©2008. **А.А. Илькив, Н.Д. Копачевский**

ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, ПОРОЖДЕННАЯ ПРОБЛЕМОЙ ВЫТЕКАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ СОСУДА

В работе изучается задача, порожденная проблемой вытекания идеальной жидкости из сосуда. Исследуется проблема существования сильного решения соответствующей начально-краевой задачи математической физики. Доказана теорема о сильной разрешимости эволюционного операторного уравнения, связанного с задачей, а также теорема о разрешимости исходной проблемы.

Ключевые слова: гидродинамическая система, идеальная жидкость, гильбертово пространство, операторный подход, дифференциальное уравнение в гильбертовом пространстве, сильное решение
MSC (2000): 34B60, 34K30, 76D03, 76E06

Введение.

При исследовании задач о малых движениях идеальной жидкости в ограниченной области широкое применение находят методы функционального анализа, в частности, методы теории линейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве, теории линейных самосопряженных операторов и другие.

В данной работе эти методы применены к изучению задачи математической физики, порожденной проблемой вытекания идеальной жидкости из сосуда. На одном из отверстий, названным отверстием слива, ставится граничное условие, полученное из эксперимента и связывающее давление и нормальную компоненту поля скорости.

Выясняется, что наличие такого условия видоизменяет тип эволюционного уравнения, описывающего динамику жидкости. В частности, гиперболическая задача становится гиперболо-параболической и сводится к сжимающей полугруппе операторов. Это позволяет доказать теорему о существовании и единственности сильного решения задачи Коши для эволюционного уравнения в соответствующем гильбертовом пространстве, а на ее основе - теорему существования и единственности решения исходной начально-краевой задачи.

1. Постановка задачи.

Пусть идеальная тяжелая несжимаемая жидкость находится в неподвижном сосуде $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей $\partial\Omega$. Эта граница состоит из трех частей: твердой стенки S, свободной поверхности жидкости Γ_0 и расположенной на одном уровне с Γ_0 поверхности Γ_1, которую условно назовем отверстием для слива жидкости.

В состоянии покоя на жидкость действует однородное гравитационное поле. Выберем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, чтобы уравнения свободной поверхности Γ_0, а также поверхности Γ_1 имели вид $x_3 = 0$, т.е. были перпендикулярны вектору ускорения гравитационного поля $\vec{g} = -g\vec{e_3}$, где $\vec{e_i} \quad (i = 1, 2, 3)$ — орт оси Ox_i.

В состоянии покоя равновесное давление $P_0(x_3)$, как хорошо известно, изменяется по закону

$$P_0(x_3) = p_a - \rho g x_3,$$

где p_a — внешнее постоянное давление, а $\rho > 0$ — постоянная плотность жидкости.

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Пусть $\vec{u} = \vec{u}(t, x) \quad (x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega)$ — поле скорости жидкости, $p = p(t, x)$ — динамическое давление, т.е. отклонение полного давления от равновесного, $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$. Будем считать, что отклонение по нормали $\vec{n} = \vec{e}_3$ движущейся свободной поверхности $\Gamma := \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ описывается функцией

$$x_3 = \zeta(t, x), \quad x = (x_1, x_2, 0) \in \Gamma, \quad \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset.$$

Тогда полная формулировка предлагаемой к исследованию задачи о малых движениях идеальной жидкости в сосуде Ω имеет следующий вид (см., например, [1, с. 122–140], а также [2]):

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = -\nabla p + \rho\vec{f}, \qquad \mathrm{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \ \Omega), \tag{1.1}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{n} =: u_n = 0 \quad (\text{на } \ S), \qquad \int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = u_n \quad (\text{на } \ \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1), \tag{1.3}$$

$$p = \rho g\zeta \quad (\text{на } \ \Gamma_0), \tag{1.4}$$

$$p = \gamma u_n \quad (\text{на } \Gamma_1),\ \gamma > 0, \tag{1.5}$$

$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x),\ x \in \Omega;\ \zeta(0,x_1,x_2) = \zeta^0(x_1,x_2),\ (x_1,x_2) \in \Gamma. \tag{1.6}$$

Здесь $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних массовых сил, $\gamma > 0$ — экспериментальная константа.

Заметим, что задача (1.1) – (1.6) описывает не процесс вытекания жидкости из сосуда, а ее малые движения относительно состояния покоя. При этом граничные условия (1.2) – (1.4) — это обычные кинематические и динамические краевые условия на свободной поверхности жидкости Γ_0, а граничное условие (1.5) взято из эксперимента. Последнее обстоятельство привносит дополнительные трудности в исследование задачи (1.1) – (1.6). При этом возникает пока еще мало изученный класс линейных дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве, и рассмотрение соответствующей задачи Коши для такого уравнения требует адекватных методов исследования.

Дадим некоторые дополнительные пояснения, связанные с задачей (1.1) – (1.6). Прежде всего, граница $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ названа выше отверстием для слива, и на ней ставится условие (1.5). Реальная задача вытекания возникает, если отверстие для слива расположено ниже свободной горизонтальной поверхности Γ_0. Если же они расположены на одном уровне, то возникает задача не о сливе, а о малых колебаниях жидкости около состояния покоя. При этом на Γ_1 обеспечивается граничное условие (1.5), которое принято в данной проблеме на основе анализа экспериментов, связанных с вытеканием жидкости из сосуда. В этих экспериментах выяснилось, что динамическое давление p на Γ_1, т.е. добавка к статическому давлению, пропорционально скорости вдоль внешней нормали к Γ_1 для вытекающей жидкости. Соответствующий коэффициент пропорциональности обозначен константой $\gamma > 0$. О том, что условие на сливе можно брать в форме (1.5), авторы узнали от А.Н. Темнова (Московский технический университет им. Баумана). По указанной причине задача (1.1) – (1.6) в данной работе названа задачей, порожденной проблемой вытекания идеальной жидкости из сосуда. Можно ее формально считать задачей математической физики с соответствующими начальными и динамическими граничными условиями.

В данной работе выяснено, что учет граничного условия (1.5) в конечном итоге приводит к эволюционной проблеме (6.3) для полного дифференциального уравнения второго порядка с операторным коэффициентом при старшей производной, который имеет неограниченный обратный оператор. Это потребовало нового подхода, основанного на преобразованиях, описанных в п. 6.

Особенностью проблемы (1.1) – (1.6) является и то обстоятельство, что после некоторых преобразований (проектировании векторных уравнений на подпространства и т.д.) возникает задача о нахождении решений эллиптического уравнения (уравнения Лапласа) с динамическими граничными условиями, т.е. содержащими производные по времени t, см. (4.4), (4.5).

2. Вспомогательные сведения.

Начально-краевую задачу (1.1) – (1.6) будем далее исследовать методами функционального анализа, в частности, методами теории дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве.

С этой целью введем необходимые для дальнейшего функциональные (гильбертовы) пространства. Обозначим через $L_2(\Gamma)$ гильбертово пространство комплекснозначных скалярных функций $\{\zeta(x)\}$ с нормой

$$\|\zeta\|_0^2 := \int_\Gamma |\zeta|^2 \, d\Gamma \tag{2.1}$$

и соответствующим скалярным произведением. Будем считать, что при фиксированном t функция отклонения свободной поверхности $\zeta(t,x)$ (см. (1.2) – (1.4)) принадлежит $L_2(\Gamma)$. Тогда, учитывая второе условие (1.2), т.е. условие сохранения объема жидкости при колебаниях, приходим к выводу, что

$$\zeta(t,x) \in \mathcal{H} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}, \quad \forall t \geqslant 0, \tag{2.2}$$

где $1_\Gamma = (1_{\Gamma_0}; 1_{\Gamma_1})$ — единичная функция, заданная на $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Соответственно для искомой функции $\vec{u}(t,x)$ будем считать, что она при фиксированном t является элементом гильбертова пространства $\vec{L}_2(\Omega)$ комплекснозначных вектор-функций с нормой

$$\|\vec{u}\|^2 := \int_\Omega |\vec{u}|^2 \, d\Omega. \tag{2.3}$$

Как известно (см., например, [1, с. 106]), пространство $\vec{L}_2(\Omega)$ допускает ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega), \tag{2.4}$$

$$\vec{J}_0(\Omega) := \Big\{ \vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega) : \operatorname{div} \vec{w} = 0 \text{ в } \Omega,\ \vec{w} \cdot \vec{n} =: w_n = 0 \text{ на } \partial\Omega) \Big\}, \qquad (2.5)$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) := \Big\{ \nabla \varkappa \in \vec{L}_2(\Omega) :\ \varkappa = 0 \text{ (на } \Gamma) \Big\}, \qquad (2.6)$$

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega) := \Big\{ \nabla \Phi \in \vec{L}_2(\Omega) :\ \Delta \Phi = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ (на } S), \quad \int\limits_{\Gamma} \Phi \, d\Gamma = 0 \Big\}, \qquad (2.7)$$

где операции $\operatorname{div} w$ и $w_n = \vec{w} \cdot \vec{n}$ для элементов из $\vec{L}_2(\Omega)$ понимаются в смысле теории обобщенных функций (распределений), см. [1, с. 101–102].

Разложение (2.4) ниже будет использовано для перехода от задачи (1.1) – (1.6) к задаче Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве.

3. Метод ортогонального проектирования.

Опираясь на ортогональное разложение (2.4) – (2.7), представим искомые функции $\vec{u}(t,x)$, $\nabla p(t,x)$ задачи (1.1) – (1.6) в виде

$$\vec{u} = \vec{w} + \nabla \varphi, \quad \vec{w} \in \vec{J}_0(\Omega), \quad \nabla \varphi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega), \qquad (3.1)$$

$$\nabla p = \nabla \psi + \nabla \varkappa, \quad \nabla \psi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega), \quad \nabla \varkappa \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \qquad (3.2)$$

и подставим эти выражения в первое уравнение (1.1). Далее, обозначим через P_0, $P_{0,\Gamma}$, $P_{h,S}$ ортопроекторы на подпространства (2.5) – (2.7); в силу (2.4) имеем $P_0 + P_{0,\Gamma} + P_{h,S} = I$, где I — единичный оператор в $\vec{L}_2(\Omega)$.

Применяя к обеим частям первого уравнения (1.1) ортопроекторы P_0, $P_{0,\Gamma}$, $P_{h,S}$ соответственно, взамен (1.1) будем иметь следующие три задачи:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = P_0 \vec{f}, \quad \vec{w}(0,x) = P_0 \vec{u}^0; \qquad (3.3)$$

$$\vec{0} = -\nabla \varkappa + \rho P_{0,\Gamma} \vec{f}; \qquad (3.4)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi = -\nabla \psi + \rho P_{h,S} \vec{f}, \qquad (3.5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \ \text{(на } S\,), \quad \int_{\Gamma} \zeta \, d\Gamma = 0, \qquad (3.6)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \ \text{(на } \Gamma\,), \qquad (3.7)$$

$$\psi = \rho g \zeta \ \ (\text{на } \Gamma_0), \quad \psi = \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \ \ (\text{на } \Gamma_1), \tag{3.8}$$

$$\nabla\varphi(0,x) = P_{h,S}\vec{u}^0(x) \quad (x \in \Omega), \quad \zeta(0,x) = \zeta^0(x) \quad (x \in \Gamma). \tag{3.9}$$

Здесь $\vec{w}(t)$, $\nabla\varkappa(t)$ и $\nabla\varphi(t)$ — искомые функции переменной t со значениями в пространствах $\vec{J}_0(\Omega)$, $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ и $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$ соответственно. В связи с этим далее в обозначениях частные производные по t заменены на обыкновенные.

Из (3.3) сразу получаем

$$\vec{w}(t,x) = P_0\vec{u}^0 + \int_0^t P_0\vec{f}(\tau,x)d\tau. \tag{3.10}$$

Таким образом, исходная задача (1.1) – (1.6) распалась на два тривиальных соотношения (3.4) и (3.10) для $\nabla\varkappa(t)$ и $\vec{w}(t)$ и нетривиальную проблему (3.5) – (3.9), которую и будем далее исследовать. Здесь искомыми являются функции $\nabla\varphi(t)$, $\nabla\psi(t)$ со значениями в $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$ и $\zeta(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$.

4. Переход к потенциалу смещений.

Для дальнейшего исследования задачи (3.5) – (3.9) введем потенциал смещений $\Phi = \Phi(t,x)$ посредством соотношений

$$\varphi := \frac{d\Phi}{dt}, \quad \nabla\Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega). \tag{4.1}$$

Тогда из (3.5) следует, что

$$\nabla\left(\rho\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \psi - \rho F\right) = 0, \quad \nabla F := P_{h,S}\vec{f}. \tag{4.2}$$

Отсюда приходим к интегралу Коши–Лагранжа

$$\rho\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \psi - \rho F = c(t), \quad x \in \Omega, \tag{4.3}$$

с произвольной функцией $c(t)$.

Запишем соотношение (4.3) в точках $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ и воспользуемся граничными условиями (3.8); получим

$$\rho\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \rho g\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \rho F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma_0), \tag{4.4}$$

$$\rho\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \gamma\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \rho F + c(t) \quad (\text{на } \Gamma_1). \tag{4.5}$$

Так как $\nabla\Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$, то (см. (2.7))

$$\Delta\Phi = 0 \text{ (в } \Omega \text{)}, \ \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \text{ (на } S \text{)}, \ \int_\Gamma \frac{\partial\Phi}{\partial n} d\Gamma = 0, \ \int_\Gamma \Phi \, d\Gamma = 0. \quad (4.6)$$

Итак, возникла задача об отыскании лишь одной искомой функции — потенциала смещений Φ — из краевых условий и уравнений (4.4) – (4.6), а также начальных условий, которые взамен (3.9) удобно записать в равносильном виде

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial\Phi}{\partial n}(0,x) = \zeta^0(x), \\ \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{\partial\Phi}{\partial n}\right)(0,x) = \tfrac{\partial}{\partial n}\left(P_{h,S}\vec{u}^0(x)\right) =: \zeta^1(x), \ x \in \Gamma. \end{gathered} \quad (4.7)$$

5. Основное гильбертово пространство и его подпространства.

Напомним, что для поля смещений $\nabla\Phi$ имеем (см. (2.2))

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_\Gamma = \zeta \in \mathcal{H}. \quad (5.1)$$

Поэтому

$$\int_\Gamma \zeta \, d\Gamma = \int_{\Gamma_0} \zeta \, d\Gamma_0 + \int_{\Gamma_1} \zeta \, d\Gamma_1 = 0. \quad (5.2)$$

Будем рассматривать функцию $\zeta = \dfrac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_\Gamma$ отклонений подвижной поверхности Γ от ее равновесного (горизонтального) положения в виде пары

$$\zeta = (\zeta_0; \zeta_1), \quad \zeta_0 := \zeta\Big|_{\Gamma_0}, \quad \zeta_1 := \zeta\Big|_{\Gamma_1}, \quad (5.3)$$

где ζ_0 и ζ_1 заданы на Γ_0 и Γ_1 соответственно.

Введем подпространства $\mathcal{H}_i$, $i = 0, 1$, пространства $\mathcal{H}$ следующим образом:

$$\mathcal{H}_0 := \{u_0 := (\zeta_0; 0) : \ \zeta_0 \in L_2(\Gamma_0) \ominus \{1_{\Gamma_0}\}\}, \quad (5.4)$$

$$\mathcal{H}_1 := \{u_1 := (0; \zeta_1) : \ \zeta_1 \in L_2(\Gamma_1) \ominus \{1_{\Gamma_1}\}\}. \quad (5.5)$$

Очевидно, подпространства $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ ортогональны относительно скалярного произведения в $\mathcal{H}$. Легко проверяется, что имеет место ортогональное разложение:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \widehat{\mathcal{H}}, \quad \dim \widehat{\mathcal{H}} = 1, \quad (5.6)$$

$$\widehat{\mathcal{H}} = \{\alpha \widehat{e}\}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \widehat{e} := (\beta_1; -\beta_0),$$
$$0 < \beta_i = \tfrac{|\Gamma_i|}{|\Gamma_0| + |\Gamma_1|} < 1, \quad \beta_0 + \beta_1 = 1. \tag{5.7}$$

Опираясь на это разложение, представим любой элемент $\zeta \in \mathcal{H}$ в виде

$$\zeta = (\zeta_0; \zeta_1) = u_0 + u_1 + \widehat{u}, \quad u_0 \in \mathcal{H}_0, \quad u_1 \in \mathcal{H}_1, \quad \widehat{u} \in \widehat{\mathcal{H}}, \tag{5.8}$$

$$u_0 = (\zeta_0 - \widetilde{\zeta}_0; 0), \quad u_1 = (0; \zeta_1 - \widetilde{\zeta}_1),$$
$$\widehat{u} = (\widetilde{\zeta}_0; \widetilde{\zeta}_1), \quad \widetilde{\zeta}_i := \tfrac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} \zeta_i \, d\Gamma_i, \ i = 0, 1. \tag{5.9}$$

Далее понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Задача Неймана*

$$\Delta\Phi = 0 \ (\ \textit{в}\ \Omega\ ), \quad \tfrac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$
$$(\ \textit{на}\ S\ ), \quad \tfrac{\partial\Phi}{\partial n} = \psi \ (\ \textit{на}\ \Gamma\ ), \quad \int\limits_{\Gamma} \Phi \, d\Gamma = 0, \tag{5.10}$$

имеет единственное решение $\nabla\Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда* $\psi \in (H_\Gamma^{1/2})^*$, $H_\Gamma^{1/2} := \big(H^{1/2}(\Gamma_0) \times H^{1/2}(\Gamma_1)\big) \cap \mathcal{H}$. *Если* ψ *— любой элемент из* $\mathcal{H}$, *то* $\nabla\Phi \in \mathcal{D}(\gamma_n)$, *т.е.*

$$\mathcal{D}(\gamma_n) = \left\{ \nabla\Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega) : \ \gamma_n \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial n}|_\Gamma \in \mathcal{H} \right\}. \tag{5.11}$$

При этом оператор нормального следа γ_n, *заданный на области определения* (5.11), *является замкнутым неограниченным оператором, действующим из* $\mathcal{D}(\gamma_n)$ *в* $\mathcal{H}$. *Его область определения плотна в* $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$.

Доказательство. Задача (5.10) подробно исследована в [1, с. 137–138]. При этом $\nabla\Phi = \gamma_n^{-1}\psi$, а γ_n^{-1} — оператор, ограниченно действующий из $\mathcal{H}$ в $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$. Отсюда и следует утверждение леммы. □

Дальнейший путь рассмотрения задачи (4.4) – (4.7) — это проектирование пары граничных соотношений (4.4), (4.5) на ортогональные подпространства (5.6), а также введение операторов вспомогательных краевых задач вида (5.10).

Опираясь на разложение (5.8), (5.9), рассмотрим следующие вспомогательные задачи Неймана.

Первая вспомогательная задача:

$$\Delta\Phi_0 = 0 \text{ (в } \Omega \text{)}, \quad \tfrac{\partial\Phi_0}{\partial n} = 0 \text{ (на } S \text{)},$$
$$\tfrac{\partial\Phi_0}{\partial n} = u_0 := (\zeta_0 - \widetilde{\zeta}_0; 0) \text{ (на } \Gamma \text{)}, \quad \textstyle\int_\Gamma \Phi_0 \, d\Gamma = 0; \tag{5.12}$$

вторая вспомогательная задача:

$$\Delta\Phi_1 = 0 \text{ (в } \Omega \text{)}, \quad \tfrac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \text{ (на } S \text{)},$$
$$\tfrac{\partial\Phi_1}{\partial n} = u_1 := (0; \zeta_1 - \widetilde{\zeta}_1) \text{ (на } \Gamma \text{)}, \quad \textstyle\int_\Gamma \Phi_1 \, d\Gamma = 0; \tag{5.13}$$

третья вспомогательная задача:

$$\Delta\widehat{\Phi} = 0 \text{ (в } \Omega \text{)}, \quad \tfrac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial n} = 0 \text{ (на } S \text{)},$$
$$\tfrac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial n} = \widehat{u} := (\widetilde{\zeta}_0; \widetilde{\zeta}_1) \text{ (на } \Gamma \text{)}, \quad \textstyle\int_\Gamma \widehat{\Phi} \, d\Gamma = 0. \tag{5.14}$$

Для каждой из этих задач выполнено достаточное условие разрешимости задачи Неймана и каждая из них имеет единственное решение (лемма 1).

Введем операторы T_0, T_1 и $\widehat{T}$, ставящие в соответствие элементам u_0, u_1 и $\widehat{u}$ из $\mathcal{H}$ решения задач (5.12) – (5.14):

$$\Phi_0 = \Phi_0\Big|_\Omega =: T_0 u_0, \quad T_0 : \ (H^{1/2}(\Gamma_0))^* =: H^{-1/2}(\Gamma_0) \longrightarrow H^1(\Omega);$$

$$\Phi_1 = \Phi_1\Big|_\Omega =: T_1 u_1, \quad T_1 : \ (H^{1/2}(\Gamma_1))^* =: H^{-1/2}(\Gamma_1) \longrightarrow H^1(\Omega);$$

$$\widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}\Big|_\Omega =: \widehat{T}\widehat{u}.$$

Тогда решение $\Phi = \Phi|_\Omega$ задачи (4.4) – (4.7) с учетом (5.8) и (5.1) можно представить в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \widehat{\Phi}. \tag{5.15}$$

Поэтому на Γ_0 и Γ_1 имеем:

$$\Phi|_{\Gamma_0} = \Phi_0 \,|_{\Gamma_0} + \Phi_1 \,|_{\Gamma_0} + \widehat{\Phi} \,|_{\Gamma_0} = \gamma_0 T_0 u_0 + \gamma_0 T_1 u_1 + \gamma_0 \widehat{T}\widehat{u}, \tag{5.16}$$

$$\Phi|_{\Gamma_1} = \Phi_0 \,|_{\Gamma_1} + \Phi_1 \,|_{\Gamma_1} + \widehat{\Phi} \,|_{\Gamma_1} = \gamma_1 T_0 u_0 + \gamma_1 T_1 u_1 + \gamma_1 \widehat{T}\widehat{u}, \tag{5.17}$$

где γ_i $(i = 0, 1)$ — соответствующие операторы следа.

Будем сопоставлять любому элементу $\zeta = (\zeta_0;\zeta_1) \in \mathcal{H}$ его проекции на подпространства (5.6), а этим проекциям — вектор-столбец, элементами которого являются указанные проекции. Очевидно, между элементами из $\mathcal{H}$ и вектор-столбцами будет изометрический изоморфизм.

Найдем проекции пары $(\Phi|_{\Gamma_0};\Phi|_{\Gamma_1}) \in \mathcal{H}$ на подпространства $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ и $\widehat{\mathcal{H}}$. Для этого введем соответствующие ортопроекторы $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$, $\widehat{\mathcal{P}}$, $\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 + \widehat{\mathcal{P}} = \mathcal{I}$. Тогда с учетом (5.16), (5.17) имеем

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{P}_0(\Phi\,|_{\Gamma_0};\Phi\,|_{\Gamma_1}) &= (\Phi\,|_{\Gamma_0} - (\widetilde{\Phi\,|_{\Gamma_0}});0) =: A_{00}u_0 + A_{01}u_1 + A_{02}\widehat{u},\\ \mathcal{P}_1(\Phi\,|_{\Gamma_0};\Phi\,|_{\Gamma_1}) &= (0;\Phi\,|_{\Gamma_1} - (\widetilde{\Phi\,|_{\Gamma_1}})) =: A_{10}u_0 + A_{11}u_1 + A_{12}\widehat{u},\\ \widehat{\mathcal{P}}(\Phi\,|_{\Gamma_0};\Phi\,|_{\Gamma_1}) &= ((\widetilde{\Phi\,|_{\Gamma_0}});(\widetilde{\Phi\,|_{\Gamma_1}})) =: A_{20}u_0 + A_{21}u_1 + A_{22}\widehat{u}.\end{aligned}\right\} \quad (5.18)$$

Значит, первым слагаемым в (4.4), (4.5), т.е. паре $\rho\dfrac{d^2}{dt^2}(\Phi|_{\Gamma_0};\Phi|_{\Gamma_1})$, отвечает вектор-столбец

$$\rho\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}A_{00} & A_{01} & A_{02}\\ A_{10} & A_{11} & A_{12}\\ A_{20} & A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\ u_1\\ \widehat{u}\end{pmatrix} = \rho\frac{d^2}{dt^2}(Au), \qquad (5.19)$$

$$A = \begin{pmatrix}A_{00} & A_{01} & A_{02}\\ A_{10} & A_{11} & A_{12}\\ A_{20} & A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix}u_0\\ u_1\\ \widehat{u}\end{pmatrix}. \qquad (5.20)$$

Соответственно паре $\rho(F|_{\Gamma_0};F|_{\Gamma_1}) \in \mathcal{H}$ отвечает вектор-столбец

$$\begin{gathered}\rho f := \rho\begin{pmatrix}f_0\\ f_1\\ \widehat{f}\end{pmatrix}, \quad f_0 = (F|_{\Gamma_0} - (\widetilde{F|_{\Gamma_0}});0),\\ f_1 = (0;F|_{\Gamma_1} - (\widetilde{F|_{\Gamma_1}})), \quad \widehat{f} = ((\widetilde{F|_{\Gamma_0}});(\widetilde{F|_{\Gamma_1}})).\end{gathered} \qquad (5.21)$$

Далее поступим следующим образом. Произвольную до сих пор функцию $c(t)$ представим в виде суммы $c_1(t)+c_2(t)$ и выберем $c_1(t)$ и $c_2(t)$ так, чтобы

$$\left(\rho g\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_0} - c_1(t);-c_1(t)) = (\rho g\zeta_0 - c_1(t);-c_1(t)\right) \in \mathcal{H}, \qquad (5.22)$$

$$(-c_2(t);-c_2(t)+\gamma\frac{d}{dt}(\frac{\partial\Phi}{\partial n})_{\Gamma_1}) = (-c_2(t);-c_2(t)+\gamma\frac{d}{dt}\zeta_1) \in \mathcal{H}. \quad (5.23)$$

Подсчет с учетом соотношения $\widetilde{\zeta}_0 \cdot |\Gamma_0| + \widetilde{\zeta}_1 \cdot |\Gamma_1| = 0$ показывает, что

$$c_1(t) = \rho g \beta_0 \widetilde{\zeta}_0, \quad c_2(t) = \gamma \beta_1 \frac{d\widetilde{\zeta}_1}{dt}, \tag{5.24}$$

и тогда пары (5.22) и (5.23) оказываются соответственно равными

$$\rho g u_0 + \rho g \beta_1 \widehat{u}; \quad \gamma \frac{du_1}{dt} + \gamma \beta_0 \frac{d\widehat{u}}{dt}. \tag{5.25}$$

Первому выражению здесь отвечает вектор-столбец

$$\rho g \begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \\ \beta_1 \widehat{u} \end{pmatrix} = \rho g \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \widehat{u} \end{pmatrix} =: \rho g B_0 u, \tag{5.26}$$

а второму —

$$\gamma \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ \beta_0 \widehat{u} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \beta_0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \widehat{u} \end{pmatrix} =: \gamma B_1 \frac{du}{dt}. \tag{5.27}$$

6. Переход к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве.

Учитывая введенные обозначения и операторы (см. (5.19) – (5.27)), перепишем задачу (4.4) – (4.7) в операторной форме

$$\rho \frac{d^2}{dt^2}(Au) + \gamma B_1 \frac{du}{dt} + \rho g B_0 u = \rho f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{6.1}$$

где u^0 — вектор, отвечающий ζ^0 из (4.7), u^1 — аналогичный вектор для ζ^1, $u(t)$ — искомый вектор-столбец со значениями в $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \widehat{\mathcal{H}}$, а $f(t)$ — заданная функция со значениями в $\mathcal{H}$.

Далее для простоты положим $\gamma/\rho = g = 1$, что равносильно переобозначениям

$$\rho A \longmapsto A, \quad \gamma B_1 \longmapsto B_1, \quad \rho g B_0 \longmapsto B_0, \quad \rho f \longmapsto f. \tag{6.2}$$

Итак, будем рассматривать задачу Коши

$$\frac{d^2}{dt^2}(Au) + B_1 \frac{du}{dt} + B_0 u = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \tag{6.3}$$

Опишем кратко свойства операторных коэффициентов уравнения (6.3). Из (5.26) и (5.27) следует, что B_0 и B_1 ограничены в $\mathcal{H}$ и

$$B_0 \geqslant 0, \quad B_1 \geqslant 0, \quad B_0 + B_1 \gg 0. \tag{6.4}$$

Далее, для коэффициента A имеют место свойства

$$0 < A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}). \tag{6.5}$$

Доказательство этих свойств для операторной матрицы A (см. (5.20)) проводится по тому же плану, что и соответствующее утверждение в [1, с. 137–138], и потому здесь не приводится.

Преобразуем задачу (6.3), приведя ее к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка. С этой целью проведем следующие формальные преобразования.

Введем в (6.3) новую искомую функцию $v(t)$ при помощи соотношений

$$-iB_0^{1/2}u =: \frac{dv}{dt}, \quad v(0) = 0. \tag{6.6}$$

После дифференцирования имеем

$$\frac{d^2v}{dt^2} + iB_0^{1/2}\frac{du}{dt} = 0, \quad v'(0) = -iB_0^{1/2}u^0. \tag{6.7}$$

Теперь соотношения (6.3) и (6.7) можно записать в виде системы

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tfrac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & iB_0^{1/2} \\ iB_0^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \tfrac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ -iB_0^{1/2}u^0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{6.8}$$

(Здесь оператор A для простоты вынесен за знак d^2/dt^2, этот шаг оправдан апостериори).

Введем следующие замены переменных и обозначения:

$$y(t) := \left(\frac{du}{dt}; \frac{dv}{dt}\right)^t, \quad f_0(t) := (f(t); 0)^t, \tag{6.9}$$

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_0 := \begin{pmatrix} B_1 & iB_0^{1/2} \\ iB_0^{1/2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

Тогда (6.8) переходит в задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка в пространстве $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$:

$$\mathcal{A}\frac{dy}{dt} + \mathcal{B}_0 y = f_0(t), \quad y(0) = y^0 := (u^1; -iB_0 u^0)^t. \tag{6.11}$$

Особенностью уравнения (6.11) является тот факт, что оператор $\mathcal{A}$ имеет неограниченный обратный. Однако выясняется, что задачу (6.11) можно преобразовать к стандартному виду. С этой целью осуществим в (6.11) следующую замену

$$y(t) = e^{at} z(t), \quad a > 0. \tag{6.12}$$

Тогда вместо (6.11) возникает задача Коши

$$\mathcal{A}\frac{dz}{dt} + \mathcal{B}_a z = f_a(t) := e^{-at} f_0(t), \quad z(0) = y^0, \tag{6.13}$$

$$\mathcal{B}_a = \mathcal{B}_0 + a\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 + aA & iB_0^{1/2} \\ & \\ iB_0^{1/2} & aI \end{pmatrix}, \quad a > 0. \tag{6.14}$$

Лемма 2. *При любом $a > 0$ оператор $\mathcal{B}_a$ обратим и обратный имеет вид*

$$\mathcal{B}_a{}^{-1} = \begin{pmatrix} B_a^{-1} & -ia^{-1} B_a^{-1} B_0^{1/2} \\ & \\ -ia^{-1} B_0^{1/2} B_a^{-1} & a^{-1}(I - a^{-1} B_0 B_a^{-1} B_0^{1/2}) \end{pmatrix}, \tag{6.15}$$

$$B_a = B_1 + aA + a^{-1} B_0.$$

Доказательство проводится непосредственными вычислениями, с учетом свойств (6.4). □

Осуществим теперь в (6.13) замену

$$\mathcal{A}^{1/2} z = w \tag{6.16}$$

и подействуем слева оператором $\mathcal{A}^{-1/2}$. Возникает задача Коши

$$\frac{dw}{dt} + \mathcal{A}^{-1/2} \mathcal{B}_a \mathcal{A}^{-1/2} w = \mathcal{A}^{-1/2} f_a(t), \quad w(0) = \mathcal{A}^{1/2} z(0), \tag{6.17}$$

которая уже имеет изученный вид.

7. О разрешимости начально-краевой задачи.

Рассмотрим вместо (6.3) задачу Коши для модифицированного уравнения

$$
\begin{gathered}
A^{1/2}\tfrac{d}{dt}\left(A^{1/2}\tfrac{du}{dt}\right)+\left(B_1\tfrac{du}{dt}+B_0u\right)=f(t),\\
u(0)=u^0,\quad u'(0)=u^1.
\end{gathered}
\tag{7.1}
$$

Определение 1. *Будем говорить, что задача* (7.1) *имеет на отрезке* $[0,T]$ *сильное решение со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$, *если в* (7.1) *все слагаемые, в том числе и сумма в скобках, являются непрерывными функциями* t *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$ *и выполнены начальные условия.*

Далее понадобится еще один известный факт (см., например, [3, с. 166]).

Теорема 1. *Пусть в задаче Коши*

$$
\frac{du}{dt}=Au+f(t),\quad u(0)=u^0, \tag{7.2}
$$

рассматриваемой в банаховом пространстве E, *оператор* A *является генератором* C_0*–полугруппы и выполнены условия*

$$
u^0\in\mathcal{D}(A),\quad f(t)\in C^1([0,T];E). \tag{7.3}
$$

Тогда задача (7.2) *имеет единственное сильное решение* $u(t)$ *на отрезке* $[0,T]$, *которое выражается формулой*

$$
u(t)=U(t)u^0+\int_0^t U(t-s)f(s)ds, \tag{7.4}
$$

где $U(t)$ *— полугруппа, отвечающая генератору* A. □

Эта теорема и форма задачи (6.17) позволяет установить существование и единственность решения задачи (7.1), а вместе с этим и задачи (6.3).

Теорема 2. *Пусть в* (7.1) *выполнены следующие условия:*

$$
u^0\in\mathcal{H},\quad u^1\in\mathcal{H},\quad B_1u^1+B_0u^0\in\mathcal{D}(A^{-1/2}); \tag{7.5}
$$

$$
f(t)\in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})). \tag{7.6}
$$

Тогда задача (7.1) *для модифицированного уравнения имеет на отрезке* $[0, T]$ *единственное сильное решение* $u(t)$ *со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши (6.17) с операторным коэффициентом $\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}_a\mathcal{A}^{-1/2}$. Из (6.10) и леммы 2 следует, что этот оператор имеет ограниченный обратный оператор $\mathcal{A}^{1/2}\mathcal{B}_a^{-1}\mathcal{A}^{1/2}$, заданный на всем пространстве $\mathcal{H}^2$. Отсюда и из свойства

$$\operatorname{Re}(\mathcal{B}_a z, z)_{\mathcal{H}^2} = ((B_1 + aA)z_1, z_1)_{\mathcal{H}} + a\|z_2\|^2_{\mathcal{H}} \geqslant 0, \quad \forall z \in \mathcal{H}^2, \quad (7.7)$$

получаем, что на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}_a\mathcal{A}^{-1/2}) = \mathcal{R}(\mathcal{A}^{1/2}\mathcal{B}_a^{-1}\mathcal{A}^{1/2}) \subset \mathcal{H} \quad (7.8)$$

оператор $\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}_a\mathcal{A}^{-1/2}$ является максимальным аккретивным, т.е.

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}_a\mathcal{A}^{-1/2}z, z)_{\mathcal{H}^2} = \operatorname{Re}(\mathcal{B}_a\mathcal{A}^{-1/2}z, \mathcal{A}^{-1/2}z)_{\mathcal{H}^2} \geqslant 0,$$
$$\forall z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}_a\mathcal{A}^{-1/2}), \quad (7.9)$$

причем область значений

$$\mathcal{R}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}_a\mathcal{A}^{-1/2}) = \mathcal{H}^2. \quad (7.10)$$

Значит (см. [3, с. 110]), оператор $-\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}_a\mathcal{A}^{-1/2}$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы, действующей в $\mathcal{H}^2$.

Воспользуемся теперь утверждением теоремы 2. Проверим, что при выполнении условий (7.5) и (7.6) выполнены условия вида (7.3).

Действительно, если выполнены условия (7.5), то в задаче (6.17) $w(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}_a\mathcal{A}^{-1/2})$. В самом деле, согласно (6.12) и (6.11) имеем

$$\mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}_a\mathcal{A}^{-1/2}w(0) = \mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}_a z(0) =$$
$$= \mathcal{A}^{-1/2}\mathcal{B}_a y^0 = \begin{pmatrix} A^{-1/2}((B_1 + aA)u^1 + B_0u^0) \\ \\ iB_0u^1 - iaB_0u^0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^2, \quad (7.11)$$

поскольку $Au^1 \in \mathcal{D}(A^{-1}) \subset \mathcal{D}(A^{-1/2})$, а $B_1u^1 + B_0u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2})$ по условию. Далее, если выполнено условие (7.6), то

$$\mathcal{A}^{-1/2}f_a(t) = (A^{-1/2}e^{-at}f(t); 0)^t =$$
$$= e^{-at}(A^{-1/2}f(t); 0)^t \in C^1([0; T]; \mathcal{H}^2). \quad (7.12)$$

Таким образом, для задачи (6.17) выполнены условия, приведенные в теореме 1, и потому эта задача имеет единственное сильное решение $w(t)$ на отрезке $[0,T]$ со значениями в $\mathcal{H}^2$. Поэтому после применения слева в (6.17) оператора $\mathcal{A}^{1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^2)$ и обратной замены (6.16) приходим к выводу, что задача Коши

$$\mathcal{A}^{1/2}\frac{d}{dt}(\mathcal{A}^{1/2}z) + \mathcal{B}_a z = f_a(t), \quad z(0) = y^0, \tag{7.13}$$

имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$ со значениями в $\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2})$, т.е. все слагаемые в (7.13) принадлежат $C([0,T];\mathcal{D}(\mathcal{A}^{-1/2}))$.

Отсюда, с учетом (6.12) и (6.9), получаем систему уравнений

$$\begin{gathered} A^{1/2}\tfrac{d}{dt}\left(e^{-at}A^{1/2}\tfrac{du}{dt}\right) + \\ +e^{-at}\left((B_1 + aA)\tfrac{du}{dt} + iB_0^{1/2}\tfrac{dv}{dt}\right) = e^{-at}f(t), \\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \end{gathered} \tag{7.14}$$

$$\begin{gathered} \tfrac{d}{dt}\left(e^{-at}\tfrac{dv}{dt}\right) + e^{-at}\left(iB_0^{1/2}\tfrac{du}{dt} + a\tfrac{dv}{dt}\right) = 0, \quad v(0) = 0, \\ v'(0) = -iB_0^{1/2}u^0. \end{gathered} \tag{7.15}$$

При этом в (7.14) все слагаемые, в том числе и выражение

$$\left((B_1 + aA)\frac{du}{dt} + iB_0^{1/2}\frac{dv}{dt}\right), \tag{7.16}$$

принадлежат $C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$, а в (7.15) — пространству $C([0,T];\mathcal{H})$.

Из (7.15) приходим к выводу, что

$$\frac{dv}{dt} = -iB_0^{1/2}u \in C^1([0,T];\mathcal{H}); \tag{7.17}$$

подставляя это выражение в (7.14) и сокращая на экспоненту, получаем

$$\begin{gathered} A^{1/2}\tfrac{d}{dt}\left(A^{1/2}\tfrac{du}{dt}\right) - aA\tfrac{du}{dt} + \left((B_1 + aA)\tfrac{du}{dt} + B_0 u\right) = f(t), \\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \end{gathered} \tag{7.18}$$

Однако выражение в скобках $Adu/dt \in C\left([0,T];\mathcal{D}(A^{-1})\right)$. В самом деле, из теоремы существования и единственности сильного решения $w(t)$ задачи (6.17) следует, что

$$\mathcal{B}_a\mathcal{A}^{-1/2}w = \mathcal{B}_a z = e^{-at}\mathcal{B}_a y \in C\left([0,T];\mathcal{D}(\mathcal{H}^2)\right).$$

Тогда и

$$y(t) = \mathcal{B}_a^{-1}(\mathcal{B}_a y) \in C\left([0,T];\mathcal{H}^2\right), \tag{7.19}$$

а потому $du/dt \in C\left([0,T];\mathcal{D}(\mathcal{H})\right)$. Следовательно,

$$aA\frac{du}{dt} \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1})) \subset C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})),$$

и это слагаемое можно вынести за скобку в выражении (7.16).

Отсюда и из (7.18) получаем, что модифицированное уравнение (7.1) имеет на отрезке $[0,T]$ единственное сильное решение в смысле определения 1. □

8. О разрешимости исходной начально-краевой задачи.

Будем считать, что выполнены условия теоремы 2 и потому задача Коши (7.1) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Это позволяет, как сейчас будет выяснено, доказать теорему о существовании и единственности сильного решения исходной начально-краевой задачи (1.1) – (1.6). Итак, считаем, с учетом обратных замен (6.2), что задача Коши

$$\begin{gathered}\rho A^{1/2}\tfrac{d}{dt}\left(A^{1/2}\tfrac{du}{dt}\right) + \left(\gamma B_1\tfrac{du}{dt} + \rho g B_0 u\right) = \rho f(t),\\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1,\end{gathered} \tag{8.1}$$

имеет сильное решение в смысле определения 1. При этом выполнены условия

$$\begin{gathered}u^0 \in \mathcal{H}, \quad u^1 \in \mathcal{H}, \quad \gamma B_1 u^1 + \rho g B_0 u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}),\\ f(t) \in C^1\left([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})\right).\end{gathered} \tag{8.2}$$

Замечание 1. Для сильного решения уравнения (8.1) имеет место свойство

$$A^{1/2}\frac{d}{dt}\left(A^{1/2}\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^2}{dt^2}(Au) \in C\left([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})\right). \tag{8.3}$$

Доказательство. Действительно, левая часть обладает свойством непрерывности, а правая часть, в силу ограниченности оператора $A^{1/2}$ в шкале пространств, построенной по оператору A^{-1}, т.е. в силу свойства $A^{1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(A^{-\beta}), \mathcal{D}(A^{1/2-\beta}))$, $\beta \in \mathbb{R}$, равна левой, в чем можно убедиться, в процессе предельного перехода при $\Delta t \longrightarrow 0$, связанного с вычислением $d^2(Au)/dt^2$. $\square$

Дальнейшая схема доказательства разрешимости исходной задачи состоит в обратном переходе от задачи (8.1) – (8.2) к задаче (3.5) – (3.9). Эта процедура состоит из нескольких этапов.

1^0. Прежде всего, по решению $u = u(t)$ задачи (8.1) – (8.2) строим функции $\zeta(t) = (\zeta_0(t); \zeta_1(t))$ согласно формулам (5.8) – (5.9), а также функцию $(\Phi|_\Gamma)(t) = ((\Phi|_{\Gamma_0})(t); (\Phi|_{\Gamma_1})(t))$, см. (5.12) – (5.17).

2^0. Заметим теперь, что в исследуемой задаче

$$\begin{gathered}\mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{H}_\Gamma^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\Gamma_0}^{1/2} \times \mathcal{H}_{\Gamma_1}^{1/2} \times \widehat{\mathcal{H}}, \\ \mathcal{H}_{\Gamma_i}^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap \mathcal{H}_i, \quad i = 0, 1.\end{gathered} \tag{8.4}$$

Это следует из того, что решения вспомогательных задач (5.12) – (5.14) принадлежат пространству $H^1(\Omega)$, а следы функций из этого пространства, согласно теореме Гильярдо (см. [4]), в области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$ принадлежат пространству $H^{1/2}(\partial\Omega)$, в частности следы на Γ принадлежат $H^{1/2}(\Gamma)$. Далее, так как в силу (5.12) – (5.17) имеем $A\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_\Gamma = (\Phi)_\Gamma$, то $A^{-1}(\Phi)_\Gamma = \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_\Gamma$ и тогда

$$\begin{gathered}\langle(\Phi)_\Gamma, A^{-1}(\Phi)_\Gamma\rangle_{\mathcal{H}} = \|A^{-1/2}(\Phi)_\Gamma\|_{\mathcal{H}}^2 = \\ = \textstyle\int_\Omega |\nabla\Phi|^2\, d\Omega = \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}^2 =: \|(\Phi)_\Gamma\|_{\mathcal{H}_\Gamma^{1/2}}^2.\end{gathered}$$

Подробности можно найти также в [1, §1.3].

3^0. Рассмотрим теперь сумму в скобках в (8.1), т.е. выражение

$$\gamma B_1 \frac{du}{dt} + \rho g B_0 u \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})).$$

С учетом обозначений (5.26) и (5.27), а также (5.8) – (5.9) получаем, что это выражение равно

$$\begin{pmatrix} \rho g(\zeta_0 - \widetilde{\zeta}_0; 0) \\ \gamma \dfrac{d}{dt}(0; \zeta_1 - \widetilde{\zeta}_1) \\ \gamma\beta_0 \dfrac{d}{dt}(\widetilde{\zeta}_0; \widetilde{\zeta}_1) + \rho g \beta_1(\widetilde{\zeta}_0; \widetilde{\zeta}_1) \end{pmatrix}. \tag{8.5}$$

После сложения элементов этого столбца, с учетом (8.4), имеем

$$\left(\rho g \zeta_0 - c(t); \gamma \frac{d}{dt}\zeta_1 - c(t)\right) \in C([0,T]; \mathcal{H}_\Gamma^{1/2}). \tag{8.6}$$

4^0. Аналогичная процедура, проведенная с выражением (8.3) с учетом соотношений (5.12) – (5.17), приводит к выводу, что

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\Phi|_{\Gamma_0}; \Phi|_{\Gamma_1}\right) \in C([0,T]; \mathcal{H}_\Gamma^{1/2}), \tag{8.7}$$

а для правой части (8.1) имеем, с учетом (5.21),

$$(F|_{\Gamma_0}; F_{\Gamma_1}) \in C^1([0,T]; \mathcal{H}_\Gamma^{1/2}). \tag{8.8}$$

(Здесь свойство непрерывной дифференцируемости следует из последнего требования (8.2)).

В итоге из уравнения (8.1) получаем соотношение

$$\begin{gathered} \left(\left((\rho \tfrac{d^2\Phi}{dt^2} + g\zeta_0 - F) - c(t)\right)_{\Gamma_0}; \right. \\ \left. \left(\rho \tfrac{d^2\Phi}{dt^2} + \gamma \tfrac{d\zeta_1}{dt} - \rho F - c(t)\right)_{\Gamma_1}\right) \equiv (0;0), \end{gathered} \tag{8.9}$$

где соответствующие пары элементов обладают свойствами (8.6) – (8.8).

5^0. Введем функцию

$$\begin{gathered} (\psi|_{\Gamma_0}; \psi|_{\Gamma_1}) := \left(\left(-\rho \tfrac{d^2\Phi}{dt^2} + \rho F + c(t)\right)_{\Gamma_0}; \right. \\ \left. \left(-\rho \tfrac{d^2\Phi}{dt^2} + \rho F + c(t)\right)_{\Gamma_1}\right) \in C([0,T]; \mathcal{H}_\Gamma^{1/2}) \end{gathered} \tag{8.10}$$

и по ней построим решение следующей смешанной задачи

$$\Delta\psi = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \tfrac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S),$$
$$\psi|_\Gamma = (\psi|_{\Gamma_0}; \psi|_{\Gamma_1}), \quad \textstyle\int_\Gamma \psi\, d\Gamma = 0. \tag{8.11}$$

Известно (см., например, [1, с. 45]), что между следами $\psi|_\Gamma \in \mathcal{H}_\Gamma^{1/2}$ и элементами $\nabla\psi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$ имеется взаимно однозначное соответствие и даже изометрический изоморфизм. При этом из (8.10) следует, что для решений задачи (8.11) имеет место соотношение

$$\rho\nabla\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \nabla\psi = \rho\nabla F, \tag{8.12}$$

где каждое слагаемое является элементом пространства $C([0,T]; \vec{G}_{h,S}(\Omega))$.

Тогда из (8.9) и (8.10) получаем, что выполнены также граничные условия

$$\psi = \rho g\zeta_0 \quad (\text{на } \Gamma_0), \quad \psi = \gamma\frac{d\zeta_1}{dt} \quad (\text{на } \Gamma_1), \tag{8.13}$$

причем, согласно (8.4), (8.6) – (8.8), из (8.9) имеем свойства

$$\zeta_0 \in C([0,T]; H^{1/2}(\Gamma_0)); \quad \zeta_1 \in C^1([0,T]; H^{1/2}(\Gamma_1)). \tag{8.14}$$

6^0. Введем, наконец, потенциал скоростей φ посредством формулы (3.1) и заметим, что

$$\nabla\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \nabla\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\nabla\varphi \in C([0,T]; \vec{G}_{h,S}(\Omega)). \tag{8.15}$$

Тогда (8.12) переходит в уравнение (3.5), где каждое слагаемое является элементом из $C([0,T]; \vec{G}_{h,S}(\Omega))$.

7^0. Рассмотрим теперь вопрос о том, в каком смысле выполнено кинематическое условие (3.7). Из второго утверждения (8.14) имеем

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_{\Gamma_1} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_{\Gamma_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} \in C([0,T]; H^{1/2}(\Gamma_1)). \tag{8.16}$$

Далее, как уже отмечалось при доказательстве теоремы 2 (см. (7.18) и ниже), $du/dt \in C([0,T]; \mathcal{H})$ и потому (в силу (5.8), (5.9))

$$\zeta(t) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)|_\Gamma \in C^1([0,T]; \mathcal{H}).$$

Значит,

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_{\Gamma} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{\Gamma} \in C([0,T];\mathcal{H}); \tag{8.17}$$

в частности,

$$\frac{d\zeta_0}{dt} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{\Gamma_0} \in C([0,T];L_2(\Gamma_0)). \tag{8.18}$$

8^0. Выясним, какие требования на начальные данные и правую часть в исходной задаче обеспечивают условия (8.2) и, как следствие, существование сильного решения задачи (8.1).

Прежде всего, пусть заданное поле $\vec{f}$ из (1.1) удовлетворяет условиям

$$\vec{f} \in C([0,T];\vec{L}_2(\Omega)), \quad P_{h,S}\vec{f} =: \nabla F \in C^1([0,T];\vec{G}_{h,S}(\Omega)). \tag{8.19}$$

Тогда, в силу проведенных выше рассуждений и определения (5.21), для $F|_\Gamma = (F|_{\Gamma_0}; F|_{\Gamma_1})$ выполнено свойство (8.8) и потому последнее требование (8.2).

Далее, требования на начальные данные из (8.2) равносильны тому (см. (8.6) при $t=0$), что должны выполняться условия

$$\begin{gathered}\zeta^0 = (\zeta^0|_{\Gamma_0}; \zeta^0|_{\Gamma_1}) \in \mathcal{H}, \quad \zeta^1 = (\zeta^1|_{\Gamma_0}; \zeta^1|_{\Gamma_1}) \in \mathcal{H}, \\ \zeta^0|_{\Gamma_0} \in H^{1/2}(\Gamma_0), \quad \zeta^1|_{\Gamma_1} \in H^{1/2}(\Gamma_1).\end{gathered} \tag{8.20}$$

Подводя окончательные итоги, сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 3. *Пусть в задаче* (1.1) – (1.6) *выполнены следующие условия:*

1^0. *Условия* (8.19) *для заданной векторной функции* $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$.

2^0. *Условия на начальные данные*

$$\vec{u}^0 \in \vec{L}_2(\Omega), \quad P_{h,S}\vec{u}^0 =: \nabla\varphi^0, \quad \frac{\partial\varphi^0}{\partial n}|_\Gamma =: \zeta^1, \tag{8.21}$$

причем ζ^1 *и* ζ^0 *удовлетворяют требованиям* (8.20).

Тогда задача (1.1) – (1.6) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$. *Это означает, что существуют функции* $\vec{u}(t,x)$, $p(t,x)$ *и* $\zeta(t,x)$, *единственным образом определяемые по* $\vec{f}(t,x)$ *и начальным данным* $\vec{u}^0(x)$ *и* $\zeta^0(x)$, *такие, что:*

1^0. *Имеют место разложения* (3.1), (3.2)*; при этом выполнено уравнение* (3.3)*, где* $\vec{w}(t,x) \in C^1([0,T];\vec{J}_0(\Omega))$*, а также начальное условие; выполнено соотношение* (3.4)*, где* $\nabla\varkappa(t,x) \in C([0,T];\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega))$.

2^0. *Выполнено уравнение* (3.5)*, где все слагаемые принадлежат* $C([0,T];\vec{G}_{h,S}(\Omega))$.

3^0. *Выполнено кинематическое условие* (3.7)*, где слагаемые из* $C([0,T];\mathcal{H})$*, причем справедливы также соотношения* (8.16), (8.18).

4^0. *Выполнено первое динамической условие* (3.8)*, где слагаемые принадлежат* $C([0,T];H^{1/2}(\Gamma_0))$.

5^0. *Выполнено второе динамической условие* (3.8)*, где слагаемые принадлежат* $C([0,T];H^{1/2}(\Gamma_1))$.

6^0. *Выполнены начальные условия* (3.9).

Доказательство непосредственно следует из проведенных выше рассуждений (см. процедуру из шагов $1^0 - 8^0$) о существовании, единственности и свойствах решений задачи (3.5) – (3.9) при условиях (8.19), (8.20), а также из соотношений (3.3), (3.4) и (3.10). □

Авторы благодарят рецензента за внимание к работе и полезные советы, приведшие к существенному ее улучшению.

1. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи – М.: Наука. 1989. – 416 с.
2. *Kopachevsky N.D., Krein S.G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Volume 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid. Birkhauser Verlag. — Basel, Boston, Berlin, — 2001. (Operator Theory: Advances and Applications. — Vol. 128). — 377 pp.; Volume 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. Birkhauser Verlag. — Basel, Boston, Berlin. — 2003. (Operator Theory: Advances and Applications. — Vol. 146). — 444 pp.
3. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве–М.: Наука, 1967.–464 с.
4. *Gagliardo, E.* Caratterizazioni delle trace sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni in „n” variabili // Rend. Sem. mat. Univ. Padova, 1957, V. 27, pp. 284 – 305.
5. *Ильків А.А.* Начально-краевая задача, порожденная проблемой вытекания идеальной жидкости из сосуда // Таврическая научная конференция студентов и специалистов по информатике и математике. – Симферополь, 2006.–с.28–30.

Факультет математики и информатики,
Таврический нац. университет
им. В. И. Вернадского,
пр-т Вернадского, 4,
Симферополь, 95007, Украина
nastena.ilkiv@mail.ru,
Kopachevsky@tnu.crimea.ua

Получено 20.3.07