УДК 531.38

©2016. **Ю. В. Кошель**

О ПРЕЦЕССИОННО-ИЗОКОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

Исследованы условия существования прецессионно-изоконических движений тяжелого гиростата, несущего два ротора. В случае, когда гиростатический момент ортогонален оси собственного вращения гиростата, получено новое решение уравнений вращения.

Ключевые слова: *гиростат, прецессионные и изоконические движения.*

1. Введение. В задачах динамики твердого тела и гиростата с неподвижной точкой проведены многочисленные исследования свойств движения, что дало возможность получить классификацию движений [1–4]. При этом были рассмотрены: задача о движении тяжелого твердого тела, задача о движении гиростата с постоянным гиростатическим моментом и задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил для случаев постоянного и переменного гиростатических моментов. В классификации движений гиростата особое место занимают прецессионные и изоконические движения. Прецессионное движение характеризуется постоянством угла между прямой, фиксированной в теле, и прямой, которая является неподвижной в пространстве [2]. Изоконические движения гиростата были выделены в процессе применения теоремы Пуансо и кинематических уравнений Харламова [5]. Они исследованы как в классической задаче [6], так и в обобщенной задаче динамики твердого тела [7, 8]. Эти движения характеризуются свойством симметричности подвижного и неподвижного аксоидов угловой скорости относительно касательной к ним плоскости. Если движение гиростата обладает свойством прецессионности и изоконичности, то оно называется прецессионно-изоконическим [2]. В монографии [2] приведен обзор результатов, полученных в исследовании прецессионно-изоконических движений гиростата с постоянным гиростатическим моментом.

В динамике твердого тела на основе уравнений П.В. Харламова [9] изучается и задача об условиях существования прецессионных и изоконических движений гиростата с учетом переменности гиростатического момента (см. например [10–13]). В данной работе исследуются прецессионно-изоконические движения тяжелого гиростата, несущего два ротора. Показано, что в случае, когда гиростатический момент ортогонален оси собственного вращения гиростата, уравнения движения имеют новое решение в элементарных функциях времени.

2. Постановка задачи. Основные соотношения. Уравнения движения тяжелого гиростата, несущего два ротора, имеют вид [9]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2\boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\omega} - (\dot{\lambda}_1\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2\boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\nu} \times \mathrm{s}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – единичные ортогональные векторы, фиксированные в теле-носителе; $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ – дифференцируемые функции времени, являющиеся компонентами гиростатического момента в базисе векторов $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором центра масс гиростата; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; точка над переменными обозначает дифференцирование по времени t.

Рассмотрим прецессионные движения гиростата относительно вертикали. Пусть третья ось подвижной системы координат направлена по единичному вектору $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$, который образует постоянный угол с вектором $\boldsymbol{\nu}$. Тогда [2]

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0 = \cos\theta_0, \qquad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}, \tag{3}$$

где θ_0, φ, ψ – углы эйлера.

Исследуем случай, когда кроме свойства прецессионности выполняется свойство изоконичности. В качестве условия изоконичности может быть принято равенство $\dot{\psi} = \dot{\varphi}$ [2]. Тогда из второго соотношения (3) следует

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\nu}). \tag{4}$$

При выполнении равенств (3) уравнение Пуассона (2) интегрируется

$$\nu_1 = a_0' \sin\varphi, \qquad \nu_2 = a_0' \cos\varphi, \qquad \nu_3 = a_0, \tag{5}$$

где $a_0' = \sin\theta_0$. В скалярном виде из (4) в силу (5) получим

$$\omega_1 = a_0'\dot{\varphi}\sin\varphi, \qquad \omega_2 = a_0'\dot{\varphi}\cos\varphi, \qquad \omega_3 = \dot{\varphi}(a_0 + 1). \tag{6}$$

В базисе $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ скалярные уравнения, вытекающие из (1), имеют вид

$$\dot{\lambda}_1 - \lambda_2\big[a_0'\gamma_1\sin\varphi + a_0'\gamma_2\cos\varphi + (1 + a_0)\gamma_3\big]\dot{\varphi} + F_1(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = 0, \tag{7}$$

$$\dot{\lambda}_2 + \lambda_1\big[a_0'\gamma_1\sin\varphi + a_0'\gamma_2\cos\varphi + (1 + a_0)\gamma_3\big]\dot{\varphi} + F_2(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = 0, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\Big\{\lambda_2\big[a_0'\lambda_1\sin\varphi + a_0'\lambda_2\cos\varphi + (1 + a_0)\lambda_3\big] - \\ &-\lambda_1\big[a_0'\beta_1\sin\varphi + a_0'\beta_2\cos\varphi + (1 + a_0)\beta_3\big]\Big\}\dot{\varphi} + F_3(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = 0,\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}&F_1(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = \big[d_{1,1}'\sin\varphi + d_{1,1}\cos\varphi + (1 + a_0)d_{0,1}\big]\ddot{\varphi} - \\ &-\Big\{A_{2,1}\cos 2\varphi + A_{2,1}'\sin 2\varphi - \big[d_{1,1}' - (1 + a_0)A_{1,1}\big]\cos\varphi + \\ &+\big[d_{1,1} + (1 + a_0)A_{1,1}'\big]\sin\varphi - \kappa_0 A_{0,1}\Big\}\dot{\varphi}^2 + \delta_{1,1}\cos\varphi + \delta_{1,1}'\sin\varphi + \delta_{0,1},\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&F_2(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = \big[d_{1,2}'\sin\varphi + d_{1,2}\cos\varphi + (1 + a_0)d_{0,2}\big]\ddot{\varphi} - \\ &-\Big\{A_{2,2}\cos 2\varphi + A_{2,2}'\sin 2\varphi - \big[d_{1,2}' - (1 + a_0)A_{1,2}\big]\cos\varphi + \\ &+\big[d_{1,2} + (1 + a_0)A_{1,2}'\big]\sin\varphi - \kappa_0 A_{0,2}\Big\}\dot{\varphi}^2 + \delta_{1,2}\cos\varphi + \delta_{1,2}'\sin\varphi + \delta_{0,2},\end{aligned} \tag{11}$$

$$
\begin{aligned}
&F_3(\varphi,\dot\varphi,\ddot\varphi)=\big[d'_{1,3}\sin\varphi+d_{1,3}\cos\varphi+(1+a_0)d_{0,3}\big]\ddot\varphi-\\
&-\Big\{A_{2,3}\cos 2\varphi+A'_{2,3}\sin 2\varphi-\big[d'_{1,3}-(1+a_0)A_{1,3}\big]\cos\varphi+\\
&+\big[d_{1,3}+(1+a_0)A'_{1,3}\big]\sin\varphi-\kappa_0A_{0,3}\Big\}\dot\varphi^2+\delta_{1,3}\cos\varphi+\delta'_{1,3}\sin\varphi+\delta_{0,3}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

В (10)–(12) введены обозначения

$$
\begin{gathered}
d_{0,1}=\alpha_1A_{13}+\alpha_2A_{23}+\alpha_3A_{33},\qquad d'_{1,1}=a'_0(\alpha_1A_{11}+\alpha_2A_{12}+\alpha_3A_{13}),\\
d_{1,1}=a'_0(\alpha_1A_{12}+\alpha_2A_{22}+\alpha_3A_{23}),\qquad A_{0,1}=\alpha_2A_{13}-\alpha_1A_{23},\\
A_{1,1}=a'_0\big[\alpha_1(A_{22}-A_{33})-\alpha_2A_{12}+\alpha_3A_{13}\big],\\
A'_{1,1}=a'_0\big[\alpha_2(A_{33}-A_{11})+\alpha_1A_{12}-\alpha_3A_{23}\big],\\
A_{2,1}=\tfrac12{a'_0}^2(2\alpha_3A_{12}-\alpha_1A_{23}-\alpha_2A_{13}),\\
A'_{2,1}=\tfrac12{a'_0}^2\big[\alpha_2A_{23}-\alpha_1A_{13}+\alpha_3(A_{11}-A_{22})\big],\\
\delta_{1,1}=a'_0(\alpha_1s_3-\alpha_3s_1),\qquad \delta'_{1,1}=a'_0(\alpha_3s_2-\alpha_2s_3),\\
\delta_{0,1}=a_0(\alpha_2s_1-\alpha_1s_2),\qquad \kappa_0=\tfrac12(a_0+1)(3a_0+1).
\end{gathered}
\tag{13}
$$

$$
\begin{gathered}
d_{0,2}=\beta_1A_{13}+\beta_2A_{23}+\beta_3A_{33},\qquad d'_{1,2}=a'_0(\beta_1A_{11}+\beta_2A_{12}+\beta_3A_{13}),\\
d_{1,2}=a'_0(\beta_1A_{12}+\beta_2A_{22}+\beta_3A_{23}),\qquad A_{0,2}=\beta_2A_{13}-\beta_1A_{23},\\
A_{1,2}=a'_0\big[\beta_1(A_{22}-A_{33})-\beta_2A_{12}+\beta_3A_{13}\big],\\
A'_{1,2}=a'_0\big[\beta_2(A_{33}-A_{11})+\beta_1A_{12}-\beta_3A_{23}\big],\\
A_{2,2}=\tfrac12{a'_0}^2(2\beta_3A_{12}-\beta_1A_{23}-\beta_2A_{13}),\\
A'_{2,2}=\tfrac12{a'_0}^2\big[\beta_2A_{23}-\beta_1A_{13}+\beta_3(A_{11}-A_{22})\big],\\
\delta_{1,2}=a'_0(\beta_1s_3-\beta_3s_1),\qquad \delta'_{1,2}=a'_0(\beta_3s_2-\beta_2s_3),\\
\delta_{0,2}=a_0(\beta_2s_1-\beta_1s_2).
\end{gathered}
\tag{14}
$$

$$
\begin{gathered}
d_{0,3}=\gamma_1A_{13}+\gamma_2A_{23}+\gamma_3A_{33},\qquad d'_{1,3}=a'_0(\gamma_1A_{11}+\gamma_2A_{12}+\gamma_3A_{13}),\\
d_{1,3}=a'_0(\gamma_1A_{12}+\gamma_2A_{22}+\gamma_3A_{23}),\qquad A_{0,3}=\gamma_2A_{13}-\gamma_1A_{23},\\
A_{1,3}=a'_0\big[\gamma_1(A_{22}-A_{33})-\gamma_2A_{12}+\gamma_3A_{13}\big],\\
A'_{1,2}=a'_0\big[\beta_2(A_{33}-A_{11})+\beta_1A_{12}-\beta_3A_{23}\big],\\
A_{2,3}=\tfrac12{a'_0}^2(2\gamma_3A_{12}-\gamma_1A_{23}-\gamma_2A_{13}),\\
A'_{2,3}=\tfrac12{a'_0}^2\big[\gamma_2A_{23}-\gamma_1A_{13}+\gamma_3(A_{11}-A_{22})\big],\\
\delta_{1,3}=a'_0(\gamma_1s_3-\gamma_3s_1),\qquad \delta'_{1,3}=a'_0(\gamma_3s_2-\gamma_2s_3),\\
\delta_{0,3}=a_0(\gamma_2s_1-\gamma_1s_2).
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Таким образом, прецессионно-изоконические движения (5), (6) описываются дифференциальными уравнениями (7)–(9), в которых введены обозначения (10)–

(15). Отметим, что уравнения (7), (8) являются линейными дифференциальными уравнениями относительно λ_1, λ_2, и нелинейными относительно $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}$.

3. Редукция уравнений (7)–(9)**.** Рассмотрим уравнения (7)–(9) в предположении, что гиростатический момент ортогонален оси собственного вращения. Тогда, полагая в (7)–(9)

$$\boldsymbol{\alpha} = (1,0,0), \qquad \boldsymbol{\beta} = (0,1,0), \qquad \boldsymbol{\gamma} = (0,0,1), \tag{16}$$

получим

$$\dot{\varphi}\big[\lambda_1' - (1+a_0)\lambda_2\big] + F_1(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi}) = 0, \tag{17}$$

$$\dot{\varphi}\big[\lambda_2' + (1+a_0)\lambda_1\big] + F_2(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi}) = 0, \tag{18}$$

$$a_0'\dot{\varphi}(\lambda_2\sin\varphi - \lambda_1\cos\varphi) + F_3(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi}) = 0, \tag{19}$$

где штрихом обозначена производная по переменной φ, а функции $F_i(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi})$ имеют вид (10)–(12), в которых учтены формулы (16).

Введем вместо λ_1, λ_2 новые переменные

$$u = \lambda_2\sin\varphi - \lambda_1\cos\varphi, \qquad v = \lambda_2\cos\varphi + \lambda_1\sin\varphi. \tag{20}$$

Найдя производные u', v' из (20) и подставив значения λ_1', λ_2' из (17), (18) соответственно, получим следующие уравнения:

$$u' = -a_0 v + \frac{1}{\dot{\varphi}}\big[F_1(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi})\cos(\varphi) - F_2(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi})\sin\varphi\big], \tag{21}$$

$$v' = a_0 u - \frac{1}{\dot{\varphi}}\big[F_1(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi})\sin(\varphi) + F_2(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi})\cos\varphi\big], \tag{22}$$

$$a_0' u\dot{\varphi} + F_3(\varphi,\dot{\varphi},\ddot{\varphi}) = 0. \tag{23}$$

Пусть в уравнениях (21)–(23) $a_0 = 0 \quad (\theta_0 = \pi/2)$. Введя функцию $\dot{\varphi} = f(\varphi)$, из (21)–(23) имеем

$$u' = \frac{1}{f(\varphi)}\big[F_1(\varphi,f(\varphi),f'(\varphi))\cos\varphi - F_2(\varphi,f(\varphi),f'(\varphi))\sin\varphi\big], \tag{24}$$

$$v' = -\frac{1}{f(\varphi)}\big[F_1(\varphi,f(\varphi),f'(\varphi))\sin\varphi + F_2(\varphi,f(\varphi),f'(\varphi))\cos\varphi\big], \tag{25}$$

$$uf(\varphi) + F_3(\varphi,f(\varphi),f'(\varphi)) = 0. \tag{26}$$

Здесь штрихом обозначена производная по переменной φ. При $f(\varphi) \neq 0$, из уравнения (26) следует

$$u = -\frac{F_3(\varphi,f(\varphi),f'(\varphi))}{f(\varphi)}. \tag{27}$$

В силу (27) уравнение (24) принимает вид

$$(F_1\cos(\varphi) - F_2\sin(\varphi))f(\varphi) + F_3' f(\varphi) - F_3 f'(\varphi) = 0. \tag{28}$$

Подставив в (28) значения F_1, F_2, F_3 из (10)–(12), в которых учтена замена $\dot{\varphi} = f(\varphi)$, получим

$$\begin{aligned}&(A_{13}\sin\varphi + A_{23}\cos\varphi + A_{33})f''(\varphi)f^2(\varphi) + \bigl[s_1\cos\varphi - s_2\sin\varphi -\\ &-2f^2(\varphi)(A_{23}\sin\varphi - A_{13}\cos\varphi)\bigr]f'(\varphi) + (s_1\sin\varphi + s_2\cos\varphi + s_3 +\\ &+A_{33}f^2(\varphi))f(\varphi) = 0.\end{aligned} \tag{29}$$

Уравнение (29) является неавтономным дифференциальным уравнением второго порядка относительно функции $f(\varphi)$. Если зависимость $f(\varphi)$ будет задана, то уравнение (29) должно быть тождеством по переменной φ.

Рассмотрим теперь систему (21)–(23) при $a_0 \neq 0$.

$$u' = -a_0 v + \frac{1}{f(\varphi)}(F_1\cos\varphi - F_2\sin\varphi), \tag{30}$$

$$v' = a_0 u - \frac{1}{f(\varphi)}(F_1\sin\varphi + F_2\cos\varphi), \tag{31}$$

$$u = -\frac{F_3}{a_0' f(\varphi)}. \tag{32}$$

Учитывая в (32) $F_3(\varphi, f(\varphi), f'(\varphi))$ из (12) найдем

$$\begin{aligned}&u = \bigl(B_2\cos 2\varphi + B_2'\sin 2\varphi + a_0 C_1\cos\varphi - a_0' C_1'\sin\varphi\bigr)f(\varphi) -\\ &-(C_1\sin\varphi + C_1'\cos\varphi + (1+a_0)C_0)f'\varphi + \frac{1}{f(\varphi)}(E_1\cos\varphi - E_1'\sin\varphi).\end{aligned} \tag{33}$$

С помощью (33) из (30) определим переменную v

$$\begin{aligned}&v = \frac{1}{a_0}(C_1\sin\varphi + C_1'\cos\varphi + (1+a_0)C_0)f''(\varphi) +\\ &+\frac{2}{a_0}(C_1\cos\varphi - C_1'\sin\varphi)f'(\varphi) + \bigl[B_2'\cos 2\varphi - B_2\sin 2\varphi -\\ &-(1+2a_0)C_1'\cos\varphi - (1+2a_0)C_1\sin\varphi + \frac{1}{a_0}D_0\bigr]f(\varphi) +\\ &+\frac{1}{a_0 f^2(\varphi)}\Bigl\{\bigl[E_0 + (1-a_0)(E_1'\cos\varphi + E_1\sin\varphi)\bigr]f(\varphi) +\\ &+(E_1\cos\varphi - E_1'\sin\varphi)f'(\varphi)\Bigr\},\end{aligned} \tag{34}$$

В уравнениях (33), (34) введены обозначения

$$\begin{gathered}B_2 = a_0' A_{12}, \quad B_2' = \frac{a_0'}{2}(A_{11} - A_{22}), \quad C_1 = A_{13}, \quad C_1' = A_{23},\\ C_0 = \frac{1}{a_0'}A_{33}, \quad E_1 = s_1, \quad E_2 = s_2, \quad E_0 = a_0' s_3,\\ D_0 = \frac{a_0'}{2}\bigl[(2+a_0)A_{33} - a_0(A_{11} + A_{22})\bigr].\end{gathered} \tag{35}$$

Подставив (33), (34) в уравнение (31), получим

$$\begin{gathered}\Big\{f'''(\varphi)\big[C_1\sin\varphi+C_1'\cos\varphi+(1+a_0)C_0\big]+\\ +3f''(\varphi)(C_1\cos\varphi-C_1'\sin\varphi)-f'(\varphi)\big[2C_1'\cos\varphi+2C_1\sin\varphi-\\ -(1+a_0)C_0\big]\Big\}f^3(\varphi)+(E_1\cos\varphi-E_2\sin\varphi)[(1-a_0)f^2(\varphi)-\\ -2f'^2(\varphi)+f(\varphi)f''(\varphi)]-f'(\varphi)f(\varphi)[E_0+\\ +(2-a_0)(E_2\cos\varphi+E_1\sin\varphi)]=0.\end{gathered}\tag{36}$$

В отличие от уравнения (29), уравнение (36) имеет третий порядок.

4. О решениях уравнений (29)**,** (36)**.** Рассмотрим условия существования решения уравнения (29) в классе тригонометрических функций вида

$$f(\varphi)=l_0+l_1\sin\varphi.\tag{37}$$

Подставим (37) в (29)

$$\begin{gathered}3l_1^3A_{23}\sin4\varphi-3l_1^3A_{13}\cos4\varphi+12l_1^2l_0A_{13}\sin3\varphi+12l_1^2l_0A_{23}\cos3\varphi-\\ -6l_1(l_1^2+2l_0^2)A_{23}\sin2\varphi+4l_1[(l_1^2+3l_0^2)A_{13}-l_1l_0A_{33}]\cos2\varphi+\\ +4[4l_1l_0^2A_{33}-l_1^2l_0A_{13}+2(l_1s_3+l_0s_1)]\sin\varphi+4l_0^2(2s_2-3l_1^2A_{23})\cos\varphi+\\ +l_1(4l_0^2-l_1^2)A_{13}+4l_0(l_1^2+2l_0^2)A_{33}+8(l_0s_3+l_1s_1)=0.\end{gathered}\tag{38}$$

Уравнение (38) должно быть тождеством по φ. Следовательно, в силу $l_1\neq0$, $A_{33}\neq0$ получим равенства

$$A_{13}=A_{23}=0,\qquad l_0=0,\qquad A_{12}\neq0,\qquad s_2\neq0,\qquad s_1=s_3=0.\tag{39}$$

Параметр l_1 может принимать произвольные значения.

Таким образом, из уравнения (37) имеем

$$\dot\varphi=f(\varphi)=l_1\sin\varphi.\tag{40}$$

Подставим (40) в (25)

$$v=\frac{l_1}{4}[2A_{12}\cos3\varphi-(A_{22}-A_{11})\sin3\varphi-2A_{12}\cos\varphi-(3A_{11}+A_{22})\sin\varphi]+k,\tag{41}$$

где $k=const$.

Значение u получим из (27) в силу (40)

$$\begin{gathered}u=\frac{l_1}{4}[(A_{22}-A_{11})\cos3\varphi+2A_{12}\sin3\varphi+\\ +(A_{11}-A_{22}-4A_{33})\cos\varphi-2A_{12}\sin\varphi-\frac{4}{l_1^2}s_2].\end{gathered}\tag{42}$$

После подстановки найденных значений u, v из (41), (42) в (20) найдем

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{l_1}{2}\big[(A_{11}+A_{33})\cos 2\varphi - A_{12}\sin 2\varphi + \frac{2}{l_1^2}s_2\cos\varphi + \\ &+ \frac{2}{l_1}k\sin\varphi + (A_{33}-A_{11})\big], \\ \lambda_2 &= \frac{l_1}{2}[A_{12}\cos 2\varphi - (A_{22}+A_{33})\sin 2\varphi + \frac{2}{l_1}k\cos\varphi - \\ &- \frac{2}{l_1^2}s_2\sin\varphi - A_{12}].\end{aligned} \tag{43}$$

Основные переменные задачи определим из (5), (6) в силу (40)

$$\begin{gathered}\nu_1 = \sin\varphi(t), \qquad \nu_2 = \cos\varphi(t), \qquad \nu_3 = 0, \\ \omega_1 = l_1\sin^2\varphi(t), \qquad \omega_2 = l_1\sin\varphi(t)\cos\varphi(t), \qquad \omega_3 = l_1\sin\varphi(t),\end{gathered} \tag{44}$$

Зависимость $\varphi(t)$ такова

$$\varphi(t) = \arccos\frac{1-\chi e^{2l_1(t-t_0)}}{1+\chi e^{2l_1(t-t_0)}}. \qquad \Big(\chi = \frac{1+\cos\varphi_0}{1-\cos\varphi_0}\Big). \tag{45}$$

Таким образом, при выполнении условий (39) уравнения (7)–(9) допускают решение (43)–(45), которое выражается через элементарные функции времени.

Перейдем к исследованию уравнения (36). Рассмотрим условия существования решения этого уравнения в классе функций (37). После подстановки (37) в (36) имеем

$$\begin{aligned}&3l_1(A_{23}\cos 2\varphi + A_{13}\sin 2\varphi) + \frac{1}{2(l_0+l_1\sin\varphi)^3}\Big\{l_1 l_0(1+a_0)s_2\cos 2\varphi + \\ &+l_1[l_0(1+a_0)s_1 + l_1 a_0' s_3]\sin 2\varphi - 2[l_0^2(1-a_0)s_1 - l_0 l_1 a_0' s_3 - \\ &-2l_1^2 s_1]\cos\varphi - 2[l_1^2 a_0 s_2 - l_0^2(1-a_0)s_2]\sin\varphi + 3l_1 l_0(1-a_0)s_2\Big\} = 0.\end{aligned} \tag{46}$$

Равенство (46) будет тождеством по φ при выполнении следующих условий:

$$A_{13} = A_{23} = 0, \quad A_{12} \neq 0, \quad l_0 = l_1, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = -\frac{1}{a_0'}s_1(1+a_0). \tag{47}$$

В силу (47) зависимость $\dot\varphi$ из (37) от φ такова

$$\dot\varphi = l_1(\sin\varphi + 1). \tag{48}$$

Из (33), (34) имеем соответственно

$$
\begin{gathered}
u=\frac{1}{4}l_1a_0'\Big\{(A_{22}-A_{11})\cos 3\varphi+2A_{12}\sin 3\varphi+4A_{12}\cos 2\varphi-\\
-2(A_{22}-A_{11})\sin 2\varphi+\frac{1}{a_0'^2}(1+a_0)\big[(1-a_0)(A_{11}-A_{22})-4A_{33}\big]\cos\varphi-\\
-2A_{12}\sin\varphi\Big\}+\frac{1}{l_1(\sin\varphi+1)}s_1\cos\varphi,\\
v=\frac{1}{4}l_1a_0'\Big\{2A_{12}\cos 3\varphi-(A_{22}-A_{11})\sin 3\varphi-\\
-2(A_{22}-A_{11})\cos 2\varphi-4A_{12}\sin 2\varphi-2A_{12}\cos\varphi+\\
+\frac{1}{a_0'^2}(1+a_0)\big[(1-a_0)(4A_{33}-3A_{11}-A_{22})-4A_{33}\big]\sin\varphi+\\
+\frac{1}{a_0}2\big[2A_{33}(1+a_0)-a_0(A_{11}+A_{22})\big]\Big\}+\\
+\frac{1}{2l_1(\sin\varphi+1)^2}(\cos 2\varphi-4\sin\varphi-3)s_1.
\end{gathered}
\tag{49}
$$

В силу (20), (49) получим

$$
\begin{gathered}
\lambda_1=\frac{1}{2}l_1a_0'\Big\{\frac{1}{a_0'^2}(1+a_0)\Big[(1+a_0)A_{33}+(1-a_0)A_{11}\Big]\cos 2\varphi-\\
-A_{12}\sin 2\varphi-2A_{12}\cos\varphi+\frac{1}{a_0}2\Big[A_{33}+a_0(A_{33}-A_{11})\Big]\sin\varphi+\\
+A_{33}-A_{11}\Big\}+\frac{1}{2l_1(\sin\varphi+1)^2}s_1(\cos 2\varphi-4\sin\varphi-3),\\
\lambda_2=\frac{1}{2}l_1a_0'\Big\{A_{12}\cos 2\varphi-\frac{1}{a_0'^2}(1+a_0)\Big[(1+a_0)A_{33}+\\
+(1-a_0)A_{22}\Big]\sin 2\varphi+\frac{1}{a_0}2\Big[A_{33}+a_0(A_{33}-A_{22})\Big]\cos\varphi-\\
-2A_{12}\sin\varphi-A_{12}\Big\}-\frac{1}{l_1(\sin\varphi+1)}s_1\cos\varphi.
\end{gathered}
\tag{50}
$$

Следовательно, при выполнении условий (47) уравнения (7)–(9) допускают решение (48),(50). Основные переменные ν_i,ω_i найдем из уравнений (5), (6)

$$
\begin{gathered}
\nu_1=a_0'\sin\varphi,\qquad \nu_2=a_0'\cos\varphi,\qquad \nu_3=a_0,\\
\omega_1=a_0'l_1(\sin\varphi+1)\sin\varphi,\quad \omega_2=a_0'l_1(\sin\varphi+1)\cos\varphi,\\
\omega_3=l_1(1+a_0)(\sin\varphi+1).
\end{gathered}
\tag{51}
$$

Сравнивая условия (39) и (47), приходим к выводу, что условия (39) не следуют из (47), если в них полагать $a_0=0$. Это связано с тем, что соотношение (34) при $a_0=0$ теряет смысл.

5. Один случай обобщения решения (37)**.** Решение (37) может быть обобщено на случай

$$
f(\varphi)=l_0+l_1\sin\varphi+l_1'\cos\varphi. \tag{52}
$$

Внесем выражение (52) в уравнение (29) и потребуем, чтобы полученное равенство было тождеством по φ. Тогда получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$
\begin{gathered}
l_1(3l_1'^2 - l_1^2)A_{13} + l_1'(3l_1^2 - l_1'^2)A_{23} = 0,\\
l_1'(3l_1^2 - l_1'^2)A_{13} + l_1(l_1^2 - 3l_1'^2)A_{23} = 0,\\
2l_0l_1l_1'A_{13} + l_0(l_1^2 - l_1'^2)A_{23} = 0, \quad l_0(l_1^2 - l_1'^2)A_{13} - 2l_0l_1l_1'A_{23} = 0,\\
l_1(l_1^2 + 2l_1'^2 + 3l_0^2)A_{13} - l_1'(l_1'^2 + 2l_1^2 - 3l_0^2)A_{23} + l_0(l_1'^2 - l_1^2)A_{33} = 0,\\
l_1'(l_1^2 + 3l_1'^2 + 6l_0^2)A_{13} + l_1(l_1'^2 + 3l_1^2 + 6l_0^2)A_{23} - 4l_0l_1l_1'A_{33} = 0,\\
2l_0l_1l_1'A_{13} + 4l_0^2l_1'A_{33} - l_0(3l_1'^2 + l_1^2)A_{23} + 2(l_1's_3 + l_0s_2) = 0,\\
2l_0l_1l_1'A_{23} + 4l_0^2l_1A_{33} - l_0(3l_1'^2 + l_1^2)A_{13} + 2(l_1s_3 + l_0s_1) = 0,\\
(4l_0^2 - l_1^2 - l_1'^2)(l_1A_{13} + l_1'A_{23}) + 4l_0(l_1^2 + l_1'^2 + 2l_0)A_{33} +\\
+8(l_1s_1 + l_1's_2 + l_0s_3) = 0.
\end{gathered}
\tag{53}
$$

Из первых двух равенств системы (53) следует, что при $A_{13}^2 + A_{23}^2 \neq 0$ она допускает только тривиальное решение

$$
l_1(3l_1'^2 - l_1^2) = 0, \qquad l_1'(3l_1^2 - l_1'^2) = 0. \tag{54}
$$

При выполнении равенств (54) функция $f(\varphi)$ из (52) принимает постоянное значение, что исключено из рассмотрения. Поэтому из (53) следуют условия на параметры

$$
l_0 = 0, \qquad A_{13} = A_{23} = 0, \qquad A_{12} \neq 0, \qquad s_3 = 0, \qquad s_1 = -\frac{l_1'}{l_1}s_2. \tag{55}
$$

В силу (52), (55) система (7)–(9) имеет решение

$$
\begin{gathered}
\lambda_1 = \frac{1}{2}\Big\{\big[l_1(A_{11} + A_{33}) - l_1'A_{12}\big]\cos 2\varphi -\\
-\big[l_1'(A_{11} + A_{33}) + l_1A_{12}\big]\sin 2\varphi +\\
+\frac{2}{l_1}s_2\cos\varphi + 2c_0\sin\varphi + l_1(A_{33} - A_{11}) - l_1'A_{12}\Big\},\\
\lambda_2 = \frac{1}{2}\Big\{\big[l_1A_{12} - l_1'(A_{22} + A_{33})\big]\cos 2\varphi -\\
-\big[l_1(A_{22} + A_{33}) + l_1'A_{12}\big]\sin 2\varphi +\\
+2c_0\cos\varphi - \frac{2}{l_1}s_2\sin\varphi + l_1'(A_{33} - A_{22}) - l_1A_{12}\Big\},
\end{gathered}
\tag{56}
$$

где $c_0 = \mathrm{const}$. Тогда основные переменные задачи выражаются соотношениями

$$\nu_1 = \sin\varphi, \qquad \nu_2 = \cos\varphi, \qquad \nu_3 = 0,$$
$$\omega_1 = \frac{1}{2}(l_1 - l_1\cos 2\varphi + l_1'\sin 2\varphi), \quad \omega_2 = \frac{1}{2}(l_1' + l_1\cos 2\varphi + l_1'\sin 2\varphi), \tag{57}$$
$$\omega_3 = l_1\sin\varphi + l_1'\cos\varphi.$$

Следовательно, решение (56), (57) имеет место при выполнении условий (55), в которых параметры s_1, s_2 связаны между собой линейной зависимостью. Это свойство характеризует отличие условий (39) и (55).

6. Заключение. В статье исследованы условия существования прецессионно-изоконических движений тяжелого гиростата. Показано, что варианты $a_0 = 0$ и $a_0 \neq 0$ необходимо рассматривать независимо друг от друга. Для них получены разрешающие уравнения соответственно второго и третьего порядка. Решения данных уравнений задаются в виде линейной зависимости от тригонометрических функций. Найдены два класса новых решений уравнений движения тяжелого гиростата, которые описывают прецессионно-изоконические движения.

1. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
2. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 394 с.
3. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 2012. – 401 с.
4. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
5. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 3. – С. 502–507.
6. *Горр Г.В.* Некоторые свойства прецессионных движений относительно вертикали тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой // Прикл. математика и механика. – 1968. – **32**, вып. 3. – С. 451–458.
7. *Верховод Е.В., Горр Г.В.* Новые случаи изоконических движений в обобщенной задаче динамики твердого тела с неподвижной точкой // Прикл. математика и механика. – 1993. – **57**, вып. 5. – С. 25–34.
8. *Верховод Е.В., Горр Г.В.* Один класс изоконических движений в динамике твердого тела // Механика твердого тела. – 1990. – Вып. 22. – С. 33–38.
9. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
10. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Точные решения уравнений движения гиростата вокруг неподвижной точки // Современные проблемы математики, механики и информатики. – Харьков, 2011. – С. 74–84.
11. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
12. *Мазнев А.В., Котов Г.А.* Прецессионно-изоконические движения второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вiсн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природничi науки. – 2012. – **1**. – С. 79–83.
13. *Котов Г.А.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата, несущего два вращающихся гироскопа // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 59–66.

Yu. V. Koshel

About precessionally-isoconical motions of a heavy gyrostat with a variable gyrostatic moment.

Existence conditions of precessionally-isoconical motions of a heavy gyrostat carrying two rotors are investigated. A new solution of the equations of motion obtained in the case when the gyrostatic moment is orthogonal to the axis of proper rotation.

Keywords: *gyrostat, precessional and isoconical motions.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
`yulia.koshel@mail.ru`

Получено 11.07.16