УДК 517.983.36

©2016. **Д. В. Лиманский**

О МИНИМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛИНОМАХ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, СЛАБО КОЭРЦИТИВНЫХ В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Рассматриваются минимальные дифференциальные полиномы с квазиоднородными главными частями, символы которых зависят от двух переменных. Получен критерий существования слабо коэрцитивных неквазиэллиптических операторов в анизотропных пространствах Соболева, а также построен пример широкого класса таких операторов.

Ключевые слова: *дифференциальный полином, слабая коэрцитивность, квазиэллиптичность.*

1. Введение. Пусть Ω – произвольная область в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$, $l := (l_1, \ldots, l_n)$ – вектор с натуральными компонентами, $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \cdots + \alpha_n/l_n$. Рассмотрим в $L^p(\Omega)$ систему дифференциальных операторов вида

$$P_j(x, D) = \sum_{|\alpha:l|\le 1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha, \qquad j \in \{1, \ldots, N\}, \tag{1}$$

с коэффициентами $a_{j\alpha}(\cdot) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Пусть далее $P^l_j(x, D) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x) D^\alpha$ – l-главная часть оператора $P_j(x, D)$, а $P^l_j(x, \xi) := \sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x)\xi^\alpha$ – его главный l-квазиоднородный символ. Напомним следующие определения.

Определение 1 [1, 2]. Систему дифференциальных операторов вида (1) называют *l-квазиэллиптической*, если

$$(P^l_1(x, \xi), \ldots, P^l_N(x, \xi)) \neq 0, \qquad (x, \xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

и, в частности, *эллиптической* порядка l, если $l_1 = \cdots = l_n = l$.

Определение 2 [1]. Система дифференциальных операторов вида (1) называется *коэрцитивной* в (анизотропном) пространстве Соболева $\mathring{W}^l_p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, если справедлива априорная оценка

$$\|f\|_{W^l_p(\Omega)} := \sum_{|\alpha:l|\le 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \le C_1 \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x, D) f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \tag{2}$$

в которой C_1 и C_2 не зависят от $f \in C^\infty_0(\Omega)$.

Хорошо известно [1–4], что при некоторых ограничениях на коэффициенты $a_{j\alpha}(\cdot)$ и область Ω, система (1) l-квазиэллиптична в точности тогда, когда она коэрцитивна в $\mathring{W}^l_p(\Omega)$ при $p \in (1, \infty)$. При $p = 1; \infty$ оценка (2) для l-квазиэллиптической системы утрачивает силу. Так, в случае $p=\infty$ М.М. Маламудом [5] было доказано, что из априорной оценки

$$\|Q(x,D)f\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_1\sum_{j=1}^N \|P_j(x,D)f\|_{L^\infty(\Omega)} + C_2\|f\|_{L^\infty(\Omega)}, \qquad f\in C_0^\infty(\Omega)$$

вытекает тождество

$$Q^l(x,\xi)=\sum_{j=1}^N \lambda_j(x)P_j^l(x,\xi), \qquad x\in\Omega, \quad \xi\in\mathbb{R}^n$$

для l-главных символов операторов $Q(x,D)$ и $P_j(x,D)$ (в случае операторов с постоянными коэффициентами это утверждение доказано еще ранее де Лю и Миркилом [6]). Отсюда следует, что l-квазиэллиптическая система является коэрцитивной в $\mathring{W}^l_\infty(\Omega)$ лишь в исключительных случаях.

Тем не менее для l-квазиэллиптической системы $\{P_j(x,D)\}_1^N$ верна более слабая оценка

$$\sum_{|\alpha:l|<1}\|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \le C_1\sum_{j=1}^N \|P_j(x,D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2\|f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f\in C_0^\infty(\Omega), \qquad (3)$$

при $p\in(1,\infty)$ вытекающая из оценки (2), а при $p=\infty$ доказанная в [5]. Отметим также, что невозможность оценки вида (2) при $p=1$ вытекает из результатов Орнстейна [7]. В то же время наличие оценки (3) при $p=1$ доказано (для случая операторов с постоянными коэффициентами) в работах [8, 9].

Эти результаты делают естественным следующее введенное в [9] определение.

Определение 3 [9]. Систему дифференциальных операторов вида (1) называют *слабо коэрцитивной* в (анизотропном) пространстве Соболева $\mathring{W}^l_p(\Omega)$, $p\in[1,\infty]$, если справедлива оценка (3), в которой C_1 и C_2 не зависят от f.

В случае изотропного пространства Соболева $\mathring{W}^l_p(\Omega)$, т. е. при $l_1=\cdots=l_n=l$, неравенство $|\alpha:l|<1$ в (3) принимает обычный вид: $|\alpha|<l$.

Для случая одного оператора еще ранее де Лю и Миркил [6] показали, что при $n\ge 3$ эллиптический оператор $P(D)=P_1(D)$ может быть охарактеризован при помощи априорных оценок в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Теорема де Лю и Миркила [6]. *При $n\ge 3$ эллиптичность дифференциального полинома порядка $l\ge 2$ эквивалентна его слабой коэрцитивности в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Условие $n\ge 3$ в теореме существенно. Так, в [6] приведен принадлежащий Мальгранжу пример слабо коэрцитивного в $\mathring{W}^2_\infty(\mathbb{R}^2)$, но не эллиптического оператора $P(D)=(D_1+i)(D_2+i)$.

В работе [10] автором и М.М. Маламудом теорема де Лю и Миркила распространена на систему операторов с постоянными коэффициентами, а также был получен ее аналог для оператора $P(x,D)$ с переменными коэффициентами. Кроме этого, в той же работе дано полное описание слабо коэрцитивных в изотропном пространстве Соболева $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$ операторов от двух переменных и построены примеры широких классов слабо коэрцитивных, но не эллиптических операторов в шкале изотропных пространств $\mathring{W}^l_p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in [1, \infty]$.

В настоящей работе рассматривается случай одного оператора $P(D_1, D_2)$ с постоянными коэффициентами от двух переменных с l-однородной главной частью, $l = (l_1, l_2)$, $l_1 > l_2$. Ясно, что l-квазиэллиптические операторы существуют для любых l, например, $P(D) = D_1^{l_1} + iD_2^{l_2}$. Изучается вопрос, при каких условиях: 1) l-квазиэллиптичность оператора от двух переменных эквивалентна его слабой коэрцитивности в анизотропном пространстве $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$, т. е. справедлив аналог теоремы де Лю и Миркила; 2) существуют слабо коэрцитивные в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$, но не l-квазиэллиптические операторы. На эти вопросы в статье получены исчерпывающие ответы. Оказалось, что: 1) утверждение справедливо в том и только том случае, когда l_1 не кратно l_2 (теорема 1); 2) в случае, когда l_1 кратно l_2, построены примеры широких классов слабо коэрцитивных в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$, но не l-квазиэллиптических операторов (теорема 2).

Отметим, что часть результатов работы анонсирована (без доказательств) в работах автора и М.М. Маламуда [9, 11].

2. Обозначения и вспомогательные утверждения.

Обозначения. Пусть $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}^n_+ := \mathbb{Z}_+ \times \cdots \times \mathbb{Z}_+$ (n сомножителей), $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$. Далее, $D_k := -i\partial/\partial x_k$, $D = (D_1, \ldots, D_n)$; для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ полагают $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$. Если $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, то $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \cdots + \alpha_n/l_n$. Пусть также $|x| := (\sum_{k=1}^n x_k^2)^{1/2}$, $\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$ для $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Для натуральных чисел m, n обозначим через (m, n) их наибольший общий делитель (НОД), а через $[m, n]$ – их наименьшее общее кратное (НОК).

Через $\mathscr{M}_p = \mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$ будет обозначаться алгебра мультипликаторов в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$; через $\widehat{f}$ $(\widehat{\mu})$ – преобразование Фурье (Фурье – Стилтьеса) функции f (меры μ); через δ – дельта-мера Дирака, а через $\chi(t)$ – функция Хевисайда в $\mathbb{R}$. Через $C^\infty(\Omega)$ обозначается множество функций, бесконечно дифференцируемых в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, а через $C_0^\infty(\Omega)$ – его подмножество функций, финитных (с компактным носителем) в Ω. Замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в норме $\|f\|_{W^l_p(\Omega)} := \sum_{|\alpha:l|\le 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}$ пространства Соболева $W^l_p(\Omega)$ обозначается как $\mathring{W}^l_p(\Omega)$.

Определение 4 [12]. Пусть $\mathscr{F}$ – преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{f} := \mathscr{F} f$. Ограниченную измеримую (по Лебегу) функцию $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называют *мультипликатором* в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, если оператор свертки

$$f \mapsto T_\Phi f =: \mathscr{F}^{-1} \Phi \mathscr{F} f$$

отображает $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ и ограничен в $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Мультипликаторы в $L^p(\mathbb{R}^n)$ образуют алгебру $\mathscr{M}_p = \mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$. Очевидно, финитные функции являются мультипликаторами, т. е. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$.

Известно полное описание алгебры $\mathscr{M}_p$ при $p = 1, 2, \infty$ (см. [12]). Нас интересует описание алгебры $\mathscr{M}_\infty(\mathbb{R}^n)$, обозначаемой далее просто $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ или $\mathscr{M}$.

Предложение 1 [12]. Алгебра $\mathscr{M}$ есть множество образов конечных борелевских мер в $\mathbb{R}^n$ относительно преобразования Фурье–Стилтьеса:

$$\Phi \in \mathscr{M} \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(\xi) = \widehat{\mu}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle}\, d\mu(x), \qquad \mu(\mathbb{R}^n) < \infty.$$

Из предложения 1 следует, что все функции $\Phi \in \mathscr{M}$ ограничены и равномерно непрерывны в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, из свойств преобразования Фурье вытекает, что алгебра мультипликаторов $\mathscr{M}$ инвариантна относительно отражений $\Phi(x) \mapsto \Phi(-x)$, сдвигов $\Phi(x) \mapsto \Phi(x-h)$, $h \in \mathbb{R}^n$ и растяжений $\Phi(x) \mapsto \Phi(rx)$, $r > 0$. Наконец, отметим, что $\mathscr{M}(\mathbb{R}^m) \subset \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ при $m < n$ [12].

Предложение 1 также дает возможность указать примеры "элементарных" мультипликаторов в L^∞, для которых порождающая их мера μ строится явно. Так, функция $\dfrac{1}{\xi_1 + i} \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$, поскольку является преобразованием Фурье–Стилтьеса конечной меры $\mu(t)$ на прямой с плотностью $d\mu(t) = -i\chi(t)e^{-t}\,dt$, где $\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда:

$$\widehat{\mu}(\xi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi_1 t}\, d\mu(t) = -i\int_0^{+\infty} e^{it\xi_1}e^{-t}\,dt = -\frac{-i}{i\xi_1 - 1} = \frac{1}{\xi_1 + i}.$$

Далее, для $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ функция $\dfrac{1}{\xi_1 + \omega}$ получается из $\dfrac{1}{\xi_1 + i}$ суперпозицией сдвига, растяжения и отражения и, следовательно, $\dfrac{1}{\xi_1 + \omega} \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$. Наконец, функция $\dfrac{\xi_1}{\xi_1 + \omega} \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ как разность мультипликаторов $1 = \widehat{\delta}$ и $\dfrac{\omega}{\xi_1 + \omega}$ (здесь δ – дельта-мера Дирака на прямой).

В работе [8] получены достаточные условия принадлежности функции $\Phi(\cdot)$ алгебре мультипликаторов $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$. Там же, в [8], из этого результата выведено следующее утверждение.

Предложение 2 [8]. Пусть $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $P(\xi)$ – l-квазиэллиптический полином. Тогда функции

$$m_\alpha(\xi) := \chi(\xi)\frac{\xi^\alpha}{P(\xi)}, \qquad |\alpha : l| < 1$$

являются мультипликаторами в $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$. Здесь $\chi(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – "срезающая" функция, $0 \leq \chi(\xi) \leq 1$, $\chi(\xi) = 0$ при $|\xi| \leq r$ и $\chi(\xi) = 1$ при $|\xi| > R$, где $0 \leq r < R$.

Отметим, что "срезающая" функция $\chi(\cdot)$ в предложении 2 определена корректно, так как множество нулей $\{\xi \in \mathbb{R}^n :\ P(\xi) = 0\}$ l-квазиэллиптического полинома $P(\xi)$ компактно (см. [8, 10]).

Пусть $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$ и $l_1 > l_2$. Рассмотрим полином от двух переменных

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha:l|\le 1} a_\alpha \xi^\alpha = \sum_{|\alpha:l|\le 1} a_{\alpha_1,\alpha_2}\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}, \qquad a_\alpha \in \mathbb{C}$$

с l-однородной главной частью

$$P^l(\xi) = \sum_{|\alpha:l|=1} a_\alpha \xi^\alpha.$$

Пусть $d := [l_1, l_2]$ – НОК чисел l_1 и l_2, $k := (l_1, l_2)$ – их НОД. Обозначим также

$$m_1 := \frac{d}{l_1}, \quad m_2 := \frac{d}{l_2}.$$

Ясно, что $(m_1, m_2) = 1$ и $d = km_1m_2$.

Соотношение $\dfrac{\alpha_1}{l_1} + \dfrac{\alpha_2}{l_2} = 1$, определяющее l-главную часть $P^l(\xi)$, можно переписать в виде $\langle \alpha, m\rangle := \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 = d$. Для всех остальных мономов ξ^α, входящих в $P(\xi)$, справедливо соотношение $\langle \alpha, m\rangle \le d-1$. Обозначим

$$P^{l-1}(\xi) = \sum_{\langle \alpha,m\rangle = d-1} a_\alpha \xi^\alpha.$$

Следующая лемма показывает, что множество $\{\alpha : \ \langle \alpha, m\rangle = d-1\}$ не пусто и, значит, $P^{l-1}(\xi)$ определен корректно.

Лемма 1. *Пусть $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$, $d = [l_1, l_2]$, $m_i = d/l_i$, $i = 1, 2$. Тогда уравнение*

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 = d - 1 \tag{4}$$

имеет целое неотрицательное решение.

Доказательство. При $m_1 = m_2 = 1$ утверждение леммы очевидно. Поэтому предполагаем, что $m_1 m_2 > 1$. Так как m_1 и m_2 взаимно просты, то уравнение (4) имеет целые решения. Пусть $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$ – одно из них. Тогда совокупность всех целых решений этого уравнения имеет вид

$$x_1 = x_1^0 - nm_2, \quad x_2 = x_2^0 + nm_1, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Если x_1 и x_2 – неотрицательные целые числа, то $x_1^0 - nm_2 \ge 0$ и $x_2^0 + nm_1 \ge 0$, откуда

$$-\frac{x_2^0}{m_1} \le n \le \frac{x_1^0}{m_2}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Т.е. уравнение (4) имеет целое неотрицательное решение, когда промежуток $\left[-\dfrac{x_2^0}{m_1}; \dfrac{x_1^0}{m_2}\right]$ содержит по крайней мере одно целое число. Длина этого промежутка равна $\left|\dfrac{x_1^0}{m_2}+\dfrac{x_2^0}{m_1}\right|=\dfrac{d-1}{m_1m_2}=k-\dfrac{1}{m_1m_2}$. Если $k\geq 2$, то $k-\dfrac{1}{m_1m_2}>1$ и требуемое n найдется.

Пусть $k=1$. Предположим противное, т.е. что

$$n<-\frac{x_2^0}{m_1}\leq\frac{x_1^0}{m_2}<n+1$$

для некоторого целого n. Тогда $-\dfrac{x_2^0}{m_1}-n\geq\dfrac{1}{m_1}$, $n+1-\dfrac{x_1^0}{m_2}\geq\dfrac{1}{m_2}$ и

$$1=(n+1)-n\geq\frac{x_1^0}{m_2}+\frac{1}{m_2}+\frac{x_2^0}{m_1}+\frac{1}{m_1}=1+\frac{m_1+m_2-1}{m_1m_2}>1.$$

Противоречие. Лемма доказана. $\square$

Пусть $\alpha_i,a_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2$. Рассмотрим теперь, каков будет результат подстановки функций

$$\xi_i=\xi_i(t)=\alpha_it^{m_i}+a_i,\qquad t>0,\quad i=1,2,$$

в полиномы $P^l(\xi)$ и $P^{l-1}(\xi)$. Применяя формулу Тейлора в точке $(\alpha_1t^{m_1},\alpha_2t^{m_2})$ с приращениями a_1,a_2, имеем

$$P^l(\alpha_1t^{m_1}+a_1,\alpha_2t^{m_2}+a_2)=t^dP^l(\alpha_1,\alpha_2)+\sum_{i=1}^{2}a_it^{d-m_i}\frac{\partial P^l}{\partial\xi_i}(\alpha_1,\alpha_2)+o(t^{d-1}),\quad t\to+\infty.$$

Аналогично

$$P^{l-1}(\alpha_1t^{m_1}+a_1,\alpha_2t^{m_2}+a_2)=t^{d-1}P^{l-1}(\alpha_1,\alpha_2)+o(t^{d-1}),\qquad t\to+\infty.$$

Поясним написанное. В полином $P^l(\xi)$ входят мономы вида $b_\beta\xi^\beta$, для которых $\langle\beta,m\rangle=\beta_1m_1+\beta_2m_2=d$. Поэтому

$$\begin{aligned}P^l(\alpha_1t^{m_1},\alpha_2t^{m_2})&=\sum_{\langle\beta,m\rangle=d}b_\beta\left(\alpha_1t^{m_1}\right)^{\beta_1}\left(\alpha_2t^{m_2}\right)^{\beta_2}=\\&=\sum_{\langle\beta,m\rangle=d}b_\beta\alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}t^{\langle\beta,m\rangle}=t^dP^l(\alpha_1,\alpha_2).\end{aligned}$$

Далее,

$$\frac{\partial P^l}{\partial\xi_1}(\alpha_1t^{m_1},\alpha_2t^{m_2})=\sum_{\langle\beta,m\rangle=d}b_\beta\beta_1\left(\alpha_1t^{m_1}\right)^{\beta_1-1}\left(\alpha_2t^{m_2}\right)^{\beta_2}=t^{d-m_1}\frac{\partial P^l}{\partial\xi_1}(\alpha_1,\alpha_2).$$

Аналогично обосновываются формулы

$$\frac{\partial P^l}{\partial\xi_2}(\alpha_1t^{m_1},\alpha_2t^{m_2})=t^{d-m_2}\frac{\partial P^l}{\partial\xi_2}(\alpha_1,\alpha_2)\quad\text{и}\quad P^{l-1}(\alpha_1t^{m_1},\alpha_2t^{m_2})=t^{d-1}P^{l-1}(\alpha_1,\alpha_2).$$

Приведем несколько утверждений, касающихся априорных оценок в L^∞.

Лемма Эберлейна [6]. *Пусть* μ *– конечная мера в* $\mathbb{R}^n$ *и* $c = \mu(0)$. *Тогда функция* $f(x) \equiv c$ *равномерно приближается выпуклыми комбинациями сдвигов функции* $M(\xi) := \widehat{\mu}(\xi)$, *т. е.*

$$\sum_{i=1}^{m} c_i M(\xi - \xi^i) \rightrightarrows c, \qquad \text{где} \quad c_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{m} c_i = 1, \quad \xi^i \in \mathbb{R}^n.$$

Предложение 3 [6]. Пусть $Q(D)$ и $P(D)$ – дифференциальные полиномы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда априорная оценка

$$\|Q(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C_1 \|P(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{5}$$

эквивалентна тождеству для их символов

$$Q(\xi) = M(\xi)P(\xi) + N(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

где $M(\xi)$, $N(\xi)$ – мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 4 [5, 6]. Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, $Q(D)$ и $P(D)$ – дифференциальные полиномы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ с l-главными символами $Q^l(\xi)$ и $P^l(\xi)$. Тогда из априорной оценки (5) вытекает тождество

$$Q^l(\xi) = cP^l(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

причем $c = \mu(0)$, где μ – конечная мера, порождающая функцию $M(\xi)$ из тождества (6), т.е. $M(\xi) = \widehat{\mu}(\xi)$.

3. Случай, когда l_1 не кратно l_2.

Предложение 5. Пусть $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$, $l_1 > l_2$ и l_1 не делится на l_2; $P(D)$ – оператор, слабо коэрцитивный в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$. Тогда его главный символ $P^l(\xi)$ не может иметь вещественных нулей $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, для которых $\alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что существует точка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, такая, что $P^l(\alpha) = 0$. Выберем моном $Q(\xi) = \xi^\beta$ с условиями $\langle \beta, m \rangle = d - 1$ и $Q(\alpha) = 1$ (такой моном существует в силу леммы 1). Так как $P(D)$ слабо коэрцитивен в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$, то в силу предложения 3 найдутся мультипликаторы $M(\xi)$ и $N(\xi)$ в $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ такие, что справедливо тождество

$$Q(\xi) = M(\xi)P(\xi) + N(\xi) = M(\xi)\left[P^l(\xi) + P^{l-1}(\xi) + \dots\right] + N(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{7}$$

Подставим в тождество (7) вектор-функцию

$$\xi = \xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t)) := \left(\alpha_1 t^{m_1} + a_1,\ \alpha_2 t^{m_2} + a_2\right), \qquad t > 0, \tag{8}$$

где $a_i \in \mathbb{R}$ – произвольные числа. С учетом вычислений п. 2 при $t \to +\infty$ имеем

$$t^{d-1} = M\left(\xi(t)\right)\left[t^d P^l(\alpha) + \sum_{i=1}^{2} a_i t^{d-m_i} \frac{\partial P^l}{\partial \xi_i}(\alpha) + t^{d-1} P^{l-1}(\alpha) + o(t^{d-1})\right] + N\left(\xi(t)\right). \tag{9}$$

Проанализируем последнее тождество. По нашему предположению, $P^l(\alpha)=0$. Так как l_1 не делится на l_2, то $d>l_1>l_2$, откуда $1<m_1<m_2$ и, значит, $d-1>$ $>d-m_i$, $i=1,2$. Поэтому выражение в (9) под знаком суммы есть $o(t^{d-1})$. Если и $P^{l-1}(\alpha)=0$, то вся правая часть (9) есть $o(t^{d-1})$, и мы получаем противоречие. Значит, $c^{-1}:=P^{l-1}(\alpha)\neq 0$, и тождество (9) принимает вид

$$t^{d-1}=M\left(\xi(t)\right)\left[c^{-1}t^{d-1}+o(t^{d-1})\right]+N\left(\xi(t)\right). \tag{10}$$

Разделив обе части (10) на t^{d-1} и устремив $t\to+\infty$, получим

$$\lim_{t\to+\infty}M(\xi(t))=c\ (\neq 0)\quad \text{для всех }\ \xi(t)\ \text{ вида (8).} \tag{11}$$

Покажем, что последнее соотношение невозможно. В силу леммы Эберлейна, найдутся числа $m\in\mathbb{N}$, $c_i>0$, $c_1+...+c_m=1$ и векторы $\xi^1,...,\xi^m\in\mathbb{R}^2$ такие, что

$$\left|\sum_{i=1}^m c_iM(\xi-\xi^i)\right|\leq\frac{|c|}{2}\qquad\text{для всех}\quad \xi\in\mathbb{R}^2.$$

Подставим в это неравенство функции $\xi=\xi(t)$ вида (8). Тогда функции $\widetilde{\xi}(t):=$ $:=\xi(t)-\xi^i$ будут также иметь вид (8). Переходя в полученном неравенстве

$$\left|\sum_{i=1}^m c_iM(\widetilde{\xi}(t))\right|\leq\frac{|c|}{2},\qquad t>0,$$

к пределу при $t\to+\infty$ с учетом (11), имеем $|c|\leq\dfrac{|c|}{2}$, что неверно при $c\neq 0$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения. □

Предложение 6. Пусть $l=(l_1,l_2)\in\mathbb{N}^2$, $l_1>l_2$ и l_1 не делится на l_2; $P(D)$ – оператор, слабо коэрцитивный в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$. Тогда его главный символ $P^l(\xi)$ не может иметь вещественных нулей вида $\alpha=(\alpha_1,0)$ и $\alpha=(0,\alpha_2)$, $\alpha_i\neq 0$.

Доказательство. (i) Пусть, от противного, $P^l(\alpha_1,0)=0$ для некоторого $\alpha_1\neq 0$. Тогда моном $\xi_1^{l_1}$ не входит в запись $P^l(\xi)$. Будем говорить, что точка $\beta\in\mathbb{Z}^2_+$ соответствует полиному $P(\xi)$, если в его запись входит моном ξ^β. Проведем в плоскости (α_1,α_2) вертикальную прямую $\alpha_1=l_1-1$. В полуплоскости $\alpha_1\geq l_1-1$ нет точек, соответствующих $P(\xi)$, кроме, возможно, точки $(l_1-1,0)$. В самом деле, на прямой $\alpha_1=l_1$ такой точкой могла быть лишь $(l_1,0)$, но она не соответствует $P(\xi)$ по нашему предположению. Если же $\alpha_1=l_1-1$ и $\alpha_1/l_1+\alpha_2/l_2\leq 1$, то $\alpha_2\leq l_2/l_1$. По условию, $l_2/l_1<1$, поэтому $\alpha_2=0$.

Будем поворачивать прямую $\alpha_1=l_1-1$ около точки $(l_1-1,0)$ в сторону против положительного направления оси α_1 (против часовой стрелки) до тех пор, пока на ней не появится хотя бы одна точка, отличная от $(l_1-1,0)$, соответствующая $P(\xi)$. Обозначим через l' вектор, соответствующий этой прямой. По построению, эта прямая будет l'-главной для $P(\xi)$. Тогда l'-главная часть символа $P(\xi)$ имеет вид

$$P^{l'}(\xi) = a_{l_1-1,0}\,\xi_1^{l_1-1} + \sum_{|\beta:l'|=1,\ \beta\neq(l_1-1,0)} a_\beta \xi^\beta,$$

где одно из чисел a_β в сумме отлично от нуля. Ясно, что если $Q(\xi) = \xi_1^{l_1-1}$, то $Q^{l'}(\xi) = Q(\xi)$. Поскольку $Q(D)$ подчинен $P(D)$ (в смысле оценки (5)), то, согласно предложению 4, $Q^{l'}(\xi) \equiv cP^{l'}(\xi)$, т. е.

$$\xi_1^{l_1-1} \equiv c\left[a_{l_1-1,0}\,\xi_1^{l_1-1} + \sum_{|\beta:l'|=1,\ \beta\neq(l_1-1,0)} a_\beta \xi^\beta\right],$$

откуда следуют соотношения

$$ca_{l_1-1,0} \equiv 1, \qquad \sum_{|\beta:l'|=1,\ \beta\neq(l_1-1,0)} ca_\beta \xi^\beta \equiv 0,$$

противоречивые ввиду сделанных выше предположений на числа a_β. Таким образом, $P^l(\xi)$ не может иметь нулей вида $(\alpha_1, 0)$, где $\alpha_1 \neq 0$.

(ii) Пусть теперь $P^l(0, \alpha_2) = 0$ для некоторого $\alpha_2 \neq 0$. Доказательство для этого случая совершенно аналогично и получается заменой в предыдущем рассуждении оси α_1 на ось α_2 и наоборот. Изменения этого рассуждения состоят в следующем. Прямая $\alpha_2 = l_2 - 1$ пересекает l-главную прямую в точке $(l_1/l_2, l_2 - 1)$, которая не может соответствовать символу $P(\xi)$, поскольку по условию число l_1/l_2 не целое. Выберем на прямой $\alpha_2 = l_2 - 1$ целую точку с максимальной абсциссой, соответствующую $P(\xi)$. Эта точка, как уже было отмечено, не лежит на l-главной прямой. Теперь будем поворачивать прямую $\alpha_2 = l_2 - 1$ по часовой стрелке, но не около точки $(0, l_2 - 1)$, а около выбранной точки. Далее точно так же, как в пункте (i), получаем противоречие с предложением 4. $\Box$

Доказанные предложения 5 и 6 означают, что в случае, когда l_1 не кратно l_2, l-главный символ $P^l(\xi)$ слабо коэрцитивного в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$ оператора $P(D)$ обращается в нуль лишь при $\xi = 0$. Отсюда следует теорема.

Теорема 1. *Пусть $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$, $l_1 > l_2$. Если $[l_1, l_2] > l_1$, то слабая коэрцитивность оператора $P(D)$ в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$ эквивалентна его l-квазиэллиптичности.*

4. Случай, когда l_1 кратно l_2.

Теорема 2. *Пусть $l := (km, k) \in \mathbb{N}^2$, $k, m \geq 2$; $l' := ((k-1)m, k-1)$, $R(D)$ – l'-квазиэллиптический оператор, $S(D_1)$ – обыкновенный дифференциальный оператор порядка m, полный символ которого невырожден, т.е. $S(\xi_1) \neq 0$ при всех $\xi_1 \in \mathbb{R}$. Тогда оператор $P(D)$ вида*

$$P(D) = S(D_1)R(D)$$

слабо коэрцитивен в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Покажем, что функции

$$\Phi_\gamma(\xi) := \chi(\xi)\frac{\xi^\gamma}{P(\xi)} \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^2), \qquad \text{если} \quad |\gamma : l| < 1. \tag{12}$$

Здесь $\chi(\xi)$ – соответствующая "срезающая" функция (см. предложение 2).

Пусть сначала $\gamma_2 < k-1$ и $\gamma_1 \geq m$. Вместе с неравенством $\dfrac{\gamma_1}{km} + \dfrac{\gamma_2}{k} < 1$ это дает $\dfrac{\gamma_1 - m}{(k-1)m} + \dfrac{\gamma_2}{k-1} < 1$. Тогда $\Phi_\gamma \in \mathscr{M}$ как произведение мультипликаторов $m_1(\xi) := \dfrac{\xi_1^m}{S(\xi_1)}$ и $m_2(\xi) := \chi(\xi)\dfrac{\xi_1^{\gamma_1 - m}\xi_2^{\gamma_2}}{R(\xi)}$. Действительно, так как $S_1(\xi_1) \neq 0$ при $\xi_1 \in \mathbb{R}$, т.е. $S_1(\xi_1) = A(\xi_1 - \omega_1)\ldots(\xi_1 - \omega_m)$, где $A \neq 0$ и $\omega_k \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $k = \overline{1,m}$, то

$$m_1(\xi) = \frac{\xi_1^m}{S(\xi_1)} = \frac{1}{A}\prod_{k=1}^m \frac{\xi_1}{\xi_1 - \omega_k} \in \mathscr{M}$$

как произведение "элементарных" мультипликаторов (см. п. 2). Функция $m_2 \in \mathscr{M}$, так как $\tilde{\gamma} := (\gamma_1 - m, \gamma_2)$ удовлетворяет условию $|\tilde{\gamma} : l'| < 1$ и $R(\xi)$ – l'-квазиэллиптический полином (предложение 2). Таким образом, $\Phi_\gamma \in \mathscr{M}$ при $\gamma_1 \geq m,\ \gamma_2 < k-1$.

Если $\gamma_2 < k-1$ и $\gamma_1 < m$, то, аналогично предыдущему, $\Phi_\gamma \in \mathscr{M}$ как произведение двух мультипликаторов $m_1(\xi) := \dfrac{\xi_1^{\gamma_1}}{S(\xi_1)}$ и $m_2(\xi) := \chi(\xi)\dfrac{\xi_2^{\gamma_2}}{R(\xi)}$.

Наконец, рассмотрим случай $\gamma_2 = k-1$. Тогда $\gamma_1 < m$. Пусть $R(\xi) = c_0\xi_2^{k-1} + \ldots$, $c_0 \neq 0$, где многоточием обозначена сумма мономов $a_\alpha \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}$, для которых $\alpha_2 < k-1$. Тогда, вычитая из Φ_γ мультипликатор $m_1(\xi) := c_0^{-1}\chi(\xi)\dfrac{\xi_1^{\gamma_1}}{S(\xi_1)}$, получим:

$$\Phi_\gamma(\xi) - m_1(\xi) = \chi(\xi)\frac{\xi_1^{\gamma_1}}{S(\xi_1)} \cdot \frac{\xi_2^{k-1} - c_0^{-1}R(\xi)}{R(\xi)}.$$

Числитель последней дроби содержит ξ_2 в степени, меньшей $k-1$, и поэтому функция $m_2(\xi) := \chi(\xi)\dfrac{\xi_2^{k-1} - c_0^{-1}R(\xi)}{R(\xi)}$ – произведение функций вида $\chi(\xi)\dfrac{\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}}{R(\xi)}$, для которых $|\alpha : l'| < 1$ и $\alpha_2 < k-1$. По доказанному выше, $m_2 \in \mathscr{M}$. Поэтому $\Phi_\gamma = m_1(1 + c_0 m_2) \in \mathscr{M}$.

Теперь покажем, что из включений (12) вытекает оценка

$$\sum_{|\gamma:l|<1} \|D^\gamma f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C_1\|P(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} + C_2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \tag{13}$$

означающая слабую коэрцитивность $P(D)$ в $\mathring{W}^l_\infty(\mathbb{R}^2)$. Рассмотрим тождество

$$\xi^\gamma = \Phi_\gamma(\xi)P(\xi) + (1 - \chi(\xi))\,\xi^\gamma, \qquad |\gamma : l| < 1.$$

Функция $\Psi_\gamma(\xi) := (1 - \chi(\xi))\xi^\gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{M}$. Тогда $\xi^\gamma = \Phi_\gamma(\xi)P(\xi) + \Psi_\gamma(\xi)$, где $\Phi_\gamma, \Psi_\gamma \in \mathscr{M}$, $|\gamma : l| < 1$. Оценка (13) вытекает теперь из предложения 3. □

1. *Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1996. – 480 с.
2. *Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г.* Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 312 с.
3. *Бесов О.В.* О коэрцитивности в анизотропном пространстве С.Л. Соболева // Матем. сборник. – 1967. – **73** (115), № 4. – С. 585–599.
4. *Хермандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – М.: Мир, 1959. – 252 с.
5. *Маламуд М.М.* Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$ // Труды ММО. – 1995. – **56**. – С. 206–261.
6. *De Leeuw K., Mirkil H.* A priori estimates for differential operators in L_∞ norm // Illinois J. Math. – 1964. – **8**. – P. 112–124.
7. *Ornstein D.* A non-equality for differential operators in the L_1 norm // Arch. Rational Mech. Anal. – 1962. – **11**. – P. 40–49.
8. *Belinsky E.S., Dvejrin M.Z., and Malamud M.M.* Multipliers in L_1 and estimates for systems of differential operators // Russian J. of Math. Phys. – 2005. – **12**, № 1. – P. 6–16.
9. *Лиманский Д.В., Маламуд М.М.* О слабой коэрцитивности систем дифференциальных операторов в L^1 и L^∞ // ДАН. – 2004. – **397**, № 4. – С. 453–458.
10. *Лиманский Д.В., Маламуд М.М.* Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева // Матем. сборник. – 2008. – **199**, № 11. – С. 75–112.
11. *Лиманский Д.В., Маламуд М.М.* Слабо коэрцитивные неквазиэллиптические системы дифференциальных операторов в $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ // ДАН. – 2007. – **415**, № 5. – С. 583–588.
12. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973. – 344 с.

D. V. Limanskii

On minimal differential polynomials in two variables weakly coercive in the anisotropic Sobolev spaces.

Minimal differential polynomials with quasihomogeneous principal parts which symbols depend on two variables are considered. The criterion of existence of weakly coercive non-quasielliptic operators in the anisotropic Sobolev spaces is obtained and also the example of a wide class of such operators is constructed.

Keywords: *differential polynomial, weak coercivity, quasiellipticity.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т»,
ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
4125aa@gmail.com

Получено 20.07.16