ISSN 1683-4720 Труды ИПММ. 2016. Том 30

УДК 517.5

©2016. **В. В. Волчков, Вит. В. Волчков**

НОВЫЕ УСЛОВИЯ ГОЛОМОРФНОСТИ ФУНКЦИИ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

Изучаются условия, при которых функция, удовлетворяющая взвешенному свойству Мореры для всех гиперболических окружностей фиксированного радиуса, является голоморфной. Показано, что одним из таких условий является ограничение на скорость убывания разности между функцией и ее интегралом типа Коши.

Ключевые слова: *теоремы типа Мореры, гиперболическая плоскость, свойство Помпейю.*

1. Введение и формулировка основного результата. Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\overline{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \cup \mathbb{T}$. Согласно классическому результату Коши, всякая функция $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$ является голоморфной в $\mathbb{D}$ тогда и только тогда, когда

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{для всех } z \in \mathbb{D}. \tag{1}$$

Другим критерием голоморфности в $\mathbb{D}$ является теорема Мореры, в которой требуется равенство нулю интегралов от f по достаточно большому набору замкнутых контуров, лежащих в $\mathbb{D}$. Ослабления условий теоремы Мореры изучались многими авторами (см., например, [1],[2] и библиографию к этим работам).

Пусть G – группа конформных автоморфизмов круга $\mathbb{D}$. Для множества $E \subset \mathbb{D}$ обозначим через gE образ E при отображении $g \in G$. Пусть также $\gamma_\varrho = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \varrho\}$. В работе [3] рассмотрен следующий вопрос. Верно ли, что при данном $\varrho \in (0,1)$ и $f \in C(\mathbb{D})$ условие

$$\int\limits_{\gamma_\varrho} f(gz)\, dz = 0 \quad \forall g \in G \tag{2}$$

влечет голоморфность функции f? Оказалось, что в общем случае ответ отрицательный, однако при некоторых дополнительных предположениях голоморфность f имеет место. Одним из таких предположений является увеличение числа возможных значений ϱ в уравнении (2). В работе [3] получен следующий результат.

Теорема А. *Пусть $\varrho_1, \varrho_2 \in (0,1)$ фиксированы, и уравнения*

$$P_z^{-1}\left(\frac{1+\varrho_j^2}{1-\varrho_j^2}\right) = 0 \quad (j = 1, 2)$$

не имеют общего решения $z \in \mathbb{C}$ (здесь и далее P_z^ν – присоединенная функция Лежандра первого рода [4]). Тогда, если функция $f \in C(\mathbb{D})$ удовлетворяет (2) для любого $g \in G$ и $\varrho = \varrho_1, \varrho_2$, то f голоморфна в $\mathbb{D}$.

Доказательство теоремы A основано на применении преобразования Фурье на группе G и теоремы Шварца о спектральном анализе [5].

В данной работе изучены точные условия, при которых функция f, удовлетворяющая (2) при одном фиксированном ϱ, обязана быть голоморфной. Показано, что одним из таких условий является ограничение на скорость убывания разности между левой и правой частями уравнения (1) при $|z| \to 1$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\varrho \in (0,1)$ фиксировано. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(i) *Пусть $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$, удовлетворяет* (2) *и*

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = o\left(\sqrt{1-|z|}\right) \quad \text{при } |z| \to 1. \tag{3}$$

Тогда f голоморфна в $\mathbb{D}$.

(ii) *Существует неголоморфная функция $f \in C(\overline{\mathbb{D}})$, для которой выполнено условие* (2) *и*

$$f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = O\left(\sqrt{1-|z|}\right) \quad \text{при } |z| \to 1.$$

Относительно других теорем типа Мореры см. [1]–[3], [6] и имеющуюся там библиографию.

2. Основные обозначения. Как известно, для любого $g \in G$ существуют и определяются однозначно числа $\tau, z \in \mathbb{C}$, такие, что $|\tau| = 1$, $|z| < 1$ и

$$gw = \tau\, \frac{w - z}{1 - \overline{z}w} \tag{4}$$

при всех $w \in \mathbb{D}$. Отображения (4) являются движениями в модели Пуанкаре гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$, реализованной в виде круга $\mathbb{D}$ (см., например, [7, введение, § 4]). Гиперболическое расстояние d между точками $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ в этой модели определяется равенством

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2}\ln\frac{|1 - \overline{z}_1 z_2| + |z_2 - z_1|}{|1 - \overline{z}_1 z_2| - |z_2 - z_1|}.$$

В частности,

$$d(z, 0) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+|z|}{1-|z|} = \operatorname{arth}|z| \quad \text{и} \quad |z| = \operatorname{th} d(z,0), \quad z \in \mathbb{H}^2.$$

Расстояние d и гиперболическая мера $d\mu$ на $\mathbb{H}^2$, определенная равенством

$$d\mu(z) = \frac{i}{2}\frac{dz \wedge \overline{dz}}{(1-|z|^2)^2},$$

инвариантны относительно группы G.

Для $r > 0$ символом B_r будем обозначать открытый гиперболический круг радиуса r с центром в нуле, т.е.

$$B_r = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(0,z) < r\}.$$

Пусть также $B_\infty = \mathbb{H}^2$. Для $r \geq 0$ обозначим

$$\overline{B}_r = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(0,z) \leq r\}, \quad \partial B_r = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(0,z) = r\}.$$

Обозначим через χ_r характеристическую функцию (индикатор) круга B_r. Обозначим через $L(\mathbb{H}^2)$ и $L_{\text{loc}}(\mathbb{H}^2)$ множества функций, соответственно интегрируемых и локально интегрируемых на $\mathbb{H}^2$ по мере $d\mu$. Пусть dg – мера Хаара на G, нормированная соотношением

$$\int\limits_G \psi(g0)dg = \int\limits_{\mathbb{H}^2} \psi(z)\, d\mu(z), \tag{5}$$

которое выполнено для любой функции $\psi \in L(\mathbb{H}^2)$ (см. [7, введение, § 4, п. 3]).

Пусть $\mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$ (соответственно $\mathcal{D}(\mathbb{R})$) – множество всех функций с компактными носителями из $C^\infty(\mathbb{H}^2)$ (соответственно $C^\infty(\mathbb{R})$) со стандартной топологией (см., например, [7, гл. 2, § 2, п. 2]). Символами $L_\natural(\mathbb{H}^2)$, $C^\infty_\natural(\mathbb{H}^2)$ и $\mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$ будем обозначать соответственно пространства радиальных функций из $L(\mathbb{H}^2)$, $C^\infty(\mathbb{H}^2)$ и $\mathcal{D}(\mathbb{H}^2)$ с индуцированной топологией. Аналогично, символы $C^\infty_\natural(\mathbb{R})$ и $\mathcal{D}_\natural(\mathbb{R})$ обозначают пространства четных функций из $C^\infty(\mathbb{R})$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ соответственно.

Определим теперь обобщенную свертку $f_1 \diamond f_2$ двух радиальных функций $f_1, f_2 \in L_{\text{loc}}(\mathbb{H}^2)$, хотя бы одна из которых имеет компактный носитель. Положим

$$(f_1 \diamond f_2)(g0) = \int\limits_{\mathbb{H}^2} f_1(z) f_2(g^{-1}z)\, \frac{(1-|z|^2)^2}{(1-z\cdot \overline{g0})^2}\, d\mu(z), \quad g \in G. \tag{6}$$

Равенство (6) показывает, что свертка $f_1 \diamond f_2$ является радиальной функцией класса $L_{\text{loc}}(\mathbb{H}^2)$.

Из (6) и (5) следует, что

$$(f_1 \diamond f_2)(\zeta) = \int\limits_G f_1(g0) f_2(g^{-1}\zeta)\, \frac{(1-|g0|^2)^2}{(1-\overline{\zeta}\cdot g0)^2}\, dg, \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

и

$$f_1 \diamond f_2 = f_2 \diamond f_1.$$

Кроме того, если $f_1, f_2, f_3 \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{H}^2)$ – радиальные функции, хотя бы две из которых имеют компактные носители, то

$$(f_1 \diamond f_2) \diamond f_3 = f_1 \diamond (f_2 \diamond f_3).$$

Как обычно, символом $\widehat{h}$ будем обозначать преобразование Фурье функции $h \in L(\mathbb{R})$, то есть

$$\widehat{h}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Далее, пусть $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\nu = \nu(\lambda) = \frac{i\lambda - 1}{2}.$$

Положим

$$U_\lambda(z) = (1 - |z|^2)^{\nu+1} F\left(\nu + 2,\, \nu + 1;\, 2;\, |z|^2\right), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{7}$$

где F – гипергеометрическая функция Гаусса.

Пусть также

$$\mathcal{H}_\lambda(z) = (1 - |z|^2)^{\nu} F\left(\nu + 2,\, \nu;\, 1;\, |z|^2\right), \quad \lambda \in \mathbb{C},\, z \in \mathbb{D}. \tag{8}$$

Пусть функция $T \in L_\natural(\mathbb{H}^2)$ имеет компактный носитель. Для $\lambda \in \mathbb{C}$ положим

$$\mathcal{F}(T)(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{H}^2} T(z)\, \mathcal{H}_\lambda(z)\, (1 - |z|^2)^2\, d\mu(z).$$

Из равенства

$$\mathcal{H}_\lambda(z) = (1 - |z|^2)^{-2} F\left(\frac{3 + i\lambda}{2}, \frac{3 - i\lambda}{2};\, 1;\, \frac{|z|^2}{|z|^2 - 1}\right)$$

(см. (8) и [4, формула 2.9 (3)]) видно, что $\mathcal{F}(T)$ является четной целой функцией переменной λ. Ряд свойств преобразования $\mathcal{F}$ изучен в работе [8].

3. Вспомогательные утверждения. В данном разделе мы установим некоторые вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основного результата.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \left(\overline{z}\, U_\lambda(z)\right) = 2\, \mathcal{H}_\lambda(z), \quad \lambda \in \mathbb{C},\, z \in \mathbb{D}, \tag{9}$$

где функция U_λ *определена в* (7).

Доказательство. В силу непрерывности в $\mathbb{D}$ обеих частей равенства (9), достаточно установить (9) при $z \neq 0$. В этом случае, полагая $\rho = |z|$, из (7) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\overline{z}\, U_\lambda(z)\right) = \frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\,\left(\rho^2(1-\rho^2)^{\nu+1}F(\nu+2,\,\nu+1;\,2;\,\rho^2)\right).$$

Используя теперь [4, формула 2.8 (25)], из последнего равенства и (8) получаем (9). □

Для $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{C}$ положим

$$\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}(r) = F\left(\frac{\alpha+\beta+1-i\lambda}{2},\ \frac{\alpha+\beta+1+i\lambda}{2};\ \alpha+1;\ -\mathrm{sh}^2\, r\right).$$

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\lim_{\alpha\to-1}\frac{\varphi_\lambda^{(\alpha,1)}(r)-1}{\Gamma(\alpha+1)} = -\frac{1}{4}(\lambda^2+1)\ \mathrm{sh}^2\, r\ \ \varphi_\lambda^{(1,1)}(r).$$

Доказательство. Полагая для краткости

$$z=-\mathrm{sh}^2\, r, \qquad a=\frac{1+i\lambda}{2}, \qquad b=\frac{1-i\lambda}{2}.$$

Из определения гипергеометрической функции имеем

$$\lim_{\alpha\to-1}\frac{\varphi_\lambda^{(\alpha,1)}(r)-1}{\Gamma(\alpha+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\dots(a+n-1)\,b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!\,\Gamma(n)}\,z^n =$$

$$= z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a+1)\dots(a+n)\,b(b+1)\dots(b+n)}{n!\,\Gamma(n+2)}\,z^n = abzF(a+1,b+1;2;z) =$$

$$= -\frac{1}{4}(\lambda^2+1)\ \mathrm{sh}^2\, r\ \ F\left(\frac{3+i\lambda}{2},\ \frac{3-i\lambda}{2};\ 2;\ -\mathrm{sh}^2\, r\right).$$

Тем самым утверждение доказано. □

Следствие 1. *Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ выполнено равенство*

$$\mathcal{F}\left(\chi_r\right)(\lambda) = \pi\ \mathrm{sh}^2\, r\ \ \varphi_\lambda^{(1,1)}(r). \tag{10}$$

Доказательство. Из определения $\mathcal{F}$ находим

$$\mathcal{F}\left(\chi_r\right)(\lambda) = \pi\int_0^r \mathrm{sh}\,(2t)\,\varphi_\lambda^{(0,2)}(t)\,dt.$$

Далее, используя лемму 2 и [9, предложение 7.2 (ii)], получаем

$$\int\limits_0^r \operatorname{sh}(2t)\,\varphi_\lambda^{(0,2)}(t)\,dt = -\frac{4}{\lambda^2+1}\lim_{\alpha\to-1}\frac{\varphi_\lambda^{(\alpha,1)}(r)-1}{\Gamma(\alpha+1)} = \operatorname{sh}^2 r\ \varphi_\lambda^{(1,1)}(r),$$

откуда следует требуемое утверждение. □

Пусть $\mathcal{Z}_r = \{\lambda\in\mathbb{C} : \mathcal{F}(\chi_r)=0\}$, $N(r)=\{\lambda>0 : \mathcal{F}(\chi_r)=0\}$. Обозначим через n_λ кратность нуля λ функции $\mathcal{F}(\chi_r)$. Свойства нулей $\mathcal{F}(\chi_r)$ содержатся в следующем утверждении.

Лемма 3. *Выполнены следующие утверждения.*

(i) $\mathcal{Z}_r\subset\mathbb{R}^1\setminus\{0\}$ *и* $n_\lambda=1$ *при всех* $\lambda\in\mathcal{Z}_r$.

(ii) $|\mathcal{F}(\chi_r)'(\lambda)|>c|\lambda|^{-3/2}$ *для любого* $\lambda\in\mathcal{Z}_r$ *и некоторой константы* $c>0$*, не зависящей от* λ.

Доказательство. Используя (10) и [4, формула 3.2 (7)], получаем, что

$$\mathcal{F}(\chi_r) = \pi \operatorname{th} r P^{-1}_{(i\lambda-1)/2}(\operatorname{ch} 2r).$$

Тогда утверждение леммы 3 является частным случаем лемм 2.4, 2.5 и следствия 2.2 из [2, часть 2, глава 2]. □

Далее, из (10) и асимптотического разложения для функции $\varphi_\lambda^{(1,1)}(r)$ при $\lambda\to\infty$ следует (см. [2, часть 2, следствие 2.2]), что $\mathcal{F}(\chi_r)\in L^2(\mathbb{R}^1)$. По теореме Пэли–Винера существует функция $\Lambda_r\in L^2(\mathbb{R}^1)$ с компактным носителем, такая, что $\widehat{\Lambda}_r=\mathcal{F}(\chi_r)$.

Для $f\in\mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)$, $t\in\mathbb{R}^1$ определим функцию $\mathfrak{A}(f)(t)$ равенством

$$\mathfrak{A}(f)(t) = \frac{16}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \mathcal{F}(f)(\lambda)|c(\lambda)|^{-2}\cos(\lambda t)d\lambda + \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(f)(i)\cos(it),$$

где

$$c(\lambda) = \frac{2^{3-i\lambda}\Gamma(i\lambda)}{\Gamma\left(\frac{i\lambda-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{i\lambda+3}{2}\right)}.$$

Как показано в работе [8], $\mathfrak{A}(f)\in C^\infty_\natural(\mathbb{R}^1)$ и отображение $\mathfrak{A}:\mathcal{D}_\natural(\mathbb{H}^2)\to C^\infty_\natural(\mathbb{R}^1)$ продолжается до линейного гомеоморфизма пространств $C^\infty_\natural(\mathbb{H}^2)$ и $C^\infty_\natural(\mathbb{R}^1)$. Кроме того, если $\lambda\in\mathbb{C}$, то

$$\mathfrak{A}(\mathcal{H}_\lambda)(t) = \cos\lambda t. \tag{11}$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1 в работе [8], получаем

$$\mathfrak{A}(f\diamond\chi_r)(t) = \mathfrak{A}(f)*\Lambda_r \tag{12}$$

для любой $f\in C^\infty_\natural(\mathbb{H}^2)$.

4. Доказательство теоремы 1. Для доказательства утверждения (i) сначала рассмотрим случай $f \in C(\overline{\mathbb{D}}) \cap C^{\infty}(\mathbb{D})$. Пусть $r > 0$ и

$$J_f(\zeta) = \frac{1}{1-|\zeta|^2} \int\limits_{\partial B_r} f\left(\frac{z+\zeta}{1+\overline{\zeta}\, z}\right) dz, \quad \zeta \in \mathbb{D}. \tag{13}$$

Положим

$$g_\zeta z = \frac{z+\zeta}{1+\overline{\zeta}\, z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

По формуле Грина имеем

$$J_f(\zeta) = -\int\limits_{B_r} \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f(g_\zeta z))\, \frac{dz \wedge d\overline{z}}{1-|\zeta|^2} = 2i \int\limits_{B_r} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(g_\zeta z)\, \frac{(1-|z|^2)^2}{(1+\zeta\, \overline{z})^2}\, d\mu(z).$$

Поскольку $g_\zeta \in G$ и мера $d\mu(z)$ инвариантна относительно G, получаем

$$J_f(\zeta) = 2i \int\limits_{g_\zeta B_r} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(w)\, \frac{(1-|g_\zeta^{-1} w|^2)^2}{(1+\zeta\, \overline{g_\zeta^{-1} w}\,)^2}\, d\mu(w).$$

Отсюда прямым подсчетом находим

$$J_f(\zeta) = 2i \int\limits_{g_\zeta B_r} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(w)\, \frac{(1-|w|^2)^2}{(1-w\overline{\zeta}\,)^2}\, d\mu(w).$$

Ввиду определения свертки $\diamond$ имеем

$$J_f = 2i\, \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \diamond \chi_r \quad \text{в} \quad \mathbb{H}^2. \tag{14}$$

Запишем действие элемента $g \in G$ на точку $z \in \mathbb{D}$ в виде

$$gz = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}, \quad \text{где} \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1. \tag{15}$$

Положим $\zeta = g0$, $g \in G$. Из (13) и (15) имеем

$$J_f(g0) = |a|^2 \int\limits_{\partial B_r} f\left(\frac{z+\frac{b}{\overline{a}}}{1+\frac{\overline{b}}{a}z}\right) dz.$$

Отсюда, после замены переменной $z = \dfrac{a}{\overline{a}}\, w$, получаем

$$J_f(g0) = a^2 \int\limits_{\partial B_r} f(gz)\, dz \quad \forall g \in G. \tag{16}$$

Равенства (14) и (16) показывают, что функция f удовлетворяет условию (2) в том и только в том случае, когда

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \diamond \chi_r = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{H}^2, \tag{17}$$

где $r = \operatorname{arth} \rho$. Введем вспомогательную функцию

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta z)\, d\zeta, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{18}$$

Из (18) следует, что $u \in C^\infty(\mathbb{D})$ и удовлетворяет (2). Кроме того, при $z \neq 0$ имеем

$$u(z) = v(|z|)e^{-i \arg z}, \quad \text{где} \quad v(|z|) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(|z|e^{i\varphi})\, e^{i\varphi}\, d\varphi. \tag{19}$$

Простое вычисление показывает, что

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = v\,'(|z|) + \frac{v(|z|)}{|z|}, \tag{20}$$

то есть $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}} \in C^\infty_\natural(\mathbb{H}^2)$. Кроме того, из (19) следует, что

$$v(0) = 0. \tag{21}$$

На основании (17) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} \diamond \chi_r = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{H}^2, \quad \text{где} \quad r = \operatorname{arth} \rho.$$

Отсюда, в силу (12),

$$\mathfrak{A}\left(\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\right) * \Lambda_r = 0 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}.$$

Используя [2, часть 3, теорема 1.3] и лемму 2, получаем, что

$$\mathfrak{A}\left(\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\right)(t) = \sum_{\lambda \in N(r)} c_\lambda \cos(\lambda t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{22}$$

где постоянная $c_\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условию $|c_\lambda| = O\left((1+\lambda)^{-\alpha}\right)$ при $\lambda \to +\infty$ для любого фиксированного $\alpha > 0$. Тогда из оценки производных функции $\mathcal{H}_\lambda$ (см. [8, доказательство предложения 2]) вытекает, что ряд

$$\sum_{\lambda \in N(r)} c_\lambda \mathcal{H}_\lambda$$

сходится в $C^\infty(\mathbb{H}^2)$ к некоторой функции $w \in C^\infty_\natural(\mathbb{H}^2)$. Из равенства (22) и (11) получаем

$$\mathfrak{A}\left(\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\right) = \mathfrak{A}(w).$$

Отсюда заключаем, что $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}} = w$ в $\mathbb{D}$. Из этого уравнения и определения w находим

$$v(|z|) = \frac{|z|}{2} \sum_{\lambda \in N(r)} c_\lambda U_\lambda(|z|) \tag{23}$$

(см. (20), (21) и лемму 1). Далее, из (19) и (3) следует, что $v(|z|) = o\left(\sqrt{1-|z|}\right)$ при $|z| \to 1$. Используя теперь (23) и [7, введение, теорема 4.15], отсюда получаем $v = 0$. В силу (19) и (18), это означает, что

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 0$$

для любого $R \in (0,1)$.

Пусть теперь $h \in G$. Используя условие (2) с функцией $f(hz)$ вместо f и условие (3) с hz вместо z, как и выше, имеем

$$\int_{\gamma_R} f(hz)\, dz = 0$$

для всех $R \in (0,1)$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \diamond \chi_r = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{H}^2 \quad \text{при любом} \quad r > 0.$$

Отсюда, в силу произвольности r и определения свертки $\diamond$, следует голоморфность f. Общий случай сводится к рассмотренному стандартным приемом сглаживания (см., например, [2, часть 1, гл. 3]).

Для доказательства утверждения (ii) положим $f(z) = \overline{z}\, U_\lambda(z)$, где $\lambda \in N(r)$ и $r = \operatorname{arth} \rho$. Тогда согласно лемме 1, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 2\, \mathcal{H}_\lambda,$$

то есть f не голоморфна в $\mathbb{D}$. Из доказательства леммы 2 в [8] и (10) получаем, что f удовлетворяет (2) при всех $g \in G$. Кроме того, из [7, введение, теорема 4.15] следует, что выполнено условие (3). Таким образом, теорема 1 полностью доказана. $\square$

1. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations (ed. Fuglede B. et. al). – Dordrecht: Kluwer, 1992. – P. 185–194.
2. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
3. *Berenstein C.A., Pascuas D.* Morera and mean-value type theorems in the hyperbolic disk // Israel J. Math. – 1994. – **86**. – P. 61–106.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – **1, 2**. – М.: Наука, 1973, 1974. – 296 с.
5. *Schwartz L.* Theorie générale des functions moyenne-periodiquẽ // Ann. Math. – 1947. – **48**. – P. 857–928.
6. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. – Basel: Birkhäuser., 2013. – 592 p.
7. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
8. *Волчков В.В., Волчков Вит.В.* Гомеоморфизмы с трансмутационным свойством относительно взвешенной свертки // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. – 2015. – **29**. – С. 29–40.
9. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer–Verlag, 2009. – 671 p.

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov

New conditions for the holomorphity of a function in the unit disk.

We study the conditions under which a function satisfying a weighted Morera property for all hyperbolic circles of a fixed radius is holomorphic. We show that one of such conditions is the restriction on a speed of decrease of a difference between the function and its Cauchy type integral.

Keywords: *Morera type theorems, hyperbolic plane, Pompeiu property.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т»
valeriyvolchkov@gmail.com
volna936@gmail.com

Получено 05.05.16