо метричний підхід, враховуючи залежність $D(k)$ від коефіцієнтів a_{1s} і a_{2s} диференціального рівняння (20), які є незалежними змінними в крузі $\mathcal{O} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le B\}$.

Розіб'ємо множину $\mathbb{Z}^p$ на p частин, а саме $\mathbb{Z}^p = K_1 \cup \cdots \cup K_p$, покладаючи

$$K_1 = \{k \in \mathbb{Z}^p : |k_1| = \max(|k_1|, \dots, |k_p|)\},$$

$$K_p = \{k \in \mathbb{Z}^p : |k_p| > \max(|k_1|, \dots, |k_{p-1}|)\},$$

$$K_j = \{k \in \mathbb{Z}^p : |k_j| = \max(|k_1|, \dots, |k_p|),$$

$$|k_j| > \max(|k_1|, \dots, |k_{j-1}|)\}, \quad j = 2, 3, \dots, p-1,$$

тоді для всіх $k = (k_1, \dots, k_p) \in K_j \setminus \{0\}$ справджуються нерівності $|k_j| < \widetilde{k} < (p+1)^{1/2}|k_j|$.

Якщо $b_1 = a_{2,2l,0,\dots,0}, b_2 = a_{2,0,2l,0,\dots,0}, \dots, b_p = a_{2,0,\dots,0,2l}$, то $\widetilde{a}_2(k) = \sum_{j=1}^p b_j(k_j/\widetilde{k})^{2l} + \check{a}_2(k)$, де доданок $\check{a}_2(k)$ не залежить від коефіцієнтів $b_1, \dots, b_p$. Вважаємо коефіцієнти рівняння (20) незмінними, за винятком коефіцієнтів $b_1, \dots, b_p$, тоді вектор b, $b = (b_1, \dots, b_p)$, є довільним елементом із множини $\mathcal{O}^p$.

Зафіксуємо $0 < \varepsilon < 1$ та $r > p$ і позначимо $W_\varepsilon(k) \subset \mathcal{O}^p$ множину векторів b, для яких при фіксованому $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ виконується нерівність

$$|D(k)| \leq C_1(\varepsilon/\widetilde{k}^{\,r})^{1/2}, \quad C_1 > 0. \tag{23}$$

Нехай $k \in K_j$ і $k \neq 0$, тоді множина $W_\varepsilon(k, b')$ чисел $b_j \in \mathcal{O}$, для яких виконується (23) при всіх інших фіксованих (позначених b') компонентах вектора b, визначається нерівністю

$$\left|b_j + \left(\frac{\widetilde{k}}{k_j}\right)^{2l}\left(\sum_{\alpha=1,\alpha\neq j}^{p} b_j\left(\frac{k_j}{\widetilde{k}}\right)^{2l} + \check{a}_2(k) - \frac{\widetilde{a}_1^2(k)}{4}\right)\right| \leq \left(\frac{\widetilde{k}}{k_j}\right)^{2l}\frac{C_1}{4}\left(\frac{\varepsilon}{\widetilde{k}^{\,r}}\right)^{1/2};$$

множина $W_\varepsilon(k, b')$ є частиною круга радіуса $(\widetilde{k}/k_j)^{2l}(\varepsilon/\widetilde{k}^{\,r})^{1/2}C_1/4$, тому $\mathrm{m}es\ W_\varepsilon(k, b') \leq \varepsilon\pi\dfrac{C_1^2}{16}\left(\dfrac{\widetilde{k}}{k_j}\right)^{4l}\widetilde{k}^{\,-r} \leq \varepsilon\pi\dfrac{C_1^2}{16}(p+1)^{2l}\widetilde{k}^{\,-r}$. Інтегруючи останню нерівність по $\mathcal{O}^{p-1}$ отримуємо

$$\mathrm{m}es\ W_\varepsilon(k) \leq \varepsilon\pi^p\frac{C_1^2}{16}(p+1)^{2l}B^{2(p-1)}\widetilde{k}^{\,-r}. \tag{24}$$

Тоді на множині $\mathcal{O}^p \setminus W_\varepsilon$, де $W_\varepsilon = \bigcup\limits_{k\neq 0} W_\varepsilon(k)$, виконується протилежна до (23) оцінка, тобто

$$|D(k)| > C_1(\varepsilon/\widetilde{k}^{\,r})^{1/2}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}. \tag{25}$$

Міра множини W_ε не перевищує число ε, оскільки із нерівності (24) випливає

$$\mathrm{m}es\ W_\varepsilon \le \sum_{k\neq 0} \mathrm{m}es\ W_\varepsilon(k) \le \varepsilon\pi^p \frac{C_1^2}{16}(p+1)^{2l}B^{2(p-1)}\sum_{k\neq 0}\widetilde{k}^{\,-r} = \varepsilon,$$

якщо стала C_1 задовольняє рівність $\pi^p(p+1)^{2l}B^{2(p-1)}\sum\limits_{k\neq 0}\widetilde{k}^{\,-r}\cdot C_1^2 = 16$.

Підставляючи оцінки (25) в нерівності (22) маємо для $k\notin S\cup S_1\cup\{0\}$ такі нерівності:

$$\bigl|\exp(-t\Lambda\widetilde{k}^{\,l})u_k(t)\bigr|^2 \le \frac{8\widetilde{k}^{\,r/2}}{C_1\sqrt{\varepsilon}}\bigl(\Lambda_1^2|\widehat{\varphi}_0(k)|^2 + |\widetilde{k}^{\,-l}\widehat{\varphi}_1(k)|^2\bigr),$$

$$\bigl|\exp(-t\Lambda\widetilde{k}^{\,l})u_k'(t)\bigr|^2 \le \frac{8\Lambda_1^2\widetilde{k}^{\,r/2}}{C_1\sqrt{\varepsilon}}\bigl(\Lambda_1^2|\widetilde{k}^{\,l}\widehat{\varphi}_0(k)|^2 + |\widehat{\varphi}_1(k)|^2\bigr).$$

Із рівняння (20) отримуємо нерівності для другої похідної

$$|u_k''(t)|^2 \le 2\bigl(4\Lambda_1^2|\widetilde{k}^{\,l}u_k'(t)|^2 + \Lambda_1^4|\widetilde{k}^{\,2l}u_k(t)|^2\bigr).$$

Тому справджуються оцінки

$$\bigl|\widetilde{k}^{\,2l}\exp(-t\Lambda\widetilde{k}^{\,l})u_k(t)\bigr|^2 \le \frac{8}{C_1\sqrt{\varepsilon}}\bigl(\Lambda_1^2|\widetilde{k}^{\,2l+r/4}\widehat{\varphi}_0(k)|^2 + |\widetilde{k}^{\,l+r/4}\widehat{\varphi}_1(k)|^2\bigr),$$

$$\bigl|\widetilde{k}^{\,l}\exp(-t\Lambda\widetilde{k}^{\,l})u_k'(t)\bigr|^2 \le \frac{8\Lambda_1^2}{C_1\sqrt{\varepsilon}}\bigl(\Lambda_1^2|\widetilde{k}^{\,2l+r/4}\widehat{\varphi}_0(k)|^2 + |\widetilde{k}^{\,l+r/4}\widehat{\varphi}_1(k)|^2\bigr),$$

$$\bigl|\exp(-t\Lambda\widetilde{k}^{\,l})u_k''(t)\bigr|^2 \le \frac{80\Lambda_1^4}{C_1\sqrt{\varepsilon}}\bigl(\Lambda_1^2|\widetilde{k}^{\,2l+r/4}\widehat{\varphi}_0(k)|^2 + |\widetilde{k}^{\,l+r/4}\widehat{\varphi}_1(k)|^2\bigr),$$

із яких випливають нерівності

$$\max\nolimits_{j=0,1,2}\|(1-\Delta)^{l(2-j)/2}D_t^j u(t,\cdot);\mathbf{E}_{-t\Lambda,l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 \le$$

$$\le C_2(b) + \tfrac{C_3}{\sqrt{\varepsilon}}\sum\nolimits_{j=0}^1 \Lambda_1^{2(j-1)}\|\varphi_j;\mathbf{H}_{(2-j)l+r/4}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2,$$

де $C_2(b)>0$ — деяка стала, що залежить від вектора b, $C_3 = 8\max(1,\Lambda_1^2,10\Lambda_1^4)$, тобто $u\in\mathbf{E}^2_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$ при $\varphi_0\in\mathbf{H}_{2l+r/4}(\Omega_{2\pi}^p)$ та $\varphi_1\in\mathbf{H}_{l+r/4}(\Omega_{2\pi}^p)$.

4. Рівняння вищого порядку за часовою змінною.

Розглянемо насамперед задачу Коші для модельних рівнянь з частинними похідними

$$D_t^n u - (1-\Delta)^{ln/2} u = 0, \tag{26}$$

$$(D_t - (1-\Delta)^{l/2})^n u = 0, \tag{27}$$

при $n \geq 3$ з початковими умовами

$$u|_{t=0} = \varphi_0, \quad D_t u|_{t=0} = \varphi_1, \dots, \quad D_t^{n-1} u|_{t=0} = \varphi_{n-1}. \tag{28}$$

Тоді коефіцієнти Фурʼє $u_k(t)$ розвʼязку задачі (26), (28) є розвʼязками задач Коші

$$u_k^{(n)}(t) - \widetilde{k}^{\,nl} u_k(t) = 0, \quad u_k(t) = \widehat{\varphi}_0(k),$$

$$u_k'(t) = \widehat{\varphi}_1(k), \dots, \; u_k^{(n-1)}(t) = \widehat{\varphi}_{n-1}(k),$$

і разом зі своїми похідними до n-го порядку включно справджують рівності

$$\begin{aligned} \widetilde{k}^{\,(n-j)l} u_k^{(j)}(t) = \widetilde{k}^{\,nl} \Big(\eta_1^j \exp(\eta_1 t \widetilde{k}^{\,l}) C_{0k} + \eta_2^j \exp(\eta_2 t \widetilde{k}^{\,l}) C_{1,k} + \\ + \dots + \eta_n^j \exp(\eta_n t \widetilde{k}^{\,l}) C_{n-1,k} \Big), \end{aligned} \tag{29}$$

де $\eta_j = \eta^{j-1}$, $j = 1, \dots, n$, $\eta = e^{i2\pi/n}$, причому $\bar{\eta} = \eta^{-1}$, а сталі $C_{0k}, C_{1k}, \dots, C_{n-1,k}$ визначаються із відповідної системи лінійних алгебричних рівнянь за допомогою формули

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_{0k} \\ C_{1k} \\ \dots \\ C_{n-1,k} \end{pmatrix} = \Big(W(\eta_1 \widetilde{k}^{\,l}) \quad \dots \quad W(\eta_n \widetilde{k}^{\,l}) \Big)^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k) \\ \dots \\ \widehat{\varphi}_{n-1}(k) \end{pmatrix} = \\ = \Big(W(\eta_1) \quad \dots \quad W(\eta_n) \Big)^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widetilde{k}^{\,-l} \widehat{\varphi}_1(k) \\ \dots \\ \widetilde{k}^{\,-(n-1)l} \widehat{\varphi}_{n-1}(k) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{30}$$

Вектор $W(y)$ у формулі (30) має вигляд

$$W(y) = col\ (1, y, y^2, \dots, y^{n-1}), \tag{31}$$

а матриця

$$\big(W(\eta_1), W(\eta_2), \ldots, W(\eta_n)\big)/\sqrt{n} = \big(W(1), W(\eta), \ldots, W(\eta^{n-1})\big)/\sqrt{n}$$

називається матрицею дискретного перетворення Фур'є і є комплексною симетричною унітарною матрицею [4, с. 123], тому

$$\big(W(\eta_1) \quad \ldots \quad W(\eta_n)\big)^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & \eta_1^{-1} & \ldots & \eta_1^{-(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \eta_n^{-1} & \ldots & \eta_n^{-(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Із рівностей (29) маємо

$$\widetilde{k}^{\,(n-j)l} u_k^{(j)}(t) = \frac{1}{n}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\sum_{\alpha=1}^{n} \eta_\alpha^{j-\sigma}\exp(\eta_\alpha t\widetilde{k}^{\,l})\widetilde{k}^{\,(n-\sigma)l}\widehat{\varphi}_\sigma(k);$$

звідси отримуємо оцінки

$$\big|\exp(-t\widetilde{k}^{\,l})\widetilde{k}^{\,(n-j)l}u_k^{(j)}(t)\big|^2 \le n\sum_{\sigma=0}^{n-1}\big|\widetilde{k}^{\,(n-\sigma)l}\widehat{\varphi}_\sigma(k)\big|^2,\ j = 0, 1, .., n-1,$$

та нерівність

$$\max\nolimits_{j=0,1,\ldots,n} \|(1-\Delta)^{l(n-j)/2}D_t^j u(t,\cdot); \mathbf{E}_{-t,l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 \le$$

$$\le n\sum\nolimits_{j=0}^{n-1}\|\varphi_j; \mathbf{H}_{(n-j)l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2;$$

тобто $u \in \mathbf{E}_{-1,l}^n(\mathcal{D}^p)$ при $\varphi_j \in \mathbf{H}_{(n-j)l}(\Omega_{2\pi}^p)$ і

$$\|u; \mathbf{E}_{-1,l}^n(\mathcal{D}^p)\|^2 \le n(n+1)\sum_{j=0}^{n-1}\|\varphi_j; \mathbf{H}_{(n-j)l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2.$$

Коефіцієнти Фур'є $u_k(t)$ розв'язку задачі (27), (28) визначаються такими задачами Коші для звичайних диференціальних рівнянь:

$$\Big(\tfrac{d}{dt} - \widetilde{k}^{\,l}\Big)^n u_k(t) = 0,$$

$$u_k(t) = \widehat{\varphi}_0(k), \quad u_k'(t) = \widehat{\varphi}_1(k), \ldots, \quad u_k^{(n-1)}(t) = \widehat{\varphi}_{n-1}(k).$$

Розв'язки цих задач та їх похідні визначаються формулами

$$\begin{pmatrix} u_k(t) \\ u_k'(t) \\ \dots \\ u_k^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \exp\left(t\widetilde{k}^{\,l}\right)\left(W\left(\widetilde{k}^{\,l}\right) \quad W'\left(\widetilde{k}^{\,l}\right) \quad \dots \quad \frac{W^{(n-1)}\left(\widetilde{k}^{\,l}\right)}{(n-1)!}\right)\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \widetilde{W}(t) \\ \widetilde{W}'(t) \\ \dots \\ \widetilde{W}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}\left(W\left(\widetilde{k}^{\,l}\right) \quad W'\left(\widetilde{k}^{\,l}\right) \quad \dots \quad \frac{W^{(n-1)}\left(\widetilde{k}^{\,l}\right)}{(n-1)!}\right)^{-1}\begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k) \\ \dots \\ \widehat{\varphi}_{n-1}(k) \end{pmatrix},$$

де $\widetilde{W}(t) = \left(1, t, t^2/2!, \dots, t^{n-1}/(n-1)!\right)$, $W\left(\widetilde{k}^{\,l}\right)$ обчислюється за формулою (31). Використовуючи матричні рівності

$$Z\left(\widetilde{k}^{\,l}\right)\begin{pmatrix} \widetilde{W}(t) \\ \widetilde{W}'(t) \\ \dots \\ \widetilde{W}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} Z^{-1}\left(\widetilde{k}^{\,l}\right) = \begin{pmatrix} \widetilde{W}\left(t\widetilde{k}^{\,l}\right) \\ \widetilde{W}'\left(t\widetilde{k}^{\,l}\right) \\ \dots \\ \widetilde{W}^{(n-1)}\left(t\widetilde{k}^{\,l}\right) \end{pmatrix},$$

$$Z\left(\widetilde{k}^{\,l}\right)\left(W\left(\widetilde{k}^{\,l}\right) \quad W'\left(\widetilde{k}^{\,l}\right) \quad \dots \quad \frac{W^{(n-1)}\left(\widetilde{k}^{\,l}\right)}{(n-1)!}\right) Z^{-1}\left(\widetilde{k}^{\,l}\right) =$$

$$= \left(W(1) \quad W'(1) \quad \dots \quad \frac{W^{(n-1)}(1)}{(n-1)!}\right),$$

$$\left(W(1) \quad W'(1) \quad \dots \quad \frac{W^{(n-1)}(1)}{(n-1)!}\right)^{-1} =$$

$$= \left(W(-1) \quad W'(-1) \quad \dots \quad \frac{W^{(n-1)}(-1)}{(n-1)!}\right),$$

де остання формула є однією із властивостей трикутника Паскаля, $Z(y) = (y^n, \dots, y^2, y)$, запишемо формули для розв'язку $u_k(t)$

у вигляді

$$\begin{pmatrix} \widetilde{k}^{\,nl}u_k(t) \\ \widetilde{k}^{\,(n-1)l}u_k'(t) \\ \dots \\ \widetilde{k}^{\,l}u_k^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \exp\big(t\widetilde{k}^{\,l}\big)\times$$

$$\times\begin{pmatrix} W(1) & W'(1) & \dots & \dfrac{W^{(n-1)}(1)}{(n-1)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{W}\big(t\widetilde{k}^{\,l}\big) \\ \widetilde{W}'\big(t\widetilde{k}^{\,l}\big) \\ \dots \\ \widetilde{W}^{(n-1)}\big(t\widetilde{k}^{\,l}\big) \end{pmatrix}\times \tag{32}$$

$$\times\begin{pmatrix} W(-1) & W'(-1) & \dots & \dfrac{W^{(n-1)}(-1)}{(n-1)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{k}^{\,nl}\widehat{\varphi}_0(k) \\ \widetilde{k}^{\,(n-1)l}\widehat{\varphi}_1(k) \\ \dots \\ \widetilde{k}^{\,l}\widehat{\varphi}_{n-1}(k) \end{pmatrix}.$$

Права частина останньої формули зображується у вигляді суми

$$\frac{\big(t\widetilde{k}^{\,l}\big)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{\alpha=0}^{n-1}(-1)^\alpha C_{n-1}^\alpha \widetilde{k}^{\,(n-\alpha)l}\widehat{\varphi}_\alpha(k)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}+$$

$$+\sum_{\beta=0}^{n-2}\frac{\big(t\widetilde{k}^{\,l}\big)^{\beta}}{\beta!}\Omega_\beta\begin{pmatrix} \widetilde{k}^{\,nl}\widehat{\varphi}_0(k) \\ \widetilde{k}^{\,(n-1)l}\widehat{\varphi}_1(k) \\ \dots \\ \widetilde{k}^{\,l}\widehat{\varphi}_{n-1}(k) \end{pmatrix},$$

де $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{n-2}$ — сталі матриці, C_n^α — біномні коефіцієнти, тому з рівності

$$u_k^{(n)}(t) = C_n^1\widetilde{k}^{\,l}u_k^{(n-1)}(t) - C_n^2\widetilde{k}^{\,2l}u_k^{(n-2)}(t) + \dots + (-1)^n\widetilde{k}^{\,nl}u_k(t)$$

та рівностей (32) випливають оцінки

$$\exp\big(-2t\widetilde{k}^{\,l}\big)\big|\widetilde{k}^{\,(n-j)l}u_k^{(j)}(t)\big|^2 \le$$
$$le C_4\sum_{\alpha=0}^{n-1}\big|\widetilde{k}^{\,(2n-\alpha-1)l}\widehat{\varphi}_\alpha(k)\big|^2, \quad C_4>0, \qquad j=0,1,\dots,n, \tag{33}$$

та (для досить великих значень $h\widetilde{k}^{\,l}$, де h — фіксоване додатне число)

$$\exp\big(-2h\widetilde{k}^{\,l}\big)\big|\widetilde{k}^{\,(n-j)l}u_k^{(j)}(h)\big|^2 \ge$$
$$\ge C_5\big|\widetilde{k}^{\,(2n-\alpha-1)l}\widehat{\varphi}_\alpha(k)\big|^2, \quad C_5>0, \qquad j=0,1,\dots,n, \tag{34}$$

при $\widehat{\varphi}_\beta(k) = 0$ для всіх $\beta \neq \alpha$. Із нерівностей (33), (34) встановлюємо умови належності розв'язку задачі (27), (28) до простору $\mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$: $\varphi_\alpha \in \mathbf{H}_{(2n-\alpha-1)l}(\Omega^p_{2\pi})$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n-1$, а також нерівності для норм

$$\|u; \mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)\|^2 \leq C_6 \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j; \mathbf{H}_{(2n-j-1)l}(\Omega^p_{2\pi})\|^2, \ C_6 > 0.$$

Оцінки (33) справедливі також для розв'язку задачі Коші для довільного диференціального рівняння порядку n, яке розв'язане щодо старшої похідної за t [1, с. 77]. Тому задача (27), (28) має найгірші властивості щодо гладкості функцій φ_0, φ_1, $\ldots$, φ_{n-1}, а задача (26), (28) — найкращі властивості, оскільки, якщо її розв'язок $u \in \mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$, то $u(0,\cdot) \in \mathbf{H}_{nl}(\Omega^p_{2\pi})$, $D_t u(0,\cdot) \in \mathbf{H}_{(n-1)l}(\Omega^p_{2\pi})$, $\ldots$, $D_t^{n-1} u(0,\cdot) \in \mathbf{H}_l(\Omega^p_{2\pi})$.

За допомогою метричного підходу встановимо на функції φ_0, φ_1, $\ldots$, φ_{n-1} умови гладкості, для яких задача Коші з умовами (28) для „майже всіх" рівнянь вигляду

$$D_t^n u + \sum_{j=1}^{n} a_j(D) D_t^{n-j} u = 0 \tag{35}$$

має розв'язок із простору $u \in \mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$, де $a_j(D) = \sum\limits_{|s| \leq jl} a_{js} D^s$, $a_{js} \in \mathbb{C}$, $|a_{js}| \leq B$, число Λ як і раніше, таке, що $\Lambda \geq \mathrm{Re}\, \lambda_j(k)$ при $k \in \mathbb{Z}^p \setminus S$, $S \subset \mathbb{Z}^p$ — скінченна множина, числа $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, впорядковані нерівностями $\mathrm{Re}\, \lambda_1(k) \geq \cdots \geq \mathrm{Re}\, \lambda_n(k)$, є коренями рівняння $\lambda^n + \widetilde{a}_1(k)\lambda^{n-1} + \cdots + \widetilde{a}_n(k) = 0$, $\widetilde{a}_j(k) = a_j(k)/\widetilde{k}^{\,jl}$, $j = 1, \ldots, n$.

Якщо $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком задачі

$$\begin{gathered} u_k^{(n)}(t) + \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_j(k) u_k^{(n-j)}(t) = 0, \quad u_k(0) = \widehat{\varphi}_0(k), \\ u_k'(0) = \widehat{\varphi}_1(k), \ldots, \ u_k^{(n-1)}(0) = \widehat{\varphi}_{n-1}(k), \end{gathered} \tag{36}$$

то $u = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) e^{i(k,x)}$ — розв'язок задачі (35), (28).

Нехай $\lambda_j(k) \neq \lambda_\alpha(k)$ при $j \neq \alpha$, тоді розв'язок задачі (36) зображується формулою

$$u_k(t) = \left(\exp\left(\lambda_1(k)t\widetilde{k}^{\,l}\right) \quad \dots \quad \exp\left(\lambda_n(k)t\widetilde{k}^{\,l}\right)\right) \times$$
$$\times \left(W\left(\lambda_1(k)\widetilde{k}^{\,l}\right) \quad \dots \quad W\left(\lambda_n(k)\widetilde{k}^{\,l}\right)\right)^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k) \\ \dots \\ \widehat{\varphi}_{n-1}(k) \end{pmatrix}.$$

Звідси отримуємо такі рівності:

$$\widetilde{k}^{\,(n-j)l} u_k^{(j)}(t) =$$
$$= \left(\lambda_1^j(k)\exp\left(\lambda_1(k)t\widetilde{k}^{\,l}\right) \quad \dots \quad \lambda_n^j(k)\exp\left(\lambda_n(k)t\widetilde{k}^{\,l}\right)\right) \times$$
$$\times \left(W(\lambda_1(k)) \quad \dots \quad W(\lambda_n(k))\right)^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{k}^{\,nl}\widehat{\varphi}_0(k) \\ \widetilde{k}^{\,(n-1)l}\widehat{\varphi}_1(k) \\ \dots \\ \widetilde{k}^{\,l}\widehat{\varphi}_{n-1}(k) \end{pmatrix},$$
$$j = 0, 1, \dots, n. \tag{37}$$

Оскільки для визначника Вандермонда $\left(W(\lambda_1(k)) \quad ... \quad W(\lambda_n(k))\right)$ справджується формула [5]

$$\left(W(\lambda_1(k)) \quad \dots \quad W(\lambda_n(k))\right)^{-1} =$$
$$= \left(\mathrm{d}iag\ \left(f_k'(\lambda_1(k)), \dots, f_k'(\lambda_n(k))\right)\right)^{-1} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} W^T(\lambda_1(k)) \\ \dots \\ W^T(\lambda_n(k)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{n-1}(k) & \widetilde{a}_{n-2}(k) & \dots & \widetilde{a}_1(k) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \widetilde{a}_1(k) & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix},$$

де $f_k'(\lambda_j(k)) = \prod\limits_{\alpha=1,\alpha\neq j}^{n} \left(\lambda_j(k) - \lambda_\alpha(k)\right)$, то із формул (37) випливає

$$\widetilde{k}^{\,(n-j)l} u_k(t) = \left(\frac{\lambda_1^j(k)\exp\left(\lambda_1(k)t\widetilde{k}^{\,l}\right)}{f_k'(\lambda_1(k))} \quad ... \quad \frac{\lambda_n^j(k)\exp\left(\lambda_n(k)t\widetilde{k}^{\,l}\right)}{f_k'(\lambda_n(k))}\right) \times$$
$$\times \begin{pmatrix} W^T(\lambda_1(k)) \\ \dots \\ W^T(\lambda_n(k)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{n-1}(k) & \widetilde{a}_{n-2}(k) & ... & \widetilde{a}_1(k) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \widetilde{a}_1(k) & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \widetilde{k}^{\,nl}\widehat{\varphi}_0(k) \\ \widetilde{k}^{\,(n-1)l}\widehat{\varphi}_1(k) \\ \dots \\ \widetilde{k}^{\,l}\widehat{\varphi}_{n-1}(k) \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \tag{38}$$

Нехай $D(k) = \prod\limits_{1\le\alpha<\beta\le n} \big(\lambda_\alpha(k) - \lambda_\beta(k)\big)^2$ — дискримінант [6, с. 34] многочлена $f_k(\lambda)$, тоді

$$\big(f'_k(\lambda_j(k))\big)^{-2} = \prod_{1\le\alpha<\beta\le n, \alpha\ne j} \big(\lambda_\alpha(k) - \lambda_\beta(k)\big)^2 / D(k).$$

Із обмеженості (стосовно $k \in \mathbb{Z}^p$) чисел $\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k), \widetilde{a}_1(k), \dots, \widetilde{a}_{n-1}(k)$, на основі рівностей (38) отримаємо оцінки

$$\begin{aligned} &\exp\big(-2\Lambda t\widetilde{k}^{\,l}\big)\big|\widetilde{k}^{\,(n-j)l} u_k^{(j)}(t)\big|^2 \le \\ &\le \tfrac{C_7}{|D(k)|} \textstyle\sum_{\alpha=0}^{n-1} \big|\widetilde{k}^{\,(n-\alpha)l}\widetilde{\varphi}_\alpha(k)\big|^2, \qquad k \in \mathbb{Z}^p \setminus S, \end{aligned} \tag{39}$$

де $C_7 > 0$ — деяка стала.

Зауважимо, що для рівнянь (26) та (27) дискримінант $D(k)$ не залежить від $k \in \mathbb{Z}^p$, причому $|D(k)| = \prod\limits_{1\le\alpha<\beta\le n} |\eta_\alpha - \eta_\beta|^2 = n^n$ у випадку рівняння (26) і $D(k) = 0$ у випадку рівняння (27).

Позначимо $b = (b_1, \dots, b_p) \in \mathcal{O}^p$ вектор, складений із коефіцієнтів b_j при похідних D_j^{nl}, $j = 1, \dots, p$, у диференціальному виразі $a_n(D)$, тобто $a_n(D) = b_1 D_1^{nl} + \dots + b_p D_p^{nl} + \cdots$, де три крапки означають доданки, що не залежать від $b_1, \dots, b_p$. Таким чином вільний член $\widetilde{a}_n(k)$ многочлена $f_k(\lambda)$ має вигляд $\widetilde{a}_n(k) = b_1(k_1/\widetilde{k})^{nl} + \dots + b_p(k_p/\widetilde{k})^{nl} + \check{a}_n(k)$, де многочлен $\check{a}_n(k)$ не залежить від змінних $b_1, \dots, b_p$.

Лема 1. *Нехай $0 < \varepsilon < 1$, $r > p$ і всі коефіцієнти рівняння* (35)*, за винятком коефіцієнтів $b_1, \dots, b_p$, фіксовані. Тоді для всіх векторів $b \in \mathcal{O}^p \setminus W_\varepsilon$, де міра множини W_ε, $W_\varepsilon \subset \mathcal{O}^p$, задовольняє нерівність mes $W_\varepsilon \le \varepsilon$, справджується оцінка*

$$|D(k)| \ge \varepsilon^{(n-1)/2} C_8 \widetilde{k}^{\,(1-n)r/2}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}, \tag{40}$$

де додатна стала C_8 не залежить від k та від коефіцієнтів рівняння (35) *і визначається формулою*

$$C_8 = n^n\Big(\pi^p(p+1)^{nl} \sum_{k\ne 0} \widetilde{k}^{\,-r}\Big)^{(1-n)/2}.$$

Доведення. Нехай $W_\varepsilon(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$, — множина векторів $b \in \mathcal{O}^p$, для яких при фіксованому k виконується протилежна до (40) оцінка

$$|D(k)| \geq \varepsilon^{(n-1)/2} C_8 \widetilde{k}^{\,(1-n)r/2}. \tag{41}$$

Із формули для дискримінанта $D(k)$, яка пов'язує корені і коефіцієнти многочлена $f_k(\lambda)$, а саме

$$D(k) = \det col\,\Big(\big(\widetilde{a}_{j-i}(k)\big)_{\substack{i=1,\dots,n-1\\ j=1,\dots,2n-1}}, \big((n-j+i)\widetilde{a}_{j-i}(k)\big)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,2n-1,}}\Big),$$

де $\widetilde{a}_j(k) = 0$ при $j < 0$ та при $j > n$, виділимо доданок із максимальним степенем коефіцієнта $\widetilde{a}_n(k)$, а саме

$$D(k) = n^n \widetilde{a}_n^{\,n-1}(k) + \cdots .$$

Нехай $k \in K_j$, де $1 \leq j \leq p$, тоді

$$|D(k)| = n^n \big(|k_j|/\widetilde{k}\,\big)^{(n-1)nl} |b_j^{n-1} + Q_k(b_j)|,$$

де $Q_k(b_j)$ є многочленом степеня не вище $n-2$ змінної b_j із коефіцієнтами, що залежать від вектора k та від змінних $b_1, \dots, b_{j-1}$, $b_{j+1}, \dots, b_p$. За лемою А. Картана [7, с. 267] міра множини $W'_\varepsilon(k)$ тих $b \in \mathcal{O}$, для яких виконується нерівність (41) при фіксованому векторі $(b_1, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_p) \in \mathcal{O}^{p-1}$, справджує оцінку

$$\mathrm{m}es\; W'_\varepsilon(k) \leq \varepsilon\pi C_8^{2/(n-1)} \widetilde{k}^{\,-r} n^{2n/(1-n)} (\widetilde{k}\,/|k_j|)^{2nl} \leq$$

$$\leq \varepsilon\pi C_8^{2/(n-1)} n^{2n/(1-n)} (p+1)^{nl} \widetilde{k}^{\,-r}.$$

Після інтегрування за змінними $b_1, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_p$ по області $\mathcal{O}^{p-1}$ маємо

$$\mathrm{m}es\; W_\varepsilon(k) \leq \varepsilon\pi^p C_8^{2/(n-1)} n^{2n/(1-n)} (p+1)^{nl} \widetilde{k}^{\,-r}.$$

Якщо $W_\varepsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} W_\varepsilon(k)$, то для кожного вектора $b \in W_\varepsilon$ хоча б для одного вектора $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ виконується нерівність (41); для всіх векторів $b \in \mathcal{O}^p \setminus W_\varepsilon$, справджується нерівність (40). Оскільки $\mathrm{m}es\; W_\varepsilon = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \mathrm{m}es\; W_\varepsilon(k)$, то, враховуючи вибір сталої C_8, маємо $\mathrm{m}es\; W_\varepsilon \leq \varepsilon$. Лему доведено.

Теорема 1. *Нехай* $0 < \varepsilon < 1$, $r > p$ *та* $\varphi_\alpha \in \mathbf{H}_{(n-\alpha)l+(n-1)r/4}(\Omega_{2\pi}^p)$, *де* $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$. *Тоді для всіх векторів* $b \in \mathcal{O}^p \setminus W_\varepsilon$, *де* *mes* $W_\varepsilon \le \varepsilon$, *існує розв'язок* $u{=}u(t,x)$ *задачі* (35), (28) *із простору* $\mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)$ *і справджується оцінка*

$$\|u;\mathbf{E}^n_{-\Lambda,l}(\mathcal{D}^p)\|^2 \le \bigl(C_9\varepsilon^{-(n-1)/2}+C_{10}\bigr)\sum_{\alpha=0}^{n-1}\|\varphi_\alpha;\mathbf{H}_{(n-\alpha)l+(n-1)r/4}(\Omega^p_{2\pi})\|^2,$$

де стала $C_9 = C_9(n,m,p,r,B)$ *не залежить від вектора* b, $C_{10} = C_{10}(n,B,b)$.

Доведення. Підставивши нерівність (40) в оцінку (39), отримуємо

$$\exp(-\Lambda t\widetilde{k}^{\,l})|\widetilde{k}^{\,(n-j)l}u_k^{(j)}(t)|^2 \le$$

$$\le C_7C_8^{-1}\varepsilon^{-(n-1)/2}\textstyle\sum_{\alpha=0}^{n-1}\bigl|\widetilde{k}^{\,(n-\alpha)l+(n-1)r/4}\widehat{\varphi}_\alpha(k)\bigr|^2, \qquad k\in\mathbb{Z}^p\setminus S.$$

Підсумовуючи по векторах $k\in\mathbb{Z}^p$ з урахуванням скінченності множини S, отримуємо шукану нерівність. Теорему доведено.

5. Висновки.

Встановлено умови розв'язності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами у просторах 2π-періодичних за змінною x функцій. Питання існування розв'язку пов'язано з проблемою малих знаменників — дискримінантів $D(k)$. Відмінність малих знаменників у задачі Коші від малих знаменників у багатьох крайових задачах полягає в тому, що вони обертаються в нуль разом із відповідними чисельниками дробів і тому ці дроби завжди мають оцінку зверху.

Використання метричного підходу до оцінки малих знаменників дозволяє покращити вказані оцінки та встановити вищу гладкість розв'язку для майже всіх диференціальних рівнянь. Гладкість розв'язку підвищується (чи послаблюються умови на праві частини задачі), якщо кількість просторових змінних p та зведений порядок рівняння l задовольняють нерівність $p/l < 4$. Коли кількість просторових змінних в чотири або більше разів перевищує зведений порядок рівняння, то використання метричного підходу не дає підвищення гладкості розв'язку, яка в цьому випадку не залежить від кількості просторових змінних.

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – Вып. 3. – 274 с.

2. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук.думка, 1984. – 264 с.
3. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
4. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
5. *Илькив В. С.* Компактное обращение обобщенной матрицы Вандермонда. – Деп. в НИИЭИР. Сб. реф. деп. рук. ВИМИ, 1991. – Вып. 5, № 3-8836. – 10 с.
6. *Прасолов В. В.* Многочлены. – М.: МЦНМО, 2001. – 336 с.
7. *Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.

вул. Університетська 1,
ЛНУ ім. І.Франка,
79000,Львів,Україна
ilkivv@polynet.lviv.ua

Отримано 22.02.07