УДК 517.9

©2016. **А. С. Миненко**

О МИНИМИЗАЦИИ ОДНОГО ФУНКЦИОНАЛА МЕТОДОМ РИТЦА

Исследуется вариационным методом одна нелинейная проблема, когда на свободной границе задано условие Бернулли в виде неравенства. Приводится теорема существования. Доказывается сходимость приближенного решения, основанного на методе Ритца, к точному решению в определенных метриках.

Ключевые слова: *свободная граница, функционал, метод Ритца, сходимость, закон Бернулли, теорема существования.*

В работах [1–6] изучается нелинейная гидродинамическая задача, когда на свободной границе задано условие типа Бернулли в виде неравенства. Анализ имеющихся результатов по этой проблеме и библиографию можно найти в работе [3]. В [7–10] изложен метод минимизации нелинейного функционала, возникающего при решении теплофизической задачи типа Стефана. В настоящей работе эти результаты получили дальнейшее развитие при решении следующей гидродинамической задачи.

1. Постановка задачи. Пусть G – область, ограниченная снизу отрезком $A = (0 \le x \le a,\ y = 0)$, по бокам вертикалями $Q_1 = (x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant c)$, $Q_2 = (x = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$ и сверху кривой $P : y = g(x),\ 0 \le x \le a$, где $c < b$, $g(0) = c$, $g(a) = b$. Относительно функции $g(x)$ предполагается, что $g(x) \in C^2[0, a]$ и кривая $y = g(x)$ имеет горизонтальные участки $\Gamma_1 : y = c$ при $x \in [0, a_1]$, $\Gamma_2 : y = b$ при $x \in [a_2, a]$, где числа a_1 и a_2 такие, что $a_1 < a_2$ и, кроме того, $g(x)$ – монотонно возрастающая кривая. Пусть далее $S : y = g(x)$ при $x \in [a_1, a_2]$ и γ – достаточно гладкая кривая, расположенная в $G \cup S$. При этом одним концом γ служит точка (a_1, c), а другим – (a_2, b). Через $G_\gamma \subset G$ будем обозначать односвязную область, ограниченную отрезками A, Q_1, Q_2 и кривой $\Gamma = \Gamma_1 \cup \gamma \cup \Gamma_2$.

Рассмотрим нелинейную краевую задачу со свободной границей γ. Требуется определить пару (ψ, γ), где $\psi(x, y)$ – функция тока, по следующим условиям: функция $\psi(x, y)$ в области G_γ удовлетворяет в классическом смысле уравнению

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0,\ (x, y) \in G_\gamma \tag{1}$$

непрерывна в $\bar{G}_\gamma$, непрерывно дифференцируема в $\bar{G}_\gamma$, исключая, может быть, угловые точки, и удовлетворяет условиям

$$\psi(x, y) = 0,\ (x, y) \in A, \tag{2}$$

$$\psi_x(x, y) = 0,\ (x, y) \in Q_1 \cup Q_2, \tag{3}$$

$$\psi(x, y) = 1,\ (x, y) \in \Gamma; \quad \psi_x^2(x, y) + \psi_y^2(x, y) \geqslant \nu^2,\ (x, y) \in \gamma, \tag{4}$$

(здесь $\nu = \mathrm{const} > 0$), причем, на части γ, лежащей внутри G, всегда выполняется равенство.

Настоящая статья посвящена приближенному решению задачи (1)–(4) методом Ритца и исследованию сходимости приближений Ритца к решению задачи (1)–(4).

2. Теорема существования. Задача (1)–(4) эквивалентна проблеме минимума функционала

$$I(\psi,\gamma) = \iint\limits_{G_\gamma} (\psi_x^2 + \psi_y^2 + \nu^2)\, dxdy \tag{5}$$

на множестве R допустимых пар (ψ,γ), удовлетворяющих следующим условиям: γ – жорданова дуга, расположенная в $G \cup S$, концами которой служат точки (a_1, c) и (a_2, b), причем, все точки γ, исключая точку (a_1, c), расположены выше горизонтали $y = c$; функция $\psi(x, y)$ непрерывна в замыкании области G_γ, равна единице на Γ, нулю на отрезке , имеет непрерывно дифференцируемые производные в G_γ, при этом $I(\psi,\gamma) < \infty$.

Справедлива теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$\nu b < 1,\ \nu \int\limits_{a_1}^{a_2} \sqrt{1+g_x^2}dx + \frac{a-a_2}{b} > \frac{a-a_1}{c} \tag{6}$$

и пусть $g(x) \in C^2[0, a]$*,* $g(x) = c$ *при* $x \in [0, a_1]$*,* $g(x) = b$ *при* $x \in [a_2, a]$*, где* $a_1 < a_2$ *и, кроме того,* $g(x)$ *– монотонно возрастающая кривая при* $x \in [0, a]$*. Тогда существует пара* (ψ,γ)*, являющаяся решением задачи (1)–(4) и удовлетворяющая следующим условиям:* $\psi(x, y)$ *– функция непрерывная в* $\bar{G}_\gamma$*, непрерывно дифференцируемая в* $\bar{G}_\gamma$*,* $\psi_y(x.y) > 0$ *в* G_γ*;* γ *– монотонно возрастающая кривая, аналитическая в окрестности каждой своей точки, лежащей внутри* G*.*

Доказательство. Пусть d – точная нижняя грань функционала (5) на множестве R. Используя вариационную природу задачи (1)–(4), метод симметризации Штейнера и внутренних вариаций Шиффера [11], устанавливается существование пары $(\psi,\gamma) \in R$, удовлетворяющей условиям (1)–(4) и такой, что $I(\psi,\gamma) = d$, $\psi \in C^2(G_\gamma) \cap C^1(\bar{G}_\gamma)$. Доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в работе [3] (см. теорему 1).

Покажем теперь, что область G_γ не может целиком совпадать с G. Предположим противное. Пусть G_γ совпадает с G. Тогда из формулы Грина следует, что

$$\iint\limits_G \Delta\psi dxdy = \int\limits_0^{a_1} \psi_y(x,c)dx + \int\limits_\gamma \frac{\partial\psi}{\partial n}ds + \int\limits_{a_2}^{a} \psi_y(x,b)dx - \int\limits_0^{a} \psi_y(x,0)dx = 0.$$

Далее справедливы представления:

$$\psi(x,y) = (y-c)\alpha_1(x,y) + 1, (x,y) \in \Pi_1 = \{0 \leqslant x \leqslant a_1, c-\delta_1 \leqslant y \leqslant c\},$$

$$\psi(x,y)=y\alpha(x,y),(x,y)\in\Pi=\{0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant\delta\},$$

$$\psi(x,y)=(y-b)\alpha_2(x,y)+1,(x,y)\in\Pi_2=\{a_2\leqslant x\leqslant a,b-\delta_2\leqslant y\leqslant b\},$$

где $\alpha(x,y)$, $\alpha_1(x,y)$ и $\alpha_2(x,y)$ – достаточно гладкие функции, а δ, δ_1 и δ_2 – некоторые малые величины. Тогда имеем

$$\int\limits_0^{a_1}\alpha_1(x,c)dx+\nu\int\limits_{a_1}^{a_2}\sqrt{1+g_x^2}dx+\int\limits_{a_2}^{a}\alpha_2(x,b)dx=\int\limits_0^{a}\alpha(x,0)dx.$$

Применяя затем принцип максимума для гармонических функций, можно получить следующие оценки: $\alpha_1(x,c)\geqslant 1/c$ при $0\leqslant x\leqslant a_1$, $\alpha_2(x,b)\geqslant 1/b$ при $a_2\leqslant x\leqslant a$ и $\alpha(x,0)\leqslant 1/c$ при $0\leqslant x\leqslant a$. Действительно, имеем: $\psi(x,y)-$ $-\psi_0(x,y)\leqslant 0$ при $(x,y)\in\Pi_0=\{0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant c\}$, где $\psi_0(x,y)=y/c$. Тогда $\psi(x,y)-\psi_0(x,y)=(y-c)\alpha_1(x,y)+1-y/c$ при $x\in[0;a_1]$. Откуда следует, что $\alpha_1(x,c)\geqslant 1/c$ при $0\leqslant x\leqslant a_1$. Аналогичным образом получим другие оценки. Отсюда следует неравенство $a_1/c+\nu\int\limits_{a_1}^{a_2}\sqrt{1+g_x^2}dx+(a-a_2)/b\leqslant a/c$, которое противоречит второму неравенству в (6).

Наконец, используя метод внутренних вариаций Шиффера [11], аналогично тому как это сделано в работе [16] (см. теорему 2), устанавливается аналитичность свободной границы γ. Построенное решение (ψ,γ) является единственным в силу [12] в классе функций $\psi_y>0$ в G_γ. Таким образом, теорема доказана.

Замечание. Рассмотрим случай $a_1=0$, $a_2=a$, тогда второе неравенство в (6) запишется в таком виде

$$\nu c\int\limits_0^{a}\sqrt{1+g_x^2}dx>a.$$

Решив теперь неравенство

$$\nu c\,[g(a)-g(0)]>a$$

относительно c, заключаем, что если величины $(a-a_2)$ и a_1 достаточно малы, а параметры a и c выбираются из условий

$$\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-\frac{a}{\nu}}<c<\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-\frac{a}{\nu}},\quad \nu b^2\geqslant 4a,$$

тогда второе неравенство в (6) будет всегда удовлетворяться.

3. Приближенное решение задачи (1)–(4). Согласно известной методике Фридрихса [12] представим функционал (5) в классе функций $\psi_\gamma>0$ в G_γ следующим образом:

$$I_1(z)=\iint\limits_{\Delta}\left[\left(z_x+\frac{g_x}{g}z\right)^2+\frac{1}{g^2}+\nu^2z_\varphi^2\right]\frac{g}{z_\varphi}dxd\varphi, \tag{7}$$

где $\Delta = (0 < x < a, 0 < \varphi < 1)$, $\varphi(x,z) = \psi(x, zg(x))$, а $z(x,\varphi)$ – решение уравнения $\varphi(x,z) - \varphi = 0$. Функционал (7) будем минимизировать на множестве допустимых функций

$$D_z = \left\{ z:\, z \in C^1(\bar{\Delta}),\ z(a_1, 1) = 1,\, z(x,0) = 0,\, \min_{(x,\varphi)\in\bar{\Delta}} z_\varphi > 0 \right\}. \tag{8}$$

Далее, пусть $z_0(x,\varphi)$ – функция соответствующая классическому решению (ψ,γ) задачи (1)–(4). Очевидно, что $z_0 \in D_z$ и $z_0(x,\varphi) \in W_2^1(\Delta)$.

Лемма 1. *Элемент $z_0(x,\varphi)$ доставляет наименьшее значение функционалу (7) на множестве (8).*

Доказательство. Из формулы Фридрихса [12] следует, что

$$I_1(z) = I_1(z_0) + \frac{d}{d\varepsilon} I_1(z_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} + \int\limits_0^1 (1-\varepsilon) \frac{d^2 I_1(z_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} d\varepsilon, \tag{9}$$

где

$$\frac{d^2 I_1(z_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} = 2 \iint\limits_{\Delta} \left\{ \left[z_{0\varphi}\left(\delta z_x + \frac{g_x}{g}\delta z\right) - \delta z_\varphi \left(z_{0x} + \frac{g_x}{g} z_0 \right) \right]^2 + \frac{\delta z_\varphi^2}{g^2} \right\} \frac{g}{z_{\varepsilon\varphi}^3} dx d\varphi, \tag{10}$$

z – произвольный элемент из D_z, $z_\varepsilon = z_0 + \varepsilon(z - z_0)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Второе слагаемое справа в (9), являющееся первой вариацией функционала (7), вычисленной на элементе z_0, неотрицательно согласно [3]. Следовательно, элемент z_0 доставляет наименьшее значение функционалу (7) на множестве (8), так как $d^2 I_1(z_\varepsilon)/d\varepsilon^2$ – положительно определенный функционал на вариациях $\delta\varepsilon = z - z_0$. Лемма доказана.

В терминах функции $z(x,\varphi)$ задача (1)–(4) перепишется следующим образом:

$$-\left(\frac{z_x}{z_\varphi} + \frac{g_x}{g} \cdot \frac{z}{z_\varphi} \right)'_x + \frac{1}{g^2} \cdot \left(\frac{1}{z_\varphi} \right)'_\varphi = 0, \quad (x,\varphi) \in \Delta,$$

$$z(x,0) = 0, \quad x \in [0,a],$$

$$\left(\frac{z_x}{z_\varphi} + \frac{g_x}{g} \cdot \frac{z}{z_\varphi} \right)\Bigg|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{z_x}{z_\varphi} + \frac{g_x}{g} \cdot \frac{z}{z_\varphi} \right)\Bigg|_{x=a} = 0, \quad \varphi \in [0,1],$$

$$\left(\frac{z_x}{z_\varphi} + \frac{g_x}{g} \cdot \frac{z}{z_\varphi} \right)^2 + \frac{1}{g^2} \cdot \frac{1}{z_\varphi^2} \geqslant \nu^2, \quad x \in [0,a], \quad \varphi = 1.$$

Очевидно, что решение этой задачи будет зависеть от $g(x)$: $z = z(x,\varphi; g(x))$, $(x,\varphi) \in \bar{\Delta}$. Непосредственно проверяется, что при $g(x) = b$, $x \in [0,a]$ решением последней задачи является функция $z(x,\varphi) = \varphi$, $(x,\varphi) \in \bar{\Delta}$.

Будем минимизировать функционал (7) на множестве (8) при помощи сумм

$$z_n(x,\varphi;a_{kj}(g)) = z_n(x,\varphi;g) = z_n(x,\varphi) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}(g)x^j\varphi^k, \ \sup_{1\leqslant k\leqslant m}(k+m_k) = n. \tag{11}$$

Выделим в пространстве E_r коэффициентов a_{kj} область допустимости D_r, где

$$r = \sum_{k=1}^{m}(m_k+1), \quad D_r = E_r^0 \cap G_r^+, \quad E_r^0 : \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}a_1^j - 1 = 0,$$

$$G_r^+ = \left\{a_{kj} : \min_{(x,\varphi)\in\bar{\Delta}} z_{n\varphi}(x,\varphi) > 0\right\},$$

неизвестные коэффициенты a_{kj} и множитель Лагранжа λ определяются из нелинейной системы Ритца

$$\frac{\partial I_2(a_{kj})}{\partial a_{pq}} + \lambda a_1^q = 0, \quad q = 0,1,2...m_p, \quad p = 1,2,...m,$$

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}a_1^j - 1 = 0, \quad I_2(a_{kj}) = I_1\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}x^j\varphi^k\right). \tag{12}$$

Нетрудно проверить, что функция $I_2(a_{kj})$ принимает свое наименьшее значение в некоторой внутренней точке a_{kj}^* множества D_r, лежащей на конечном расстоянии от начала координат пространства E_r [3]. Тогда в точке a_{kj}^* частные производные первого порядка соответствующей функции Лагранжа обращаются в ноль. Следовательно, система уравнений (12) имеет решение.

Исследуем теперь зависимость коэффициентов Ритца a_{kj} от $g(x)$.

Лемма 2. *Пусть система Ритца имеет решение при некотором $y = g_0(x) \in \in C^2[0,a]$. Тогда решение $a_{kj}(g), \lambda(g)$ системы (12) непрерывно зависит от $g(x)$ в некоторой окрестности элемента $g_0(x)$.*

Доказательство. Выберем размерность пространства E_r произвольным образом, обозначив левую часть системы уравнений (12) через $R_{pq}(a_{kj},\lambda;g)$, а решение, соответствующее элементу $g_0(x)$, через a_{pq},λ. Тогда имеют место следующие равенства:

$$R_{pq}(a_{kj},\lambda;g_0) = 0, \quad g = 0,1,...,m_p, \ \ p = 1,2,...,m; \quad R_{oo}(a_{kj},g_0) = 0,$$

где

$$R_{oo}(a_{kj},g_0) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}a_1^j - 1.$$

Положим также

$$L = \frac{\partial\left(R_{pq}(a_{kj},\lambda,g_0), R_{oo}(a_{kj},g_0)\right)}{\partial(a_{\alpha\beta},\lambda)}, \ \ L = \begin{pmatrix} b_{\alpha\beta} & 1 \\ a_1^\beta & 0 \end{pmatrix},$$

здесь

$$b_{\alpha\beta} = 2\iint\limits_{\Delta} \Bigg[\left(\frac{\partial z_{nx}}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{g_x}{g} \cdot \frac{\partial z_n}{\partial a_{\alpha\beta}} \right) \left(\frac{\partial z_{nx}}{\partial a_{pq}} + \frac{g_x}{g} \frac{\partial z_n}{\partial a_{pq}} \right) z_{n\varphi}^2 -$$

$$- \left(z_{nx} + \frac{g_x}{g} z_n \right) \left(\frac{\partial z_{nx}}{\partial a_{pq}} + \frac{g_x}{g} \cdot \frac{\partial z_n}{\partial a_{pq}} \right) z_{n\varphi} \frac{\partial z_{n\varphi}}{\partial a_{\alpha\beta}} -$$

$$- \left(z_{nx} + \frac{g_x}{g} z_n \right) \left(\frac{\partial z_{nx}}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{g_x}{g} \cdot \frac{\partial z_n}{\partial a_{\alpha\beta}} \right) z_{n\varphi} \frac{\partial z_{n\varphi}}{\partial a_{pq}} +$$

$$+ \frac{\partial z_{n\varphi}}{\partial a_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial z_{n\varphi}}{\partial a_{pq}} \left(z_{nx} + \frac{g_x}{g} z_n \right)^2 + \frac{1}{g^2} \cdot \frac{\partial z_{n\varphi}}{\partial a_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial z_{n\varphi}}{\partial a_{pq}} \Bigg] \frac{g dx d\varphi}{z_{n\varphi}^3}.$$

Квадратная матрица L имеет порядок $(r+1)$. Покажем, что $\det L \neq 0$. Предположим противное. Пусть $\det L = 0$. Тогда система линейных алгебраических уравнений

$$L\eta = 0$$

имеет ненулевое решение $\eta = (\eta_{oo}, \eta_{\alpha\beta}) = (\eta_{oo}, \eta_1)$, $\eta_1 = (\eta_{\alpha\beta})$. Умножая теперь систему линейных уравнений соответственно на $\eta_{\alpha\beta} \cdot \eta_{pq}$, а затем, произведя суммирование по p, q, α и β, получим, учитывая что

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=0}^{m_\alpha} \eta_{\alpha\beta} a_1^\beta = 0,$$

следующее выражение

$$\iint\limits_{\Delta} \left\{ \left[z_{n\varphi} \left(z_x + \frac{g_x}{g} z \right) - z_\varphi \left(z_{nx} + \frac{g_x}{g} z_n \right) \right]^2 + \frac{z_\varphi^2}{g^2} \right\} \frac{g}{z_{n\varphi}^3} dx d\varphi = 0,$$

где

$$z_n = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} x^j \varphi^k, \quad z = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{m_k} \eta_{kj} x^j \varphi^k.$$

Выражение стоящее слева обращается в ноль тогда и только тогда, когда

$$z(x,\varphi) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{m_k} \eta_{kj} x^j \varphi^k \equiv 0, \quad (x,\varphi) \in \bar{\Delta}.$$

Отсюда следует, что $\eta_{\alpha\beta} = 0$, $\beta = 0, 1, \ldots, m_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$. Тогда из того, что $L\eta = 0$, следует, что $\eta_{oo} = 0$. Таким образом, $\eta = (\eta_{\alpha\beta}, \eta_{oo})$ является нулевым решением системы линейных алгебраических уравнений. Получаем противоречие. Следовательно, $\det L \neq 0$. Применяя теперь теорему о неявных функциях, получим утверждение леммы. Лемма доказана.

Итак, решив систему уравнений (12) при каждом n, можно затем построить последовательность приближений (11) в виде $z_n(x, \varphi; a_{kj}^*) = z_n^*$. Приближения z_n^*

образуют минимизирующую последовательность для функционала (7) на множестве (8) (доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в работе [3]).

Последовательность функций $z_n(x,\varphi)$ позволяет приближенно для задачи (1)–(4) найти свободную границу γ_n и линии уровня $y_n(x,c)$ функций $\psi_n(x,y)$, являющихся линиями тока. Здесь значения постоянной величины c принадлежат промежутку $[0;1]$. При этом имеем:

$$\gamma_n : y_n(x,1) = g(x)z_n(x,1) = g(x)\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}x^j,$$

$$y_n(x,c) = g(x)z_n(x,c) = g(x)\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}x^j c^k,$$

где $n = \sup\limits_{1\leqslant k\leqslant m}(k+m_k),\ c\in[0,1]$, (ψ_n,γ_n) – приближенное решение задачи (1)–(4).

4. Сходимость приближений Ритца z_n^* в $C(\bar{\Delta})$. Установим теперь сходимость приближенных решений (11), построенных по методу Ритца, к точному решению $z_0(x,\varphi)$, соответствующему решению (ψ,γ) задачи (1)–(4). Справедлива лемма.

Лемма 3. *Пусть функция $z_0(x,\varphi)\in W_2^l(\Delta)$, где $l\geqslant 2$. Тогда можно построить допустимый многочлен*

$$u_n(x,\varphi) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{kj}x^j\varphi^k, \quad n\leqslant m$$

такой, что

$$\|z_0 - u_n\|^2_{W_2^1(\Delta)} = O\left(\frac{1}{n^{2(l-2)}}\right). \tag{13}$$

Доказательство. Введем новые переменные (ξ,ς) следующим образом:

$$x = 2a(\tau - t_2),\ \ \cos\frac{\xi}{2} = 1-\tau^2,\ \ \varphi = 2(\theta - t_1),\ \ \cos\frac{\varsigma}{2} = 1-\theta^2,$$

где t_1, t_2 – произвольные числа из интервала $(0;1/2)$. Тогда прямоугольник Δ перейдет в прямоугольник $\Delta_1 = (\xi_1<\xi<\xi_2,\ \varsigma_1<\varsigma<\varsigma_2)$, где

$$\xi_1 = 2\arccos\left(1-t_2^2\right),\ \xi_2 = 2\arccos\left[1-\left(t_2+\frac{1}{2}\right)^2\right],$$

$$\varsigma_1 = 2\arccos\left(1-t_1^2\right),\ \varsigma_2 = 2\arccos\left[1-\left(t_1+\frac{1}{2}\right)^2\right].$$

Положим теперь $z_0(x(\xi),\varphi(\varsigma)) = u(\xi,\varsigma)$. Очевидно, что $u(\xi,\varsigma)\in W_2^l(\Delta_1)$. Продолжим затем функцию $u(\xi,\varsigma)$ на прямоугольник $\Delta^* = (0<\xi<\pi,\ 0<\varsigma<\pi)$ с сохранением класса [13] и обозначим продолженную функцию через $u^*(\xi,\varsigma)$. Это продолжение всегда можно осуществить таким образом, чтобы функция u^* и все ее производные до порядка l включительно обращались в ноль в некоторой приграничной полоске области Δ^*. Разложим функцию $u^*(\xi,\varsigma)$ в ряд Фурье по косинусам

$$u^*(\xi,\varsigma)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(\xi)\cos k\varsigma,\quad b_k(\xi)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}u^*(\xi,\varsigma)\cos k\varsigma d\varsigma.$$

Положим

$$\sigma_n(\xi,\varsigma)=\sum_{k=0}^{n}b_k(\xi)\cos k\varsigma,\quad \rho_n(\xi,\varsigma)=u^*(\xi,\varsigma)-\sigma_n(\xi,\varsigma)$$

и оценим интеграл

$$F(\rho_n)=\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[\left(\frac{\partial\rho_n}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho_n}{\partial\varsigma}\right)^2+\rho_n^2\right]d\xi d\varsigma,$$

пользуясь равенством Парсеваля. Тогда получим $F(\rho_n)\leqslant\frac{1}{(n+1)^{2(l-1)}}\|u^*\|^2_{W_2^l(\Delta^*)}$. Возвратимся затем к старым переменным (x,φ). Для этого рассмотрим функцию

$$R(x,\varphi)=z_0(x,\varphi)-S(x,\varphi)=\rho_n(\xi(x),\varsigma(\varphi)),\quad(\xi,\varsigma)\in\Delta_1,$$

где

$$S(x,\varphi)=\sigma_n(\xi(x),\varsigma(\varphi))=\sum_{k=0}^{n}b_k(\xi(x))\cos k\varsigma(\varphi)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}b_k(\xi(x))\cos\{2k\arccos[1-\theta^2(\varphi)]\}=\sum_{k=0}^{4n}f_k(x)\varphi^k.$$

Далее, разложив функцию $\sigma_n(\xi,\varsigma)$ в ряд Фурье по косинусам

$$\sigma_n(\xi,\varsigma)=\sum_{i=0}^{\infty}d_i(\varsigma)\cos i\xi,\quad d_i(\varsigma)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\sigma_n(\xi,\varsigma)\cos i\xi d\xi$$

и вновь повторив проделанные выше преобразования, построим многочлен $Q_n(x,\varphi)$. Однако он может оказаться недопустимым. Поэтому представим его в следующем виде:

$$Q_n(x,\varphi)=T_n(x,\varphi)+p(x),$$

где

$$T_n(x,\varphi)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{m}a_{kj}x^i\varphi^k,\ p(x)=\sum_{i=0}^{m}a_{0i}x^i.$$

Тогда из оценок

$$\int_0^a p^2(x)dx = O\left(\frac{1}{n^{2(l-1)}}\right), \quad \int_0^a \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 dx = O\left(\frac{1}{n^{2(l-2)}}\right)$$

следует, что условие (13) выполняется и $T_n(x,0) = 0$, $T_n(a_1,1) = 1$; если последнее условие не выполняется, необходимо рассмотреть многочлен $\tilde{T}_n(x,\varphi) = T_n(x,\varphi)/T_n(a_1,1)$. Полагая теперь $u_n(x,\varphi) = T_n(x,\varphi)$, можно для всякого $\varepsilon > 0$ указать номер N степени многочлена $Q_n(x,\varphi)$, начиная с которого $\|z_0 - Q_n\|_{C^1(\bar{\Delta})} < \varepsilon$, а тогда и $\|z_0 - u_n\|_{C^1(\bar{\Delta})} < 2\varepsilon$. Поэтому $\min T_{n\varphi} > 0$ при $(x,\varphi) \in \bar{\Delta}$. Лемма доказана.

Перейдем к исследованию сходимости приближений (11).

Теорема 2. *Пусть выполнены все предположения теоремы 1 и пусть* $z_0(x,\varphi) \in W_2^l(\Delta)$, *когда* $l \geqslant 6$. *Тогда последовательность приближений Ритца (11) сходится к точному решению* $z_0(x,\varphi)$ *по норме в* $C(\bar{\Delta})$ *и* $W_2^1(\Delta)$.

Доказательство. Последовательность многочленов (11), коэффициенты которых удовлетворяют системе (12), образуют минимизирующую последовательность z_n^* для функционала (7) на множестве (8). Следовательно, имеем

$$\varepsilon_n = I_1(z_n^*) - I_1(z_0) \to 0$$

при $n \to \infty$, так как, согласно лемме 1, элемент z_0 доставляет наименьшее значение функционалу $I_1(z)$ на множестве D_z.

Далее, для второй вариации функционала (10) справедлива оценка

$$\frac{d^2 I_1(z_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \leqslant \alpha \|\delta z\|^2_{W_2^1(\Delta)}$$

при некоторой постоянной α, когда $\delta z = z - z_0$, а z – произвольный элемент из D_z. Поэтому, если $u_n(x,\varphi)$ – многочлен, определенный в лемме 3, тогда, используя формулу (9) и неотрицательность первой вариации функционала (7) на элементе z_0, получим

$$\varepsilon_n = I_1(z_n^*) - I_1(z_0) \leqslant I_1(u_n) - I_1(z_0) = O\left(\frac{1}{n^{(l-2)}}\right),$$

так как

$$\left.\frac{dI_1(z_\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{a_1}^a \left[\nu^2 - \left(\frac{z_{0x} + \frac{g_x}{g} z_0}{z_{0\varphi}}\right)^2 - \frac{1}{g^2 z_{0\varphi}^2}\right] g\delta z(x,1)dx \leqslant \beta \|\delta z\|_{W_2^1(\Delta)}$$

при некоторой постоянной β и $z_\varepsilon = z_0 + \varepsilon(z_n^* - z_0)$.

Затем, опять воспользовавшись формулой (9), приходим к неравенству

$$\int_0^1 (1-\varepsilon)\frac{d^2 I_1(z_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} d\varepsilon \leqslant \varepsilon_n. \tag{14}$$

Применяя теперь теорему А.А. Маркова [14], согласно которой максимум модуля производной многочлена n-ой степени на промежутке длины h не превосходит произведения $2n^2/h$ на максимум модуля самого многочлена, получим, полагая $\eta_n(x,\varphi) = z_n^*(x,\varphi) - z_0(x,\varphi)$, следующие оценки:

$$\max_{(x,\varphi)\in\bar{\Delta}} z_{\varepsilon\varphi}(x,\varphi) \leqslant 2M_0 + 2\varepsilon n^2(A_0 + M_n),$$

где

$$A_0 = \max_{(x,\varphi)\in\bar{\Delta}} z_0(x,\varphi), \quad M_0 = \max_{(x,\varphi)\in\bar{\Delta}} z_{0\varphi}(x,\varphi),$$
$$M_n = \max_{(x,\varphi)\in\bar{\Delta}} |\eta_n(x,\varphi)|, \quad \max_{(x,\varphi)\in\bar{\Delta}} z_{n\varphi} \leqslant 2(A_0 + M_n)n^2.$$

Тогда из неравенства (14) следует, что

$$\int\limits_0^1 \frac{(1-\varepsilon)d\varepsilon}{b\,[2M_0 + 2\varepsilon n^2(A_0+M_n)]^3} \iint\limits_{\Delta} \eta_{n\varphi}^2 dxd\varphi \leqslant \int\limits_0^1 (1-\varepsilon) \iint\limits_{\Delta} \frac{\delta z_\varphi^2}{g z_{\varepsilon\varphi}^3} d\varepsilon dxd\varphi \leqslant \frac{\varepsilon_n}{2},$$

где $\eta_n = \delta z = z_n^* - z_0$. Отсюда, после интегрирования по ε, вытекает оценка

$$\iint\limits_{\Delta} \eta_{n\varphi}^2(x,\varphi)dxd\varphi \leqslant \mu_n, \tag{15}$$

где

$$\mu_n = 8M_0^2 b[M_0 + n^2(A_0+M_n)]\varepsilon_n.$$

Используя неравенство Коши с ε и первое слагаемое в подынтегральном выражении (10), можно получить

$$(1-\varepsilon_1)\iint\limits_{\Delta} z_{0\varphi}^2 \left(\eta_{nx} + \frac{g_x}{g}\eta_n\right)^2 dxd\varphi \leqslant \frac{\mu_n}{cb} + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right)\iint\limits_{\Delta} \eta_{n\varphi}^2 \left(z_{0x} + \frac{g_x}{g} z_0\right)^2 dxd\varphi,$$

где ε_1 – некоторое достаточно малое число. Вновь применяя неравенство Коши и учитывая, что $\min z_{0\varphi} > 0$ при $(x,\varphi)\in\bar{\Delta}$, приходим к оценке

$$\iint\limits_{\Delta} \eta_{nx}^2 dxd\varphi \leqslant R_1 \iint\limits_{\Delta} \eta_n^2 dxd\varphi + R_2 \iint\limits_{\Delta} \eta_{n\varphi}^2 dxd\varphi$$

при некоторых постоянных R_1 и R_2. Тогда из (14) и (15) следуют соотношения

$$\iint\limits_{\Delta} \eta_n^2(x,\varphi)dxd\varphi \leqslant c_1\mu_n, \quad \iint\limits_{\Delta} \eta_{nx}^2(x,\varphi)dxd\varphi \leqslant c_2\mu_n, \tag{16}$$

где c_1 и c_2 – постоянные. Для завершения доказательства теоремы применим результаты Л.В. Канторовича по минимизации квадратичных функционалов методом Ритца (см. [14, стр. 358–362] и [15, стр. 32–35]). При этом учтем порядок величины ε_n, если $l = 6$. Тогда получим неравенство

$$\sqrt{M_n} \leqslant A_1 \sqrt{\frac{1}{n^2}\ln n + \frac{1}{n^2}\ln M_n} + \frac{1}{n}A_2, \qquad (17)$$

здесь A_1 и A_2 некоторые постоянные. Из последнего неравенства следует, что $M_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда и из неравенств (15) и (16) будет следовать утверждение теоремы.

Замечание. В случае $g(x) = b$, $x \in [0, a]$, получим, что $z_0(x, \varphi; b) = \varphi \in W_2^l(\Delta)$, $l \geqslant 6$, хотя на самом деле l может быть любым целым числом, т.е. получим сходимость $z_n(x, \varphi; b)$ к $z_0(x, \varphi; b)$ по норме в $C(\bar{\Delta})$. Учитывая, что $z_n(x, \varphi; g)$ непрерывно зависит от $g(x) \in C^2[0, a]$ в некоторой окрестности элемента $g_0(x) = b$, тогда и предельная функция $z_0(x, \varphi; g)$ будет непрерывно зависеть от $g(x)$ в этой же окрестности. Следовательно, и неравенство (17) сохранит смысл в некоторой малой окрестности $U(b; g)$ элемента $g_0(x) = b$. Итак, установлена сходимость $z_n(x, \varphi; g)$ к $z_0(x, \varphi; g)$ по норме в $C(\bar{\Delta})$ для всех $g \in U(b; g)$.

1. *Миненко А.С.* О вариационном методе исследования одной нелинейной задачи потенциального течения жидкости // Нелинейн. граничн. задачи. – 1991. – **3**. – С. 60–66.
2. *Миненко А.С.* Проблема минимума одного класса интегральных функционалов с неизвестной областью интегрирования // Мат. физика и нелиней. механика. – 1991. – **16**. – С. 48–52.
3. *Миненко А.С.* Осесимметрическое течение со свободной границей // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 4. – С. 477–488
4. *Minenko A.S.* Axially symmetric flow // Fifth SIAM conference on optimization (Victoria, British Columbia, May 20–22, 1996). – Victoria, 1996. – P. 12.
5. *Миненко А.С.* О вариационном методе исследования одной задачи вихревого течения жидкости со свободной границей // Нелинейн. граничн. задачи. – 1993. – **5**. – С. 58–64.
6. *Миненко А.С.* Вариационная задача со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 354 с.
7. *Данилюк И.И., Миненко А.С.* О методе Ритца в одной нелинейной задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 4. – С. 291–294.
8. *Данилюк И.И., Миненко А.С.* Об одной вариационной теплофизической задаче со свободной границей // Сб. докл. конф. по смешанным граничным задачам для дифференциальных уравнений с частными производными и задачам со свободными границами (Штутгарт, 5–10 сент. 1978). – Штутгарт, 1978. – С. 9–18.
9. *Миненко А.С.* Об одной теплофизической задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – № 6. – С. 413–416.
10. *Данилюк И.И., Миненко А.С.* О вариационном методе изучения квазистационарной задачи Стефана // Успехи мат. наук. – 1981. – **43**, № 5. – С. 228.
11. *Garabedian P.R., Lewy H., Schiffer M.* Axially symmetric cavitational flow // Ann. Math. – 1952. – **56**, № 3. – P. 560–602.
12. *Friedrichs K.O.* Uber ein Minimumproblem fur Potentialstromungen mit freiem Rande // Math. Ann. – 1933. – **109**. – P. 60–82.
13. *Бабич В.М.* К вопросу о распространении функций // Успехи мат. наук. – 1953. – **8**, № 2 – С. 111–113.
14. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 708 с.

15. *Власова З.А.* О методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1959. – **53**. – С. 16–37.
16. *Миненко А.С.* Аналитичность свободной границы в одной задаче осесимметричного течения // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 12. – С. 1692–1700.

A. S. Minenko

On the minimization of one functional by Ritz method.

One nonlinear problem with the Bernoulli condition on a free boundary given by an inequality is studied by the variational method. The existence theorem is obtained. It is proved that approximate solutions based on the Ritz method convergent to an exact solution in certain metrics.

Keywords: *free boundary, functional, Ritz method, convergence, Bernoulli's law, existence theorem.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический ун-т»
sam_dntu@mail.ru

Получено 24.06.16