УДК 531.38

©2016. **Д. Н. Ткаченко**

О РЕДУКЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

В статье рассмотрено движение тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом в предположении, что центр масс гиростата и гиростатический момент принадлежат главной оси в теле-носителе. На основе динамических и кинетических уравнений проведена редукция исходных уравнений к системе трех дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *гиростата, переменный гиростатический момент, редукция уравнений.*

Введение. В задачах о движении тяжелого твердого тела и гиростата известны различные формы редуцированных дифференциальных уравнений движения.

Первоначальные результаты в проблеме понижения порядка исходных дифференциальных уравнений указаны В. Гессом [1], А.Д. Билимовичем [2], Н. Ковалевским [3], А.С. Чаплыгиным [4]. П.В. Харламов обобщил результаты указанных выше ученых и предложил новые более общие формы уравнений движения гиростата [5, 6].

Полиномиальные решения уравнений Н.Ковалевского [3] и П.В. Харламова [6] нашли применение в истолковании движения гиростата (см. обзорную монографию [7]), а также при исследовании уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии [8, 9]. Структура этих решений позволила провести исследование условий существования полиномиальных решений класса В.А. Стеклова, Н. Ковалевского, Д.Н. Горячева в задачах о движении гиростата в полях сложной структуры [10, 11, 12].

В статье рассмотрена задача о движении тяжелого гиростата, имеющего неподвижную точку, с переменным гиростатическим моментом. Уравнения движения в указанной задаче были получены Н.Е. Жуковским [13], П.В. Харламовым [14], Е. Витттенбургом [15]. Отметим, что наиболее общие уравнения в рассматриваемой задаче указал П.В. Харламов, так как он рассматривал случай, когда механическая система представляет собой систему гиростатов. Исследование решений уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом ранее проводилось на заданных классах инвариантных соотношений уравнений движения гиростата [16–18]. В данной статье в предположении, что центр масс гиростата и гиростатический момент принадлежат главной оси эллипсоида инерции гиростата, выполнена редукция уравнений движения к системе трех дифференциальных уравнений. Два из данных уравнений можно интерпретировать как уравнения движения более общего класса, чем уравнения Н. Ковалевского и П.В. Харламова. Дан анализ этих уравнений для одного класса движения несомого тела; для него указан способ нахождения полиномиальных решений уравнений движения тяжелого гиростата класса В.А. Стеклова, Н. Ковалевского, Д.Н. Горячева, П.В. Харламова

1. Постановка задачи. Запишем уравнения движения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом [14]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)) \times \boldsymbol{\omega} - \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

Эти уравнения допускают два интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t)) \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \tag{3}$$

k – произвольная постоянная.

Здесь обозначено: $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ – вектор угловой скорости гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, коллинеарный вектору силы тяжести; $\boldsymbol{\lambda}(t)$ – дифференцируемая вектор-функция, характеризующая движение несомых тел; $\mathbf{s} = mg\mathbf{OC}$ (O – неподвижная точка, C – центр масс гиростата, m – масса гиростата, g – ускорение свободного падения); A – тензор инерции гиростата; точка над переменными означает производную по времени t. Будем рассматривать уравнения (1), (2) и интегралы (3) предполагая, что

$$A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3), \quad \mathbf{s} = (s, 0, 0), \quad \boldsymbol{\lambda} = \lambda(t)(1, 0, 0), \tag{4}$$

то есть центр масс гиростата и гиростатический момент принадлежат барицентрической главной оси гиростата. Гиростат представляет собой систему S, состоящую

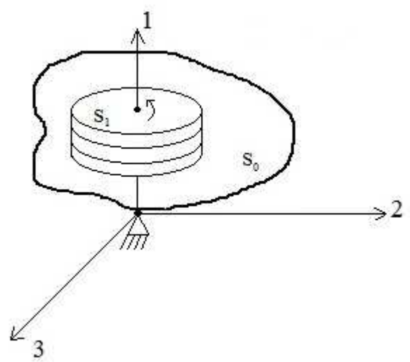

Рис. 1. Система S

из тела-носителя S_0 и вращающегося гироскопа S_1 (рис. 1).

Запишем уравнения, вытекающие из (1) и (2), при предположениях (4)

$$(A_1 p + \lambda(t))^{\bullet} = (A_2 - A_3)qr, \tag{5}$$

$$A_2\dot{q} = [(A_3 - A_1)p - \lambda(t)]r - s\nu_3, \tag{6}$$
$$A_3\dot{r} = [(A_1 - A_2)p + \lambda(t)]q + s\nu_2. \tag{7}$$

Представим уравнения Пуассона (2) в скалярной форме

$$\begin{aligned} \dot{\nu_1} &= r\nu_2 - q\nu_3, \\ \dot{\nu_2} &= p\nu_3 - r\nu_1, \\ \dot{\nu_3} &= q\nu_1 - p\nu_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Интегралы (3) в скалярной виде таковы:

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \tag{9}$$
$$(A_1p + \lambda(t))\nu_1 + A_2q\nu_2 + A_3r\nu_3 = k. \tag{10}$$

Будем полагать, что функция $\lambda(t) = \lambda^*(p(t))$. Тогда $\dot{\lambda}(t) = (\lambda^*(p))'\dot{p}$, где штрих обозначает дифференцирования по p. Для преобразования уравнений (5)–(8) выберем в качестве вспомогательной переменной компоненту p. Из уравнения (5) имеем

$$\dot{p} = \frac{q(p)r(p)(A_2 - A_3)}{u'(p)}, \tag{11}$$

где $u(p) = \lambda^*(p) + A_1p$. Перейдем в уравнениях (6) и (7) к дифференцированию по p. Используя (11), получим

$$(q^2(p))' = \frac{2u'(p)}{A_2(A_2 - A_3)}(A_3p - u(p) - \frac{s}{r(p)}\nu_3(p)), \tag{12}$$

$$(r^2(p))' = \frac{2u'(p)}{A_3(A_2 - A_3)}(u(p) - A_2p + \frac{s}{q(p)}\nu_2(p)), \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \nu_1'(p) &= \frac{u'(p)}{(A_2 - A_3)q(p)r(p)}(r(p)\nu_2(p) - q(p)\nu_3(p)), \\ \nu_2'(p) &= \frac{u'(p)}{(A_2 - A_3)q(p)r(p)}(p\nu_3(p) - r(p)\nu_1(p)), \\ \nu_3'(p) &= \frac{u'(p)}{(A_2 - A_3)q(p)r(p)}(q(p)\nu_1(p) - p\nu_2(p)). \end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (12)–(14) представляет собой систему дифференциальных уравнений на функции $q^2(p),\ r^2(p),\ \nu_1(p),\ \nu_2(p),$ $\nu_3(p),\ u(p)$. Данная система является незамкнутой, поэтому необходимо задавать одну из указанных функций как функцию от p. После интегрирования (12)–(14) зависимость p от t находится из уравнения (11). Для редукции уравнений (12)–(14) найдем ν_1 из интеграла (10), а $\nu_2,\ \nu_3$ из (12), (13)

$$\begin{aligned} \nu_1(p) &= \frac{k - A_2q(p)\nu_2(p) - A_3r(p)\nu_3(p)}{u(p)}, \\ \nu_2(p) &= \frac{q(p)}{s}[(r^2(p))'\frac{A_3(A_2 - A_3)}{2u(p)'} + A_2p - u(p)], \\ \nu_3(p) &= \frac{r(p)}{s}[(q^2(p))'\frac{A_3(A_2 - A_3)}{2u'(p)} - A_3p + u(p)]. \end{aligned} \tag{15}$$

Введем функции $Q(p) = q^2(p), \;\; R(p) = r^2(p)$. Тогда из (15) имеем

$$
\begin{aligned}
&\nu_1(p) = \frac{1}{su(p)}[sk - A_2Q(p)(\frac{A_3(A_2-A_3)R'(p)}{2u'(p)} + A_2p - u(p))+\\
&+A_3R(p)(\frac{A_2(A_2-A_3)Q'(p)}{2u'(p)} - A_3p + u(p))],\\
&\nu_2(p) = \frac{q(p)}{s}[R'(p)\frac{A_3(A_2-A_3)}{2u'(p)} + A_2p - u(p)],\\
&\nu_3 = \frac{r(p)}{s}[Q'(p)\frac{A_3(A_2-A_3)}{2u'(p)} - A_3p + u(p)],
\end{aligned} \tag{16}
$$

где $q(p) = \sqrt{Q(p)}, \;\; r(p) = \sqrt{R(p)}$.

Подставим выражения (16) во второе и третье уравнения системы (8)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}A_3(A_2-A_3)\frac{R''(p)Q(p)}{u'(p)} + \frac{1}{4}A_3(A_2-A_3)\frac{R'(p)Q'(p)}{u'(p)} - \frac{1}{2}A_3R'(p)Q(p)\cdot\\
&\cdot[\frac{A_2}{u(p)} + \frac{(A_2-A_3)u''(p)}{u'^2(p)}] + \frac{1}{2}Q'(p)[\frac{A_2A_3R}{u(p)} + pA_2 - u(p)]+\\
&+\frac{A_3}{A_2-A_3}R(p)u'(p)[1 - \frac{A_3p}{u(p)}] + Q(p)[-\frac{A_2^2}{A_2-A_3}u'(p)p + \frac{A_2}{A_2-A_3}u'(p)+\\
&+A_2 - u'(p)] + \frac{u'(p)}{A_2-A_3}[u(p)p + \frac{sk}{u(p)} - p^2A_3] = 0,\\
&\frac{1}{2}A_2(A_2-A_3)\frac{Q''(p)R(p)}{u'(p)} + \frac{1}{4}A_2(A_2-A_3)\frac{R'(p)Q'(p)}{u'(p)} + \frac{1}{2}A_2Q'(p)R(p)\cdot\\
&\cdot[\frac{A_3}{u(p)} + +\frac{(A_2-A_3)u''(p)}{u'^2(p)}] - \frac{1}{2}R'(p)[\frac{A_2A_3Q(p)}{u(p)} + pA_3 - u(p)]+\\
&+\frac{A_2}{A_2-A_3}Q(p)u'(p)[1 - \frac{A_2p}{u(p)}] + Q(p)[-\frac{A_3^2}{A_2-A_3}u'(p)p + \frac{A_3}{A_2-A_3}u'(p)-\\
&-A_3 + u'(p)] + \frac{u'(p)}{A_2-A_3}[u(p)p + \frac{sk}{u(p)} - p^2A_2] = 0,
\end{aligned} \tag{17}
$$

С учетом (16) геометрический интеграл (9) примет вид

$$
\begin{aligned}
&\{\frac{1}{u(p)}[sk - A_2Q(p)(\frac{A_3(A_2-A_3)R'(p)}{2u'(p)} + A_2p - u(p))+\\
&+A_3R(p)(\frac{A_2(A_2-A_3)Q'(p)}{2u'(p)} - A_3p + u(p))]\}^2+\\
&+\{q(p)[R'(p)\frac{A_3(A_2-A_3)}{2u'(p)} + A_2p - u(p)]\}^2+\\
&+\{r(p)[Q'(p)\frac{A_3(A_2-A_3)}{2u'(p)} - A_3p + u(p)]\}^2 - s^2 = 0,
\end{aligned} \tag{18}
$$

Соотношение (18) является первым интегралом уравнений (17).

Система (17) является неавтономной системой дифференциальных уравнений на три функции $Q(p)$, $R(p)$, $u(p)$. Так как она не замкнута, то для ее интегрирования необходимо задавать либо одну из функций $Q(p)$, $R(p)$, $u(p)$, либо инвариантное соотношение $f(Q, R, u(p)) = 0$, которое может описывать некоторое программное движение гиростата. После нахождения $Q(p)$, $R(p)$, $u(p)$ зависимость $p(t)$ определяется в силу (11) из уравнения

$$\dot{p} = \frac{A_2 - A_3}{u'(p)} \sqrt{Q(p)R(p)} \tag{19}$$

путем обращения соответствующего интеграла.

Уравнения (17) не являются простым обобщением уравнений Н. Ковалевского и П.В. Харламова, так как они получены на основании интеграла моментов (10) и поэтому содержат постоянную k и имеют особенность в знаменателе. Отметим, что уравнения Н. Ковалевского и П.В. Харламова установлены с помощью выражения для ν_1, которое находится из интеграла энергии (в задаче (5)–(8) интеграла энергии нет); в силу этого указанные уравнения не имеют особенностей в знаменателе, а вместо постоянной k они содержат постоянную, характеризующую интеграл энергии.

Если в (17) положить $u(p) = A_1 p + \lambda_0$, где λ_0 – постоянная, то система (17) становится замкнутой. Следовательно, она может быть использована для нахождения решений уравнений движения гиростата с постоянным гиростатическим моментом. Вариант, когда $u(p) = \text{const}$ на основании (11) приводит к условиям, при выполнении которых имеют место инвариантные соотношения: $q = 0$; $r = 0$. Их исследование требует дополнительного рассмотрения, которое необходимо проводить на основании уравнений (5)–(8).

2. Один специальный случай движения несомого гироскопа. Пусть тело-носитель имеет главные моменты инерции $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$, $\tilde{A}_3$. Будем предполагать, что ротор S_1 является симметричным гироскопом и обозначим через D момент инерции S_1 относительно оси вращения, а B – момент инерции S_1 относительно ортогональной оси к оси вращения (рис. 1). Пусть $\dot{\kappa}$ – скорость вращения S_1 относительно его оси симметрии. Так как $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ вектор угловой скорости тела-носителя, то абсолютная угловая скорость гироскопа S_1 определяется формулой

$$\boldsymbol{\omega}^* = \boldsymbol{\omega} + \dot{\kappa}\boldsymbol{i_1},$$

$\boldsymbol{i_1}$ – единичный вектор первой главной оси гиростата. Общий момент количества движения гиростата равен:

$$\boldsymbol{x} = (A_1\omega_1 + D\dot{\kappa})\boldsymbol{i_1} + A_2\omega_2\boldsymbol{i_2} + A_3\omega_3\boldsymbol{i_3}, \tag{20}$$

здесь $A_1 = \tilde{A}_1 + D$, $A_2 = \tilde{A}_2 + m_2(s_2)^2$, $A_3 = \tilde{A}_3 + m_2(s_2)^2$, где s_2 – расстояние от неподвижной точки до центра масс C_2 гироскопа S_1, m_2 – его масса. Положим, что центр масс C_1 тела-носителя с массой m_1 находится на первой главной оси ($s_1 = OC_1 > 0$). В силу указанных свойств центр масс гиростата C (системы, состоящей из $S_0,\ S_1$) лежит на первой координатной оси и выполняется равенство $OC = \frac{1}{m}(m_1 s_1 + m_2 s_2)$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{s}$ в уравнении (1) таков

$$\boldsymbol{s} = (g(m_1 s_1 + m_2 s_2); 0; 0). \tag{21}$$

Положим в (20) $\dot{\kappa} = \omega_1$ и запишем уравнения движения гиростата, используя теорему об изменении момента количества движения

$$\begin{aligned} \alpha_1 \dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3, \\ A_2 \dot{\omega}_2 &= (A_3 - \alpha_1)\omega_3\omega_1 - s\nu_3, \\ A_3 \dot{\omega}_3 &= (\alpha_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + s\nu_2, \end{aligned} \tag{22}$$

где $\alpha_1 = A_1 + D$. Интегралы уравнений (22) будут иметь вид

$$\begin{aligned} &\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1, \\ &\alpha_1\omega_1\nu_1 + A_2\omega_2\nu_2 + A_3\omega_3\nu_3 = k, \\ &\alpha_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2 - 2s\nu_1 = 2E. \end{aligned} \tag{23}$$

Отметим, что для указанного способа вращения гироскопа S_1 уравнения движения допускают аналог интеграла энергии (см. третье соотношение из (23)). Проведем сравнительный анализ уравнений (22), (23) и уравнений движения тяжелого твердого тела, которое состоит из тела-носителя S_0 и невращающегося гироскопа S_1. Последние уравнения получаются из уравнений (22) заменой параметра α_1 параметром A_1. При этом величины $A_1,\ A_2,\ A_3$ удовлетворяют неравенствам треугольника, поэтому уравнения движения (22) будем рассматривать при условиях, что $\alpha_1,\ A_2,\ A_3$ также удовлетворяют неравенствам треугольника. Из этого требования вытекает следующее условие

$$D < A_2 + A_3 - A_1.$$

Для классических уравнений Эйлера–Пуассона построено значительное количество частных решений (см. [7, 19]). Из приведенного выше сравнения дифференциальных уравнений гиростата с переменным гиростатическим моментом и уравнений Эйлера–Пуассона вытекает, что все указанные частные решения обобщаются как решения уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом с указанным способом вращения S_1 при условии, что $D < A_2 + A_3 - A_1$. Например, в случае С.В. Ковалевской для уравнений (22), (23) необходимо положить $\alpha_1 = A_2 = 2A_3$. Применение данного результата означает, что если в реальном объекте, рассматриваемом при $\dot{\kappa} = 0$, распределение масс не удовлетворяет условиям Ковалевской, то с учетом введения вращения гироскопа со скоростью $\omega_1 = p$ можно части этих условий удовлетворить. Аналогичное заключение относится и к полиномиальным решениям класса Н. Ковалевского, Д.Н. Горячева, П.В. Харламова. Распределение масс этих гироскопов в классическом случае есть функция $f(A_1, A_2, A_3) = 0$. Для обобщения полиномиальных решений указанного класса в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом в равенстве $f(A_1, A_2, A_3) = 0$ нужно A_1 заменить на α_1: $f(\alpha_1, A_2, A_3) = 0$.

Замечание. Полученный выше результат представляет теоретический интерес, так как он установлен на основе формальных аналитических преобразований уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом.

3. Заключение. В статье изучена задача о движении гиростата S, состоящего из тела-носителя S_0 и симметричного гироскопа S_1, центры масс которых лежат на главной оси эллипсоида инерции гиростата S. Движение гиростата S рассмотрено под действием силы тяжести. Уравнения движения гиростата редуцированы к системе трех неавтономных дифференциальных уравнений на компоненты угловой скорости и компоненту гиростатического момента. Данная система представляет собой некоторый аналог уравнений Н. Ковалевской, С.А. Чаплыгина и П.В. Харламова, полученных в задаче о движении твердого тела и тяжелого гиростата. Указан пример решения редуцированных уравнений.

1. *Hess W.* Über die Eulerchen Bewegungsgleichungen und uber eine neue partikulare Losung des Problems der Bewegung eines starren schweren Korpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1890. – **37**, H. 2. – P. 153–181.
2. *Билимович А.Д.* Уравнения движения тяжелого твердого тнла около неподвижной точки. – В кн.: Сб. статей, посвященный Г.К. Суслову. – К., 1911. – С. 23–74.
3. *Kowalewski N.* Eine neue partikuldre lusung der Differenzialgleichnungen der Bewegung eines schweren starren Kurpers um einen festen Punkt // Math. Ann – 1908. – **65**. – P. 528–537.
4. *Сретенский Л.Н.* О работах С.А. Чаплыгина по теоретической механике. – В кн.: Чаплыгин С.А. Собр. соч. – **3**. –М., 1950. – С. 366–376.
5. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. Ун-та, 1965. – 221 с.
6. *Харламов П.В.* Полиномиальные решения уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 1. – С. 26–34.
7. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 2012. – 401 с.
8. *Брюно А.Д.* Анализ уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии и нормальной формы // Прикл. математика и механика. – 2007. – **71**, вып. 2. – С. 192–227.
9. *Гашененко И.Н., Ткаченко Д.Н.* Степенные разложения решений уравнений движения гиростата // Механика твердого тела. – 2011. – **41**. – С. 11–26.
10. *Горр Г.В., Зыза А.В.* Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 6 – С. 12–21.
11. *Зыза А.В.* Один случай полиномиальных решений уравнений Кирхгофа–Пуассона // Механика твердого тела. – 2010. – **40**. – С. 103–109.
12. *Зыза А.В.* Полиномиальные решения с линейным инвариантным соотношением уравнений Кирхгофа–Пуассона // Механика твердого тела. – 2015. – **45**. – С. 63–69.
13. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. Т. 1. – М., 1949. – С. 31–152.
14. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – **4**. – С. 52–73.
15. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. – М.: Мир., 1980. – 288 с.
16. *Дружинин Э.И.* О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, вып. 5. – С. 825–826.
17. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным

гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – **39**. – С.42–49.
18. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – **40**. – С.91–104.
19. *Харламова Е.И., Мозалевская Г.В.* Интегро-дифференциальное уравнений динамики твердого тела. – Киев.: Наук. думка, 1986. – 296 с.

D. N. Tkachenko

About reduction differential equation of motion inert gyrostat with variable gyrostatic moment.

This article considers the movement of inert gyrostat with variable gyrostatic moment, assuming that the center of mass of gyrostat and gyrostatic moment refers to the main axis of carrier body. Based on dynamic and kinetic equations the reduction of initial equations has been performed in the system of three differential equations.

Keywords: *gyrostat, variable gyrostatic moment, reduction initial equations.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т»
`dntkachenko@mail.ru`

Получено 02.07.16