УДК 517.927.4

©2016. **А. В. Агибалова, Л. Л. Оридорога**

О РАЗНОСТИ РЕЗОЛЬВЕНТ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ДИРАКА

Рассматриваются две граничные задачи для 2×2 системы типа Дирака: с граничными условиями специального вида и с антипериодическими граничными условиями. Найдено условие, при котором разность резольвент указанных операторов одномерна.

Ключевые слова: *система типа Дирака, резольвента, одномерное возмущение.*

В течение последних двадцати лет одномерные возмущения самосопряженных операторов интенсивно изучались Саймоном, Дель Рио, Макаровым и многими другими авторами в связи с проблемой устойчивости точечного спектра и при изучении сингулярного непрерывного спектра (см. [1] и обзор [2]). Некоторые недавние результаты можно найти в работах [3, 4]. Для возмущений компактных самосопряженных операторов (или самосопряженных операторов с компактной резольвентой), но возмущения которых уже не самосопряженные, спектральная структура становится неожиданно богатой и сложной, как только покинуть классы, охватываемые классическими теориями (диссипативных операторов или слабых возмущений в смысле Мацаева, см. книги [5] и [6]).

Рассмотрим 2×2 систему типа Дирака

$$-iB^{-1}y' + Q(x)y = \lambda y, \qquad y = \mathrm{col}(y_1, y_2), \qquad x \in [0,1], \tag{1}$$

где

$$B = \mathrm{diag}(b_1, b_2), \quad b_1 < 0 < b_2 \quad \text{и} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & Q_{12} \\ Q_{21} & 0 \end{pmatrix} \in L^1([0,1]; \mathbb{C}^{2\times 2}). \tag{2}$$

К системе (1) присоединим граничные условия

$$U_1(y) := y_1(0) - h_0 y_2(0) = 0, \qquad U_2(y) = y_1(1) - h_1 y_2(0) = 0, \tag{3}$$

где $h_0, h_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

С системой (1) естественным образом ассоциируется максимальный оператор $L = L(Q)$, действующий в пространстве $L^2([0,1]; \mathbb{C}^2)$ на области

$$\mathrm{dom}(L) = \{y \in AC([0,1]; \mathbb{C}^2) : Ly \in L^2([0,1]; \mathbb{C}^2)\}.$$

Обозначим через $L_{U_1,U_2} = L_{U_1,U_2}(Q)$ оператор, ассоциированный в $L^2([0,1]; \mathbb{C}^2)$ с граничной задачей (1)–(3). Он определяется как сужение оператора L на область

$$\mathrm{dom}(L_{U_1,U_2}) = \{y \in \mathrm{dom}(L) : U_1(y) = U_2(y) = 0\}.$$

Наряду с условиями (3) рассмотрим антипериодические граничные условия

$$\widetilde{U}_1(y) = y_1(0) + y_1(1) = 0, \qquad \widetilde{U}_2(y) = y_2(0) + y_2(1) = 0, \tag{4}$$

и обозначим через $L_{aper} = L_{\widetilde{U}_1,\widetilde{U}_2}(Q)$ оператор, порожденный в $L^2([0,1];\mathbb{C}^2)$ граничной задачей (1)–(2), (4). Аналогично оператору L_{U_1,U_2}, он определяется как сужение оператора L на область

$$\mathrm{dom}(L_{aper}) = \{y \in \mathrm{dom}(L) : \widetilde{U}_1(y) = \widetilde{U}_2(y) = 0\}.$$

Отметим, что оператор L_{aper} самосопряжен.

Пусть

$$W(x) = \begin{pmatrix} w_{11}(x) & w_{12}(x) \\ w_{21}(x) & w_{22}(x) \end{pmatrix}$$

– фундаментальная матрица системы (1), нормированная условием $W(0) = I$, и

$$W_1 := \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \end{pmatrix}, \quad W_2 := \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \end{pmatrix}.$$

Обозначим также

$$\widetilde{W}(\cdot) := iW(1)W^{-1}(\cdot)B = (\widetilde{w}_{ij}(\cdot))_{i,j=1}^2,$$
$$\widetilde{W}_1 := (\widetilde{w}_{11}\ \widetilde{w}_{12}), \quad \widetilde{W}_2 := (\widetilde{w}_{21}\ \widetilde{w}_{22}).$$

Тогда

$$\int_0^1 iW(1)W^{-1}(t)B \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} dt = \int_0^1 \widetilde{W}(t) \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} dt =$$
$$= \langle \widetilde{W}_1, f \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \langle \widetilde{W}_2, f \rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \widetilde{W}_1, f \rangle \\ \langle \widetilde{W}_2, f \rangle \end{pmatrix},$$

где $\langle \widetilde{W}_i, f \rangle := \int_0^1 (\widetilde{w}_{i1}(t) f_1(t) + \widetilde{w}_{i2}(t) f_2(t))\, dt$, $i \in \{1, 2\}$.

Далее, обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(W_1) & U_1(W_2) \\ U_2(W_1) & U_2(W_2) \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_{aper} = \begin{vmatrix} \widetilde{U}_1(W_1) & \widetilde{U}_1(W_2) \\ \widetilde{U}_2(W_1) & \widetilde{U}_2(W_2) \end{vmatrix}$$

характеристические определители задач (1)–(3) и (1), (2), (4) соответственно. Легко видеть, что

$$\Delta = h_1 - h_0 w_{11}(1) - w_{12}(1),$$
$$\Delta_{aper} = 1 + w_{11}(1) + w_{22}(1) + \mathrm{det} W(1) = 1 + w_{11}(1) + w_{22}(1) + e^{i(b_1+b_2)\lambda}.$$

Справедливо следующее предложение.

Лемма. *Пусть характеристические определители* Δ *и* Δ_{aper} *отличны от нуля. Тогда операторы* L_{U_1,U_2} *и* L_{aper} *обратимы и обратные операторы имеют вид*

$$L_{U_1,U_2}^{-1}f = (C_1(x) + C_2(x))\langle\widetilde{W}_1, f\rangle + iW(x)\int\limits_0^x W^{-1}(t)Bf(t)dt, \qquad (5)$$

$$C_1(x) = \frac{h_0}{\Delta}W_1(x), \quad C_2(x) = \frac{1}{\Delta}W_2(x), \qquad (6)$$

и

$$L_{aper}^{-1}f = \widetilde{C}_1(x)\langle\widetilde{W}_1, f\rangle + \widetilde{C}_2(x)\langle\widetilde{W}_2, f\rangle + iW(x)\int\limits_0^x W^{-1}(t)Bf(t)dt, \qquad (7)$$

$$\widetilde{C}_1(x) = \frac{w_{21}(1)}{\Delta_{aper}}W_2(x) - \frac{1 + w_{22}(1)}{\Delta_{aper}}W_1(x), \qquad (8)$$

$$\widetilde{C}_2(x) = \frac{w_{12}(1)}{\Delta_{aper}}W_1(x) - \frac{1 + w_{11}(1)}{\Delta_{aper}}W_2(x). \qquad (9)$$

Доказательство. Решение системы

$$-iB^{-1}y' + Qy = f$$

имеет вид

$$y(x) = C_1W_1(x) + C_2W_2(x) + iW(x)\int\limits_0^x W^{-1}(t)Bf(t)dt, \qquad (10)$$

где C_1 и C_2 – некоторые постоянные.

(i) Найдем коэффициенты C_1 и C_2, так, чтобы функция $y(x)$ удовлетворяла граничным условиям (3). Подставляя решение (10) в условия (3), приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} C_1 - h_0C_2 = 0, \\ C_1w_{11}(1) + C_2(w_{12}(1) - h_1) = -\langle\widetilde{W}_1, f\rangle. \end{cases}$$

Решение этой системы имеет вид

$$C_1 = \frac{h_0\langle\widetilde{W}_1, f\rangle}{h_1 - h_0w_{11}(1) - w_{12}(1)}, \qquad C_2 = \frac{\langle\widetilde{W}_1, f\rangle}{h_1 - h_0w_{11}(1) - w_{12}(1)}.$$

Подставляя эти выражения в (10) и группируя относительно $\langle\widetilde{W}_1, f\rangle$, приходим к (5) и (6).

(ii) Решение граничной задачи (1), (2), (4) также имеет вид (10) с константами $\widetilde{C}_1$ и $\widetilde{C}_2$. Найдем их. В этом случае получаем систему

$$\begin{cases} \widetilde{C}_1(1+w_{11}(1)) + \widetilde{C}_2 w_{12}(1) = -\langle \widetilde{W}_1, f\rangle, \\ \widetilde{C}_1 w_{21}(1) + \widetilde{C}_2(1+w_{22}(1)) = -\langle \widetilde{W}_2, f\rangle. \end{cases}$$

Ее решением будет

$$\widetilde{C}_1 = \frac{w_{12}(1)\langle \widetilde{W}_2, f\rangle - (1+w_{22}(1))\langle \widetilde{W}_1, f\rangle}{1+w_{11}(1)+w_{22}(1)+e^{i(b_1+b_2)\lambda}},$$
$$\widetilde{C}_2 = \frac{w_{21}(1)\langle \widetilde{W}_1, f\rangle - (1+w_{11}(1))\langle \widetilde{W}_2, f\rangle}{1+w_{11}(1)+w_{22}(1)+e^{i(b_1+b_2)\lambda}}.$$

Подставляя эти коэффициенты в (10) и группируя выражение относительно $\langle \widetilde{W}_1, f\rangle$ и $\langle \widetilde{W}_2, f\rangle$, приходим к равенствам (7)–(9).

Напомним, что знаменатели в выражениях (6), (8) и (9) суть характеристические определители Δ и Δ_{aper}. □

Следующая теорема – основной результат работы.

Теорема. *Пусть* $\Delta \cdot \Delta_{aper} \neq 0$ *и*

$$h_0 + h_1 = 0.$$

Тогда разность резольвент $L^{-1}_{U_1,U_2} - L^{-1}_{aper}$ *одномерна.*

Доказательство. Пусть

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{h_0 w_{11}(x)+w_{12}(x)}{\Delta} + \frac{(1+w_{22}(1))w_{11}(x)-w_{21}(1)w_{12}(x)}{\Delta_{aper}} \\ \frac{h_0 w_{21}(x)+w_{22}(x)}{\Delta} + \frac{(1+w_{22}(1))w_{21}(x)-w_{21}(1)w_{22}(x)}{\Delta_{aper}} \end{pmatrix},$$
$$g_2(x) = \begin{pmatrix} \frac{(1+w_{11}(1))w_{12}(x)-w_{12}(1)w_{11}(x)}{\Delta_{aper}} \\ \frac{(1+w_{11}(1))w_{22}(x)-w_{12}(1)w_{21}(x)}{\Delta_{aper}} \end{pmatrix}.$$

Согласно равенствам (5) и (7),

$$\left(L^{-1}_{U_1,U_2} - L^{-1}_{aper}\right) f = \left(\frac{h_0 W_1(x)+W_2(x)}{\Delta} - \frac{w_{21}W_2(x)-(1+w_{22})W_1(x)}{\Delta_{aper}}\right)\langle \widetilde{W}_1, f\rangle -$$
$$- \frac{w_{21}(1)W_1(x)-(1+w_{11}(1))W_2(x)}{\Delta_{aper}}\langle \widetilde{W}_2, f\rangle = \left[\left(\frac{h_0}{\Delta} + \frac{1+w_{22}(1)}{\Delta_{aper}}\right)W_1(x) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{w_{21}(1)}{\Delta_{aper}}\right)W_2(x)\right]\langle \widetilde{W}_1, f\rangle + \left[-\frac{w_{12}(1)}{\Delta_{aper}}W_1(x) + \frac{1+w_{11}(1)}{\Delta_{aper}}W_2(x)\right]\langle \widetilde{W}_2, f\rangle =$$
$$= \langle \widetilde{W}_1, f\rangle g_1(x) + \langle \widetilde{W}_2, f\rangle g_2(x).$$

Найдем условие, при котором векторы g_1 и g_2 коллинеарны. Обозначив через α коэффициент пропорциональности $g_1 = \alpha g_2$, получаем относительно h_0 и h_1 систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{h_0 w_{11}(x)+w_{12}(x)}{h_1-h_0 w_{11}(1)-w_{12}(1)} = \frac{[(1+w_{11}(1))w_{12}(x)-w_{12}(1)w_{11}(x)]\alpha-(1+w_{22}(1))w_{11}(x)+w_{21}(1)w_{12}(x)}{\Delta_{aper}}, \\ \frac{h_0 w_{21}(x)+w_{22}(x)}{h_1-h_0 w_{11}(1)-w_{12}(1)} = \frac{[(1+w_{11}(1))w_{22}(x)-w_{12}(1)w_{21}(x)]\alpha-(1+w_{22}(1))w_{21}(x)+w_{21}(1)w_{22}(x)}{\Delta_{aper}}. \end{cases}$$

Обозначив через $C_1(x)$ и $C_2(x)$ правые части первого и второго уравнений соответственно, приходим к системе более простого вида

$$\begin{cases} \dfrac{h_0 w_{11}(x) + w_{12}(x)}{h_1 - h_0 w_{11}(1) - w_{12}(1)} = C_1(x), \\ \dfrac{h_0 w_{21}(x) + w_{22}(x)}{h_1 - h_0 w_{11}(1) - w_{12}(1)} = C_2(x). \end{cases}$$

Группируем слагаемые при h_0 и h_1:

$$\begin{cases} -h_0(w_{11}(x) + w_{11}(1)C_1(x)) + h_1 C_1(x) = w_{12}(1)C_1(x) + w_{12}(x), \\ -h_0(w_{21}(x) + w_{11}(1)C_2(x)) + h_1 C_2(x) = w_{12}(1)C_2(x) + w_{22}(x), \end{cases}$$

и решаем систему методом Крамера. Ее решением будут

$$h_0 = \frac{C_2(x)w_{12}(x) - C_1(x)w_{22}(x)}{C_1(x)w_{21}(x) - C_2(x)w_{11}(x)},$$
$$h_1 = w_{12}(1) - \frac{e^{i(b_1+b_2)\lambda} + w_{11}(1)(C_1(x)w_{22}(x) - C_2(x)w_{12}(x))}{C_1(x)w_{21}(x) - C_2(x)w_{11}(x)}.$$

Найдем сумму h_0 и h_1:

$$h_0 + h_1 = \frac{(1 + w_{11}(1))(C_2(x)w_{12}(x) - C_1(x)w_{22}(x)) - e^{i(b_1+b_2)\lambda}}{C_1(x)w_{21}(x) - C_2(x)w_{11}(x)} + w_{12}(1). \qquad (11)$$

Возвращаясь к обозначениям $C_1(x)$ и $C_2(x)$, упрощаем числитель и знаменатель в (11):

$$C_2(x)w_{12}(x) - C_1(x)w_{22}(x) = \frac{e^{i(b_1+b_2)\lambda}}{\Delta_{aper}}(\alpha w_{12}(1) + w_{22}(1) + 1),$$
$$C_1(x)w_{21}(x) - C_2(x)w_{11}(x) = -\frac{e^{i(b_1+b_2)\lambda}}{\Delta_{aper}}(\alpha(1 + w_{11}(1)) + w_{21}(1)).$$

Подставив полученные выражения в (11), получаем искомое условие:

$$h_0 + h_1 = 0.$$

□

1. *Del Rio R., Makarov N., Simon B.* Operators with singular continuous spectrum. II. Rank one operators // Comm. Math. Phys. – 1994. – **165** (1). – P. 59–67.
2. *Simon B.* Spectral analysis of rank one perturbations and applications // CRM Proc. Lecture Notes, Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 1995. – **8**. – P. 109–149.
3. *Liaw C., Treil S.* Rank one perturbations and singular integral operators // J. Funct. Anal. – 2009. – **257** (6). – P. 1947–1975.
4. *Albeverio S., Konstantinov A., Koshmanenko V.* Decompositions of singular continuous spectra of H.2-class rank one perturbations // Integral Equations Operator Theory. – 2005. – **52** (4). – P. 455–464.
5. *Gohberg I., Krein M.* Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators. – Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969. – 378 p.
6. *Gohberg I., Krein M.* Theory and Applications of Volterra Operators in Hilbert Space. – Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970. – 430 p.

A. V. Agibalova, L. L. Oridoroga

On resolvent difference of Dirac type operators.

We consider two boundary value problems for 2×2 Dirac type system with the special boundary conditions and with the antiperiodic boundary conditions. We indicate the condition under with the resolvent difference of the operators is one-dimensional.

Keywords: *Dirac-type system, resolvent operator, one-dimensional perturbation.*

ГУ «Ин-т прикл. математики и механики», Донецк
`agannette@rambler.ru`
`vremenny-orid@mail.ru`

Получено 20.05.16