УДК 519.21

©2016. **Б. В. Бондарев, М. И. Хмелина**

ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ С ПРЕМИЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕКУЩЕГО КАПИТАЛА. МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ КЛАРКА–САМУЭЛЬСОНА

Указан способ выведения интегро-дифференциальных уравнений для вероятности неразорения страховой компании, функционирующей на финансовом (B, S)–рынке на бесконечном и конечном интервалах времени. Рисковый актив описывается модифицированной моделью Кларка–Самуэльсона. Премии поступают со скоростью, пропорциональной величине капитала компании.

Ключевые слова: *страховая компания, вероятность неразорения, финансовый* (B, S)*–рынок, управление, модифицированная модель Кларка–Самуэльсона.*

1. Введение. В настоящей работе рассматривается математическая модель функционирования страховой компании, которая имеет возможность вкладывать свои текущие средства на финансовый (B, S)–рынок, когда в качестве описания рискового актива взята модифицированная модель Кларка–Самуэльсона.

Для исследования платежеспособности страховой компании обычно рассматривают ее вероятность неразорения. Классический процесс риска и выведение уравнения для вероятности неразорения подробно изложены в [21]. В работах [1, 4–9, 26] рассматриваются случаи стохастических премий, а также задача Лундберга для некоторых частных распределений величин поступающих исков. В [3] изучается функционирование компании на (B, S)–рынке с предположением, что эволюция акций задается моделью П. Самуэльсона, основным процессом в которой взят скачкообразный процесс с независимыми приращениями. В [9] рассмотрен конечный и бесконечный промежуток времени наблюдения за деятельностью компании, а также в нескольких моделях с учетом отчисления денег на рекламу. В работе [22] освещен вопрос о дифференцируемости функции вероятности неразорения. В данной статье будет использовано предположение о том, что суммарные страховые премии, поступающие в компанию от клиентов, зависят от значения ее текущего капитала и задаются некоторой функцией [18].

В работе [13] рассмотрена несколько измененная модель Крамера–Лундберга, функционирующая на (B, S)–рынке. Здесь выведено уравнение для $\varphi(x)$ – вероятности неразорения страховой компании на бесконечном интервале времени

$$\lambda\varphi(x) = \lambda \int_0^x \varphi(x-y)f(y)dy + [x(u\mu - ur + r) + c(x)]\varphi'(x) + \frac{u^2\sigma^2x^2}{2}\varphi''(x). \quad (1)$$

В классической модели П. Самуэльсона «основным» процессом является винеровский процесс, приращения которого имеют нормальное распределение. Вместе с тем отмечено [20], что на интервалах времени сравнительно небольшой длины (до 2–3 недель) приращения отличны от нормальных. Первые работы, в которых отмечено это явление, появились ещё в 1915г. Результаты очень серьезного статистического анализа, подтверждающего отличие упомянутых распределений от нормального, были опубликованы М. Кендаллом в 1953г. в [25]. Оказалось, что отмеченный феномен является всеобщим [20]: ненормальность приращений проявляется на всех биржах независимо от объекта торговли. Отмеченная ненормальность приращений проявлялась в том, что в действительности наблюдалось заметно больше очень больших и очень маленьких по абсолютной величине приращений, чем их должно быть в соответствии с нормальным распределением. Другими словами, наблюдаемые распределения приращений биржевых цен на интервалах времени умеренной длины являются более островершинными, чем нормальные, имея заметно более тяжёлые хвосты. Стоит отметить, что подобными свойствами обладают распределения, эксцесс которых положителен [19]. В связи с этим вместо «основного» винеровского процесса $W(t)$ П. Кларк [23, 24] предложил для описания биржевых цен использовать подчинённый винеровский процесс $W(Z(t))$, где $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, а $Z(t)$ – процесс с неубывающими траекториями, начинающимися в нуле. Если в качестве $Z(t)$ взять процесс Пуассона с параметром λ, независящий от $W(t)$, то величина $W(Z(t))$ будет иметь положительный эксцесс [10]. А это означает большую, чем у нормального, «островершинность» распределения. Отсюда, в частности, следует, что с ростом времени коэффициент эксцесса убывает, а наибольшая «островершинность» наблюдается при малых $t > 0$. Таким образом, предложенная П. Кларком модель эволюции цены рискового актива

$$S(t) = S(0)\exp\{ct + W(Z(t))\} \tag{2}$$

больше соответствует реальным данным, чем модель П. Самуэльсона. В статье [10] в качестве модели, описывающей цену акции, взята модель

$$\bar{S}(t) = S(0)\exp\left\{\left(\mu - \lambda\left[\sqrt{e} - 1\right]\right)t + W(Z(t))\right\}. \tag{3}$$

Модель (3) отличается от модели П. Кларка тем, что параметр $\mu > 0$, как и в модели П. Самуэльсона, имеет смысл локальной доходности. В [10] установлена также безарбитражность модели (3). Вместе с тем и в модели (3) есть одно важное свойство, которое также не согласуется с реальностью. Как известно, до некоторого показательно распределённого момента τ_1 первого скачка пуассоновского процесса $Z(t)$, процесс $W(Z(t))$ будет тождественно равен нулю, т.е. до этого момента времени в модели (3) отсутствуют случайности, что не согласуется с действительностью. В работе [15] рассматривается математическая модель функционирования страховых компаний, которые имеют возможность вкладывать средства на финансовый (B, S)–рынок. В качестве модели акции была использована модифицированная модель П. Кларка. В настоящей работе рассматривается математическая модель функционирования страховой компании, которая имеет возможность вкладывать свои текущие средства на финансовый (B, S)–рынок, когда в качестве описания рискового актива взята модифицированная модель Кларка–Самуэльсона. Как и в [15], в качестве цены рискового актива рассмотрим видоизмененную модель П. Кларка с добавленной диффузионной частью, т.е.

$$P(t) = P(0)\exp\left\{\left(\mu - \lambda\left[\sqrt{e}-1\right]\right)t + W\left(Z(t)\right) - \frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_1\left(t\right)\right\}, \qquad (4)$$

где $P(0)$ – цена акции в нулевой момент времени, $W(t)$ и $W_1(t)$ – винеровские процессы, независимые между собой и от $Z(t)$ (процесса Пуассона с параметром λ). Параметр $\mu > 0$, как и в модели П. Самуэльсона, имеет смысл локальной доходности. В работе [15] доказана безарбиражность модели (4), а также показано, что эксцесс в модели (4) также является положительной величиной $\gamma_2 = \frac{3\lambda}{(\lambda+1)^2 t} \geqslant 0$, что означает большую, чем у нормального, «островершинность» распределения, а это означает, что больше очень больших и очень маленьких по абсолютной величине приращений, нежели их должно быть в соответствии с нормальным распределением. Последний факт и наблюдается в действительности.

2. Основные результаты. В настоящей работе результаты, полученные в работе [13], для случая модели рискового актива П. Самуэльсона переносятся на случай модели рискового актива (4). Пусть $\xi_x(t)$ – капитал компании в момент времени t, а в начальный момент времени $\xi_x(0) = x$. Пусть $c(x)$, $x \in R_+$ – некоторая измеримая, ограниченная, строго положительная функция такая, что $\frac{1}{c(x)}$ локально интегрируема [18]. Будем предполагать, что за время t в компанию поступит $c(\xi_x(t))$ средств, т.е. премии, поступающие в страховую компанию, зависят от имеющегося капитала.

Рассмотрим функционирование страховой компании на бесконечном промежутке времени. Пусть в нулевой момент времени $t = 0$ компания распоряжается начальным капиталом $\xi_x(0) = x$, а $\xi_x(t)$ – капитал компании в момент времени t. Определим вероятность неразорения страховой компании на бесконечном интервале времени $\varphi(x) = P\left\{\xi_x(t) \geqslant 0, \forall t \geqslant 0\right\}$.

Премии страховой компании при капитале x поступают со скоростью $c\left(x\right) > 0$. Страховые иски к компании будем считать стохастическими. Пусть количество поступающих исков подчиняется пуассоновскому закону распределения $Z_1(t)$. Пусть η_k – величины исков с функцией распределения $P(\eta_k < y) = F(y)$, $F(dy) = F(y+dy) - F(y)$. Суммарные иски $\sum_{k=1}^{Z_1(t)} \eta_k$, где $\sum_{k=1}^{0} \eta_k = 0$, составляют сложный пуассоновский процесс с параметром λ, представимый в виде стохастического интеграла $\int_0^t \int_0^{+\infty} \alpha \nu_1(d\alpha, ds)$, где $\nu_1(d\alpha, ds)$ – пуассоновская мера, $M\nu_1(d\alpha, ds) = \lambda_1 F(d\alpha)ds$, а $F(d\alpha)$ – мера интервала $(\alpha, \alpha + d\alpha)$ [22, 23]. Процесс $W\left(Z(t)\right)$ – сложный процесс Пуассона, который имеет представление $W\left(Z(t)\right) = \sum_{k=1}^{Z(t)} w_k$, $\sum_{k=1}^{0} w_k = 0$, w_k – независимые нормально распределённые случайные величины $N(0,1)$, тогда справедливо представление $W\left(Z(t)\right) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \alpha\tilde{\nu}(d\alpha, ds)$, $\tilde{\nu}(d\alpha, ds)$ – пуассоновская мера, $M\tilde{\nu}(d\alpha, ds) = 0, M\tilde{\nu}^2(d\alpha, ds) = \lambda\ \Phi(d\alpha)ds$, $\Phi(d\alpha) = 5xp\left\{-\frac{\alpha^2}{2}\right\} d\alpha$.

Будем считать, что страховая компания размещает весь свой капитал на финансовом (B,S)–рынке, а именно, в каждый момент времени капитал компании разбивается на две части: доля $0 \leqslant u \leqslant 1$ отводится на покупку акций, доля $1-u$ – на банковский счет под процентную ставку r. Эволюция безрискового актива задается формулой $dB(t) = rB(t)dt$, где $B(0)$ – начальный счет. С помощью формулы Ито имеем

$$dP(t) = P(t)\left(\mu dt + \int_{-\infty}^{+\infty}(e^{\gamma}-1)\tilde{\nu}(d\gamma, dt) + \sigma dW_1(t)\right), \tag{5}$$

так как $-\lambda\left[\sqrt{e}-1\right] + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{\gamma}-1-\gamma)\ (d\gamma) = -\lambda\left[\sqrt{e}-1\right] + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{\gamma}-1)(d\gamma) =$ $= -\lambda\left[\sqrt{e}-1\right] + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma}e^{-\frac{\gamma^2}{2}}d\gamma - \lambda = -\lambda\sqrt{e} + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{e}e^{-\frac{\gamma^2-2\gamma+1}{2}}d\gamma = 0$, откуда следует $P(t+\Delta t) = P(t)\left(1 + \mu\Delta t + \int_{-\infty}^{+\infty}(e^{\gamma}-1)\tilde{\nu}(d\gamma, \Delta t) + \sigma\Delta W_1(t)\right)$.

Пусть $u\xi_x(t)/P(t)$ – это количество акций, которое можно купить на сумму $u\xi_x(t)$ по цене $P(t)$ за акцию, отсюда цена рискового актива к моменту времени $(t+\Delta t)$ примет вид $u\xi_x(t)\left[1 + \mu\Delta t + \int_{-\infty}^{+\infty}(e^{\gamma}-1)\tilde{\nu}(d\gamma, \Delta t) + \sigma\Delta W_1(t)\right]$.

Тогда эволюция капитала компании будет иметь вид

$$\xi_x(t+\Delta t) = c\left(\xi_x(t)\right)\Delta t - \int_0^{+\infty}\alpha\nu_1(d\alpha, \Delta t) + (1-u)\xi_x(t)(1+r\Delta t) +$$
$$+ u\xi_x(t)\left[1 + \mu\Delta t + \int_{-\infty}^{+\infty}(e^{y}-1)\tilde{\nu}(dy, \Delta t) + \sigma\Delta W_1(t)\right].$$

Переходя к пределу $\Delta t \to 0$ в последнем выражении, получим

$$\begin{aligned} d\xi_x(t) &= \xi_x(t)\left(u\mu - ur + r - u\lambda\left[\sqrt{e}-1\right]\right)dt + u\sigma\xi_x(t)dW_1(t) + \\ &+ c\left(\xi_x(t)\right)dt - \int_0^{+\infty}\alpha\nu_1(d\alpha, dt) + u\xi_x(t)\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{y}-1)\tilde{\nu}(dy, dt). \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть первый скачок капитала происходит в момент времени $\tau = s$, а его величина равна y. До этого момента уравнение эволюции капитала очевидно имеет вид

$$\begin{gathered} d\bar{\xi}_x(s) = \bar{\xi}_x(s)\left(u\mu - ur + r - u\lambda\left[\sqrt{e} + -1\right]\right)ds + \\ + c\left(\bar{\xi}_x(s)\right)ds + u\sigma\bar{\xi}_x(s)dW_1(s), \\ \bar{\xi}_x(0) = x, s \geqslant 0. \end{gathered} \tag{7}$$

Пусть τ_1 – первый скачек процесса $Z(t)$, β_1 – момент первого иска. В силу определения процессов эти моменты времени показательно распределены соответственно с параметрами $\lambda > 0$ и $\lambda_1 > 0$.

Приведем следующие рассуждения [15, 22]. Распределение величины $\min\left(\tau_1, \beta_1\right)$ имеет показательное распределение с параметром $\lambda + \lambda_1$. Действительно, $P\left\{\min\left(\tau_1, \beta_1\right) > t\right\} = P\left\{\tau_1 > t\right\}P\left\{\beta_1 > t\right\} = e^{-(\lambda+\lambda_1)t}$. Далее, нетрудно проверить, что $\lim\limits_{\Delta s \to 0} P\left\{\tau_1 \in [s, \Delta s) / \min\left(\tau_1, \beta_1\right) \in [s, \Delta s)\right\} = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1}$. Аналогично $\lim\limits_{\Delta s \to 0} P\{\beta_1 \in$ $\in [s, \Delta s) / \min\left(\tau_1, \beta_1\right) \in [s, \Delta s)\} = \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1}$.

Пусть $\bar{P}\left(x,s,A\right)=P\left\{\bar{\xi}_{\text{x}}(s)\in A\right\},\bar{\xi}_{\text{x}}(s)$ решение уравнения (7). Если на отрезке времени $[0,t]$ скачка нет, то вероятность этого события равна $P\left\{\min\left(\tau_1,\beta_1\right)>t\right\}=$ $=P\left\{\tau_1>t\right\}P\left\{\beta_1>t\right\}=e^{-(\lambda+\lambda_1)t}$.

Вероятность скачка на временном интервале $[s,s+\Delta s)$ с точностью до бесконечно малых высшего порядка равна $(\lambda+\lambda_1)\exp\left\{-\left(\lambda+\lambda_1\right)s\right\}\Delta s$. Умножив последнее на условную вероятность $P\left\{\tau_1\in[s,\Delta s)\,/\min\left(\tau_1,\beta_1\right)\in[s,\Delta s)\right\}$, будем иметь: вероятность того, что первый скачек произойдёт на интервале $[s,s+ds)$ и он будет осуществлён за счёт процесса $W(Z(v))$, будет равна $\lambda\exp\left\{-(\lambda+\lambda_1)s\right\}ds$. Аналогично, вероятность того, что первый скачек произойдёт на интервале $[s,s+ds]$ и он будет осуществлён за счёт процесса иска, будет равна $\lambda_1\exp\left\{-\left(\lambda+\right.\right.$ $\left.\left.+\lambda_1\right)s\right\}ds$.

С помощью формулы полной вероятности составим уравнение для вероятности неразорения страховой компании для балансового уравнения на конечном интервале времени $[0,t]$:

$$\begin{aligned}\varphi(x,t)=\int_0^t e^{-(\lambda+\lambda_1)s}\int_0^{+\infty}\bar{P}(x,s,dz)\left(\lambda_1\int_0^z\varphi(z-y,t-s)dF(y)+\right.\\ \left.+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\left(z+uz\left[e^y-1\right]\right),t-s\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)ds+e^{-(\lambda+\lambda_1)t},\end{aligned}\tag{8}$$

Действительно, в случае, если первый скачек $\bar{\xi}_x\left(\rho\right)$ происходит в момент времени $0<s<t$ за счёт поступления иска, то за оставшееся время $t-s$ не наступит разорение, если величина иска не будет превышать величины $\bar{\xi}_x\left(s-0\right)$, что в наших обозначениях не превысит $z>0$ – данный случай описывает первое слагаемое (8). Далее, если первый скачек $\bar{\xi}_x\left(\rho\right)$ происходит в момент времени $0<s<t$ за счёт скачка процесса $Z(\rho)$, то за оставшееся время $(t-s)$ вероятность неразорения, если скачек будет величиной y, а перед скачком значение $\bar{\xi}_x\left(s-0\right)=z>0$, очевидно, будет равна $\varphi\left(\left(z+uz\left[e^y-1\right]\right),t-s\right)$, после чего необходимо произвести усреднение по распределению величины скачка. Данный случай описывает второе слагаемое (8).
Тогда, очевидно, что уравнение для вероятности неразорения страховой компании для балансового уравнения (6) на бесконечном интервале времени $[0,+\infty)$

$$\begin{aligned}\varphi(x)=\int_0^{+\infty}e^{-(\lambda+\lambda_1)s}\int_0^{+\infty}\bar{P}(x,s,dz)\left(\lambda_1\int_0^z\varphi(z-y)dF(y)+\right.\\ \left.+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\left((1-u)+ue^y\right)z\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)ds,\end{aligned}\tag{9}$$

где $\bar{P}(x,t,A)=P\left\{\bar{\xi}_x(t)\in A\right\}$ – это вероятность перехода процесса $\bar{\xi}_x(t)$ из точки x за время $t>0$ во множество A. Основной проблемой при переходе от уравнений (8) и (9) к соответствующим интегро-дифференциальным уравнениям является доказательство определённой гладкости для вероятности неразорения [4, 8, 12–14, 22].

Предположим, что существует плотность величины исков $f(x) = F'(x)$. Пусть $f(0) = f'(0) = 0,\ f''(x)$ – непрерывна, тогда взяв частные производные по z, будем иметь

$$Q_1(z,t) = \int_0^z \varphi(z-y,t)f(y)dy = \int_0^z \varphi(y,t)f(z-y)dy,$$

$$Q_1'(z,t) = \varphi(z,t)f(0) + \int_0^z \varphi(y,t)f'(z-y)dy,$$

$$Q_1''(z,t) = \varphi(z,t)f'(0) + \int_0^z \varphi(y,t)f''(z-y)dy.$$

Обозначим

$$Q_2(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\left((1-u)+ue^y\right)z,t\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

Введя замену

$$b = \left((1-u)+ue^y\right)z, \quad \frac{b}{z} = (1-u)+ue^y, \quad \frac{b}{zu} - \frac{1}{u} + 1 = e^y,$$

$$y = \ln\left(\frac{b}{zu} - \frac{1}{u} + 1\right), \quad dy = -\frac{1}{\frac{b}{zu} - \frac{1}{u} + 1}\frac{db}{uz} = \frac{db}{b - z + uz},$$

получим

$$Q_2(z,t) = \int_{(1-u)z}^{+\infty} \frac{\varphi(b,t)}{b-(1-u)z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\ln^2\left(\frac{b-(1-u)z}{uz}\right)}{2}}db.$$

$$Q_2'(z,t) = \int_{(1-u)z}^{+\infty} \frac{\varphi(b,t)}{\sqrt{2\pi}\left(b-(1-u)z\right)^2}e^{-\frac{\left[\ln\left(\frac{b-(1-u)z}{uz}\right)\right]^2}{2}}\left\{\frac{b\ln\left(\frac{b-(1-u)z}{uz}\right)}{z} - u + 1\right\}db,$$

то есть производная по нижнему пределу равна нулю.

Аналогично, вторая и третья частные производные от $Q_2(z,t)$ по z также существуют и обладают таким же свойством, не приведены в тексте из-за громоздкости выражений. Обозначим

$$a_t(z) = \lambda_1\int_0^z \varphi(z-y,t)dF(y) + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\left((1-u)+ue^y\right)z,t\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy. \qquad (10)$$

Введем следующую функцию $U_t(s,x)$, $0 \leqslant s \leqslant t$: $U_t(s,x) = Ma_t\left(\xi_x(s)\right)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, где $t > 0$, $x \in R$, $U_t(0,x) = a_t(x)$. По переменной z функция $a_t(z) \in C^2$ – дважды непрерывно дифференцируемая, коэффициенты обладают соответствующей гладкостью [26].

Тогда $U_t(s,x)$ удовлетворяет уравнению [17]

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_t(s,x)}{\partial s} &= \frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\frac{\partial^2 U_t(s,x)}{\partial x^2} + \\ &+ \left[\left(\mu u + (1-u)r - u\lambda\left[\sqrt{e}-1\right]\right)x + c(x)\right]\frac{\partial U_t(s,x)}{\partial x}.\end{aligned} \qquad (11)$$

$U_t(s,x)$ изначально также можно записать в виде

$$U_t\left(s,x\right)=\int_0^{+\infty}a_t(z)\bar{P}(x,s,dz), \tag{12}$$

где $\bar{P}(x,s,A)$ – вероятность перехода процесса $\bar{\xi}_x(s)$ из состояния x во множество A. Из (8) следует, что

$$\varphi(x,t)=\int_0^t e^{-(\lambda+\lambda_1)s}\int_0^{+\infty}\bar{P}(x,s,dz)a_t\left(z\right)ds+e^{-(\lambda+\lambda_1)t}$$

либо

$$\varphi(x,t)=\int_0^t e^{\;-(\lambda+\lambda_1)s}\;U_t\left(s,x\right)ds+e^{-(\lambda_2+\lambda_1)t}. \tag{13}$$

Из (13) имеем

$$\begin{gathered}\varphi(x,t)=-\frac{1}{\lambda_1+\lambda}\int_0^t U_t\left(s,x\right)de^{-(\lambda+\lambda_1)s}+e^{-(\lambda+\lambda_1)t}=\\=-\frac{1}{\lambda_1+\lambda}\left[e^{-(\lambda+\lambda_1)t}U_t\left(t,x\right)-a_t\left(x\right)\right]+\\+\frac{1}{\lambda_1+\lambda}\int_0^t e^{-(\lambda+\lambda_1)s}\frac{\partial U_t\left(s,x\right)}{\partial s}ds+e^{-(\lambda+\lambda_1)t}.\end{gathered}$$

Откуда следует

$$\begin{gathered}\varphi(x,t)=\\=\frac{1}{\lambda_1+\lambda}\left[-e^{-(\lambda+\lambda_1)t}U_t\left(t,x\right)+\lambda_1\int_0^x\varphi(x-y,t)dF(y)\right]+\\+\frac{1}{\lambda_1+\lambda}\left[\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\left(\left(1-u\right)+ue^y\right)z,t\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right]+\\+\left[\frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2}+\left\{\left(\mu u+(1-u)r-u\lambda\left[\sqrt{e}-1\right]\right)x+c\left(x\right)\right\}\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}\right]+\\+e^{-(\lambda+\lambda_1)t}.\end{gathered} \tag{14}$$

Из (13) имеем

$$\begin{gathered}\varphi(x,t)-e^{-(\lambda+\lambda_1)t}=\int_0^t e^{-(\lambda+\lambda_1)s}U_t\left(s,x\right)ds\rightarrow\\\rightarrow\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}+(\lambda+\lambda_1)e^{-(\lambda_2+\lambda_1)t}=U_t\left(t,x\right)e^{-(\lambda+\lambda_1)t}\rightarrow\\\rightarrow U_t\left(t,x\right)=\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}e^{(\lambda+\lambda_1)t}+(\lambda+\lambda_1).\end{gathered} \tag{15}$$

Из (14) и (15) получаем

$$\begin{gathered}\varphi(x,t)=\\=\frac{1}{\lambda_1+\lambda}\left[-\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}+\lambda_1\int_0^x\varphi(x-y,t)dF(y)\right]+\\+\frac{1}{\lambda_1+\lambda}\left[\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left(\left(\left(1-u\right)+ue^y\right)z,t\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right]+\\+\frac{1}{\lambda_1+\lambda}\left[\tfrac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2}+\left[\left(\mu u+(1-u)r-u\lambda\left[\sqrt{e}-1\right]\right)x+c\right]\tfrac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}\right].\end{gathered} \tag{16}$$

В случае бесконечного времени функционирования страховой компании из (9) обозначим

$$a(z) = \lambda_1 \int_0^z \varphi(z-y)dF(y) + \lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\left((1-u)+ue^y\right)z\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy. \qquad (17)$$

Пусть T_s – полугруппа операторов

$$T_s a\left(z\right) = \int_0^{+\infty} \bar{P}(x,s,dz)a(z),$$

отметим, что $U(t,x) = T_t(a(x))$,$R_{\lambda_1+\lambda} a\left(x\right) = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_1+\lambda)s} T_s a\left(x\right)ds$ – резольвента.

Пусть A – инфинитезимальный оператор, тогда [16]

$$\begin{gathered} \lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\left(T_h a(x) - a(x)\right) = Aa(x) = \\ = \lim_{h\to+0}\frac{1}{h}\left(U(h,x) - U(0,x)\right) = \frac{\partial U}{\partial t}(t=0) = \\ = \frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\frac{\partial^2 a(x)}{\partial x^2} + \left[\left(\mu u + (1-u)r - u\lambda\left[\sqrt{e}-1\right]\right)x + c\left(x\right)\right]\frac{\partial a(x)}{\partial x}. \end{gathered} \qquad (21)$$

При наших предположениях функция $a\left(z\right)$ принадлежит области определения оператора A, резольвента $R_{\lambda_1+\lambda_2}a(x)$ также принадлежит области определения оператора A, тогда имеем [16]

$$AR_{\lambda_1+\lambda}a(x) = (\lambda_1+\lambda)R_{\lambda_1+\lambda}a(x) - a(x). \qquad (22)$$

Заметим, что $R_{\lambda_1+\lambda}a(x) = \varphi(x)$, отсюда $AR_{\lambda_1+\lambda}a(x) = A\varphi(x)$,

$$\begin{gathered} (\lambda_1+\lambda)\varphi\left(x\right) = \frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\varphi''(x) + \left[\left(\mu u + (1-u)r - u\lambda\left[\sqrt{e}-1\right]\right)x + c\right]\varphi'(x) + \\ + \lambda_1 \textstyle\int_0^x \varphi(x-y)dF(y) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\left((1-u)+ue^y\right)x\right)\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy. \end{gathered}$$

Подводя итоги при сделанных предположениях, имеем уравнение для вероятности неразорения страховой компании на бесконечном интервале времени.

Сформулируем теоремы.

Теорема 1. *Пусть$f(0) = f'(0) = 0$, $f''(x)$ – непрерывна, тогда на конечном промежутке времени $[0,t]$ функционирования страховой компании с эволюцией капитала, заданной уравнением (6), $\varphi\left(x,t\right)$ – вероятность неразорения страховой компании имеет производные $\varphi'_x(x,t)$ и $\varphi''_{xx}(x,t)$ и удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению*

$$\begin{gathered} \left(\lambda_1+\lambda\right)\varphi(x,t) + \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} = \\ = d\frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2} + \left[\left(\mu u + (1-u)r - u\lambda\left[\sqrt{e}-1\right]\right)x + c\left(x\right)\right]\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x} + \\ + \lambda_1 \textstyle\int_0^x \varphi(x-y,t)dF(y) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\left((1-u)+ue^y\right)x,t\right)\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy. \end{gathered} \qquad (23)$$

Теорема 2. *Пусть* $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(x)$ *– непрерывна, тогда на бесконечном промежутке времени* $[0, \infty)$ *функционирования страховой компании с эволюцией капитала, заданной уравнением (6),* $\varphi(x)$ *– вероятность неразорения страховой компании за бесконечное время, имеет производные* $\varphi'(x)$ *и* $\varphi''(x)$ *и удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению*

$$\begin{gathered}(\lambda_1 + \lambda)\varphi(x) = \\ = \frac{1}{2}u^2\sigma^2x^2\varphi''(x) + [(\mu u + (1-u)r - u\lambda[\sqrt{e} - 1])\, x + c(x)]\varphi'(x) + \\ +\lambda_1 \int_0^x \varphi(x-y)dF(y) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(((1-u) + ue^y)\, x\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.\end{gathered} \qquad (24)$$

Замечание. Следует отметить, что формальным переходом при $t \to +\infty$ уравнение (24) получается из уравнения (23), однако необходимо математически строгое обоснование предела $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = 0$, что совсем не очевидно.

Выводы. Таким образом, для модели страховой компании с премиями, которые поступают со скоростью $c(x)$, где x – настоящий капитал компании функционирующей на (B, S)–рынке, был предложен метод выведения интегро-дифференциальных уравнений как на конечном, так и на бесконечном интервалах времени. Особенностью такого способа получения уравнений для вероятности неразорения является то, что на примерах он показывает существование производных вплоть до второго порядка у функции вероятности неразорения.

1. *Бойков А.В.* Модель Крамера–Лундберга со стохастическими премиями // Теория вероятностей и ее применения. – 2002. – **47**, вып. 3. – С. 549–553.
2. *Бондарев Б.В.* Математические модели в страховании. – Донецк: АПЕКС, 2002. – 117 с.
3. *Бондарев Б.В., Смоляков А.И., Степанов Е.В.* Об одной модели эволюции акции и соответствующей задаче Р.Мертона // Прикл. статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2004. – № 2. – С. 11–21.
4. *Бондарев Б.В., Жмыхова Т.В.* Вероятность неразорения страховой компании для модели Крамера–Лундберга и Г–распределенных выплат // Прикл. статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2005. – № 1-2. – С. 54–70.
5. *Бондарев Б.В., Жмихова Т.В.* Ймовірність банкрутства страхової компанії для узагальненої моделі Крамера–Лундберга за умови розміщення капіталу на фінансовому ринку // Прикл. статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2008. – № 1-2. – С. 24–62.
6. *Бондарев Б.В., Жмихова Т.В.* Модель Крамера–Лундберга зі стохастичними преміями за умови розміщення капіталу на банківському депозиті // Тр. ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2008. – **16**. – С. 55–62.
7. *Бондарев Б.В., Болдырева В.О.* О вероятности неразорения для модели страховой компании с расходами на рекламу. I // Прикл. статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2012. – № 2. – С. 47–65.

8. *Бондарев Б.В., Рагулина Е.Ю.* О вероятности неразорения страховой компании на конечном интервале времени при инвестировании капитала на финансовом (B, S)–рынке // Кибернетика и системный анализ. – 2012. – № 5. – С. 112–124.
9. *Бондарев Б.В., Болдырева В.О.* О вероятности неразорения для модели страховой компании с расходами на рекламу. II // Прикл. статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2013. – № 1-2. – С. 21–39.
10. *Бондарев Б.В., Сосницкий О.Е.* Некоторые задачи для модели Кларка. I. Оценка вероятности неразорения страховой компании // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 2. – С. 139–149.
11. *Бондарев Б.В., Сосницкий О.Е.* Стохастическое исчисление в задачах финансовой и актуарной математики. Оценка рисков в страховании: монография. – Донецк: ДонНУ. – 2013. – 227 с.
12. *Бондарев Б.В., Болдырева В.О.* Уравнения для вероятности неразорения страховой компании, работающей на (B, S)–рынке с учетом рекламной деятельности // Междунар. научно-техн. журнал "Проблемы управления и информатики". – 2014. – № 1. – С. 139–147.
13. *Бондарев Б.В., Болдырева В.О.* О вероятности неразорения страховой компании, функционирующей на (B, S)–рынке. Пропорциональные страховые премии // Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики". – 2014. – № 6. – С. 104–123
14. *Бондарев Б.В., Болдырева В.О.* Вывод уравнения для вероятности неразорения страховой компании, работающей на (B, S)–рынке // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – **50**, № 5. – С. 113–121.
15. *Бондарев Б.В., Хмелина М.И.* Модифицированная модель П. Кларка. Вероятность неразорения страховой компании, работающей на (B, S)–рынке.Модель Лундберга // Вест. Донецкого национального ун-та. Сер. А. Естественные науки. – № 1. – 2016 – С. 3–14.
16. *Гихман И.И.* Теория случайных процессов. – Т 2. – М.: Наука, 1973. – 640 с.
17. *Гихман И.И., Скороход В.И.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 612 с.
18. *Карташов М.В., Строев О.М.* Наближення Лундберга для фукції ризику у майже однорідному середовищі // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 2005. – **73**. – С. 63–71.
19. *Корн Г., Корн Т.* Справочник математика (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1968. – 720 с.
20. *Королев В.Ю.* Построение моделей распределений биржевых цен при помощи методов асимптотической теории случайного суммирования // Обозрение прикл. и промышленной математики. – **4**, вып. 1. – 1997. – С. 86–100.
21. *Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці – К.: Інформтехніка, 1995. – 380 с.
22. *Рагуліна О.Ю.* Про диференційовність імовірності небанкрутства страхової компанії в моделях зі сталою відсотковою ставкою // Прикл. статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2010. – № 1-2. – С. 82–116.
23. *Clarc P.K.* A Subordinated Stochastic Process Model of Cotton Futures Prices. – Ph. D. Thesis. Cambridge, Ma.: Harvard University, 1970.
24. *Clarc P.K.* A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices // Econometrica. – 1973. – **41**. – P. 135–155.
25. *Kendal M.G.* The analysis of economic time–series. Part 1. Prices // Of the Royal Statistical Society. – 1953. – **96**. – P. 11–25.
26. *Pervozvansky A.A.* Equation for survival probability in a finite time interval in case of non-zero real interest force // Insurance: Math. and Economics. – 1998. – **23**, Issue 3. – P.287–295.

B. V. Bondarev, M. I. Khmelina

The functioning of the insurance company with premiums, depending on the current capital. Modified Clark-Samuelson model.

This paper shows a way of deriving integro-differential equations for the probability of the non–ruin probability insurance company, in the financial (B, S)–market on the finite and infinite time intervals. Risky asset is described by the modified Clarke–Samuelson model. The speed of the premiums arrival is proportional to the company's capital.

Keywords: *insurance company, the non–ruin probability, financial (B, S)–market, management, the modified Clarke–Samuelson model.*

ГОУ ВПО «Донецкий национальный ун-т»
`grad_mariya@mail.ru`

Получено 19.06.16