УДК 519.865

©2015. **А. А. Симогин**

СТОИМОСТЬ ДВУХЦВЕТНОГО ОПЦИОНА В ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ СО СКАЧКАМИ

В работе рассматривается двухцветный опцион покупки европейского типа в диффузионной модели (B,S)-финансового рынка. Получена аналитическая формула, определяющая стоимость данного опциона.

Ключевые слова: *финансовый рынок, двухцветный опцион, модель скачкообразной диффузии.*

1. Введение. Определение справедливой стоимости производных финансовых инструментов является одной из основных задач финансовой инженерии. При этом используется аппарат стохастической математики. Впервые использовать броуновское движение для расчета цен опционов предложил в своей диссертации «Теория спекуляций» [1] французский математик Луи Башелье.

На данный момент известны различные модели ценообразования опционов. Тем не менее до 1973 года не было эффективных, для решения этой задачи, моделей ценообразования опционов. Существенное влияние на развитие биржевого рынка производных инструментов оказали опубликованные в 1973 году фундаментальные работы Фишера Блэка, Майрона Шоулса [2] и Роберта Мертона [4]. В модели Блэка–Шоулса цена акции имеет логнормальное распределение и удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению Ито вида

$$dS\left(t\right) = \mu S\left(t\right)dt + \sigma S\left(t\right)dW\left(t\right), \quad S\left(0\right) = S_0.$$

Таким образом, в этой модели изменение цены акции является непрерывным диффузионным процессом.

Формула Блэка–Шоулса привлекает участников финансового рынка своей простотой, поэтому на практике для оценки стоимости производных финансовых инструментов предпочитают использовать именно ее. Но, несмотря на всю ее практическую ценность, формула Блэка–Шоулса не лишена недостатков. Основной из них, и, наверное, самый очевидный, – в условиях реального финансового рынка цена актива может изменяться скачкообразно, что противоречит свойству непрерывности геометрического процесса диффузии.

Различными исследователями в области финансовой математики были предложены модели оценки стоимости акции, которые в той или иной степени смягчают недостатки модели Блэка–Шоулса.

В частности, были предложены модели скачкообразной диффузии, согласно которым эволюция цены базового актива уже не является непрерывным процессом, а является в общем случае решением стохастического дифференциального уравнения:

$$dS\left(t\right) = \left(r - \lambda\alpha\right)S\left(t\right)dt + \left(e^{\xi} - 1\right)S\left(t\right)dN\left(t\right) + \sigma S\left(t\right)dW\left(t\right), \quad S\left(0\right) = S_0,$$

где r – безрисковая процентная ставка, σ – волатильность. $W(t)$ – стандартный винеровский процесс, $N(t)$ – пуассоновский процесс с постоянной интенсивностью λ, ξ – случайная величина с плотностью распределения вероятностей $f(z)$ определяет магнитуду скачков. Предполагается, что процессы $W(t)$, $N(t)$ и случайная величина ξ независимы в совокупности.

В 1976 году в работе [5] Роберт Мертон получил аналитическую формулу для цены европейского опциона в случае логнормального распределения магнитуд скачков.

Все существующие на данный момент опционы делятся на две большие группы. К первой относятся стандартные (ванильные): европейского и американского типа. Ко второй – экзотические опционы. Они появились и стали популярны в 80-х годах прошлого столетия, заменив комбинации стандартных. Существуют различные стили экзотических опционов [1].

В группу многофакторных опционов входят опционы на несколько базисных активов. Среди них можно выделить три основные группы опционов: радуга (rainbow option), корзина (basket option) и кванто (quanto option). Существуют и другие разновидности многофакторных опционов, и все они характеризуются тем, что их стоимость определяется ценами двух или более активов, а также корреляцией между ценами этих активов.

Если в основе опциона лежат два базисных актива, то его называют двухцветным опционом. Среди двухцветных опционов европейского типа можно выделить основные со следующими платежными функциями, через K обозначена цена исполнения опциона.

Лучший актив или деньги, $f(T) = \max(S_1(T), S_2(T), K)$, обеспечивает обладателю получение максимального по стоимости из двух рискованных активов и денежных средств по истечении срока исполнения опциона. Исследован Штульцем [13], Джонсон [8], Рубинштейном [12].

Покупка по максимальной цене, $f(T) = \max(\max(S_1(T) - S_2(T)) - K, 0)$, дает право его владельцу на приобретение максимального по стоимости актива по цене исполнения в момент экспирации. Исследован Шульцем [13] и Джонсоном [8].

Покупка по минимальной цене, $f(T) = \max(\min(S_1(T) - S_2(T)) - K, 0)$, дает право его владельцу на приобретение минимального по стоимости актива по цене исполнения в момент экспирации. Исследован Штульцем [13] и Джонсоном [8].

Продажа по максимальной цене, $f(T) = \max(K - \max(S_1(T) - S_2(T)), 0)$, дает его обладателю право продать один из двух рисковых активов с наибольшей стоимостью по цене исполнения в момент экспирации. Исследован Марграбе [9], Штульцем [13] и Джонсоном [8].

Продажа по минимальной цене, $f(T) = \max(K - \min(S_1(T) - S_2(T)), 0)$, дает его обладателю право продать один из двух рисковых активов с наименьшей стоимостью по цене исполнения в момент экспирации. Исследован Штульцем [13] и Джонсоном [8].

Обмениваемый, $f(T) = \max(S_1(T) - S_2(T), 0)$, дает его держателю право обменять при исполнении контракта первый актив на второй. Основу теории обмениваемых опционов в модели Блека-Шоулса положили две независимые работы, опубликованные в 1978 году Вильямом Марграбе [9] и Стенли Фишером [7]. Они рассмотрели стандартный обмениваемый опцион, который может быть интерпретирован как колл-опцион на первый актив со страйком равным будущей цене второго актива на дату погашения или пут-опцион на второй актив со страйком равным будущей цене первого актива на дату погашения. В дальнейшем эта теория нашла свое продолжение в работе Штульца [13] 1982 года.

2. Постановка задачи. Пусть $(\Omega, F, \Im_t, P)$ полное вероятностное пространство, где $\Im_t = \sigma(W_s, N_s, s \le t)$ непрерывная справа возрастающая фильтрация, $\{W_t, t \ge 0\}$ стандартный винеровский процесс, $\{N_t, t \ge 0\}$ процесс Пуассона с постоянной интенсивностью λ. Будем предполагать, что процессы W_t и N_t независимы.

Рассмотрим (B, S)-рынок с непрерывным временем, состоящий из банковского счета B (нерисковый актив) и двух акций S^1, S^2 (рисковые активы). Относительно банковского счета B будем предполагать, что $B = \{B_t, t \ge 0\}$ – детерминированная функция, которая подчиняется дифференциальному уравнению

$$dB_t = rB_t dt \tag{1}$$

с начальным условием $B_0 = 1$, т.е. $B_t = e^{rt}$, $r \ge 0$, здесь r – краткосрочная процентная ставка. Эволюции стоимости акций $S^i = \left\{S_t^i, t \ge 0\right\}$, $i = 1, 2$, описываются решениями стохастических дифференциальных уравнений скачкообразной диффузии

$$\begin{aligned} \frac{dS_t^1}{S_{t-}^1} &= \mu_1 dt + \sigma_1 dW_t - \nu_1 dN_t, \quad S_0^1 > 0; \\ \frac{dS_t^2}{S_{t-}^2} &= \mu_2 dt + \sigma_2 dW_t - \nu_2 dN_t, \quad S_0^2 > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

здесь $\mu_i \ge 0$ (параметры дрейфа), $\sigma_i > 0$ (волатильности диффузии) и $\nu_i < 1$ (магнитуды скачков).

Согласно [2] плотность меры $\tilde{P}(\cdot)$ эквивалентной $P(\cdot)$, относительно которой дисконтированные цены акций являются мартингалами, имеет вид

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = \exp\left\{\phi W_t - \frac{\phi^2}{2}t + \psi\left(N_t - \lambda t\right)\right\} \prod_{s \le t} \left(1 + \psi \Delta N_t\right) \exp\left\{-\psi \Delta N_t\right\}, \tag{3}$$

где константы ϕ и ψ являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} \mu_1 - r - \nu_1 \lambda + \phi\sigma_1 - \psi\nu_1\lambda = 0; \\ \mu_2 - r - \nu_2 \lambda + \phi\sigma_2 - \psi\nu_2\lambda = 0. \end{cases}$$

При условии, что $\sigma_1\nu_2 - \sigma_2\nu_1 \ne 0$, она имеет единственное решение

$$\phi = \frac{(\mu_1 - r)\,\nu_1 - (\mu_2 - r)\,\nu_2}{\sigma_2\nu_1 - \sigma_1\nu_2},$$

$$\psi = \frac{(\mu_1 - r)\,\sigma_2 - (\mu_2 - r)\,\sigma_1}{\lambda\,(\sigma_2\nu_1 - \sigma_1\nu_2)} - 1.$$

Откуда непосредственно вытекает, что риск-нейтральная мера единственна и, как следствие [3], рассматриваемая модель финансового рынка является полной.

Согласно теореме Гирсанова, процесс $\tilde{W}_t = W_t - \phi t$ относительно меры $\tilde{P}\,(\cdot)$ является винеровским, а процесс N_t – пуассоновским с интенсивностью

$$\tilde{\lambda} = \lambda\,(1+\psi) = \frac{(\mu_1 - r)\,\sigma_2 - (\mu_2 - r)\,\sigma_1}{(\sigma_2\nu_1 - \sigma_1\nu_2)}.$$

Таким образом, плотность (3) мартингальной меры $\tilde{P}\,(\cdot)$ относительно исходной меры $P\,(\cdot)$ приобретает вид

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = \exp\left\{\phi W_t - \frac{\phi^2}{2}t + \left(\lambda - \tilde{\lambda}\right)t + \left(\ln\tilde{\lambda} - \ln\lambda\right)N_t\right\}. \tag{4}$$

Запишем решения уравнений (2) в экспоненциальной форме. Для этого полезным будет следующее утверждение.

Лемма Ито для процесса скачкообразной диффузии [6]. *Пусть X_t диффузионный процесс со скачками, определенный как сумма дрейфа a_t, стохастического дифференциального интеграла Ито и сложного процесса Пуассона*

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + \sum_{k=1}^{N_t}\Delta X_k,$$

где a_t σ_t непрерывные неупреждающие процессы, причем

$$E\left[\int_0^T \sigma_t^2 dW_s\right] < +\infty.$$

Тогда для любой функцииf (x,t): $[0,T]\times R \to R$ из пространства $C^{1,2}_{[0,T]\times R}$ процесс $Y_t = f\,(t, X_t)$ представим в виде

$$\begin{gathered} f\,(t,X_t) - f\,(0,X_0) = \int_0^t \left[\tfrac{\partial f(s,X_s)}{\partial s} + a_s\tfrac{\partial f(s,X_s)}{\partial x} + \tfrac{\sigma_s^2}{2}\tfrac{\partial^2 f(s,X_s)}{\partial x^2}\right]ds + \\ + \int_0^t \sigma_s\tfrac{\partial f(s,X_s)}{\partial x}dW_s + \sum\nolimits_{i\geq 1,\tau_i\leq t}\left[f\,(X_{\tau_i-}+\Delta X_i) - f\,(X_{\tau_i-})\right], \end{gathered}$$

или в дифференциальной форме

$$\begin{gathered} dY_t = df\,(t,X_t) = \tfrac{\partial f(t,X_t)}{\partial t}dt + a_t\tfrac{\partial f(t,X_t)}{\partial x}dt + \tfrac{\sigma_t^2}{2}\tfrac{\partial^2 f(t,X_t)}{\partial x^2}dt + \\ + \sigma_t\tfrac{\partial f(t,X_t)}{\partial x}dW_t + [f\,(X_{t-}+\Delta X_t) - f\,(X_{t-})]. \end{gathered} \tag{5}$$

Применяя формулу (5) к функции $\ln S_t^i$, $i = 1, 2$, получим

$$\begin{gathered} d\ln S_t^i = \mu_i S_t^i\tfrac{\partial \ln S_t^i}{\partial x}dt + \tfrac{\left[\sigma_i S_t^i\right]^2}{2}\tfrac{\partial^2 \ln S_t^i}{\partial x^2}dt + \\ + \sigma_i S_t^i\tfrac{\partial \ln S_t^i}{\partial x}dW_t + \left[\ln S_{t-}^i\,(1-\nu_i) - \ln f\left(S_{t-}^i\right)\right] = \\ = \left(\mu_i - \tfrac{[\sigma_i]^2}{2}\right)dt + \sigma_i dW_t + \ln\,(1-\nu_i)\,. \end{gathered}$$

Таким образом, решения уравнений (2) имеют вид

$$\begin{aligned} S_t^i &= S_0^i \exp\left\{\left(\mu_i - \tfrac{[\sigma_i]^2}{2}\right)t + \sigma_i W_t + \textstyle\sum_{\tau_i \le t, \Delta N_{\tau_i} \ne 0} \ln(1-\nu_i)\right\} = \\ &= S_0^i \exp\left\{\left(\mu_i - \tfrac{[\sigma_i]^2}{2}\right)t + \sigma_i W_t + N_t \ln(1-\nu_i)\right\}. \end{aligned}$$

С учетом представления $W_t = \tilde{W}_t + \phi t$, выражения для S_t^i, $i = 1, 2$, имеют вид

$$S_t^i = S_0^i \exp\left\{\left(\nu_i\tilde{\lambda} - \frac{[\sigma_i]^2}{2} + r\right)t + \sigma_i\tilde{W}_t + N_t\ln(1-\nu_i)\right\}. \tag{6}$$

Рассмотрим на предложенном финансовом рынке обменный опцион европейского типа с платежной функцией следующего вида

$$f(T) = \max\left\{S_T^1 - S_T^2, 0\right\} = \left(S_T^1 - S_T^2\right)^+. \tag{7}$$

В данной работе изучается ценообразование обмениваемого опциона в случае, когда уравнения, которые описывают эволюции стоимости акций (2), возмущены не только диффузионной составляющей, но и процессом Пуассона.

3. Стоимость опциона.

Теорема. *Пусть (B,S)-рынок описывается уравнениями (1)–(2), причем* $\sigma_1\nu_2 - \sigma_2\nu_1 \ne 0$. *Тогда стоимость опциона с платежной функцией вида* (7) *определяется соотношениями при* $\sigma_1 < \sigma_2$,

$$\begin{aligned} C(T) = e^{-\tilde{\lambda}T}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\tilde{\lambda}T)^n}{n!}\Big[A_{1,n}\Big(1 - F\Big(B_n + \tfrac{(\sigma_2-\sigma_1)\sqrt{T}}{2}\Big)\Big) - \\ - A_{2,n}\Big(1 - F\Big(B_n + \tfrac{(\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{T}}{2}\Big)\Big)\Big], \end{aligned} \tag{8}$$

при $\sigma_1 > \sigma_2$,

$$\begin{aligned} C(T) = e^{-\tilde{\lambda}T}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\tilde{\lambda}T)^n}{n!}\Big[A_{1,n}\Big(1 - F\Big(B_n + \tfrac{(\sigma_2-\sigma_1)\sqrt{T}}{2}\Big)\Big) - \\ - A_{2,n}\Big(1 - F\Big(B_n + \tfrac{(\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{T}}{2}\Big)\Big)\Big], \end{aligned} \tag{9}$$

где $A_{1,n}$, $A_{2,n}$ *и* B_n *определяются равенствами*

$$A_{1,n} = S_0^1(1-\nu_1)^n\exp\left\{\nu_1\tilde{\lambda}T\right\}, \quad A_{2,n} = S_0^2(1-\nu_2)^n\exp\left\{\nu_2\tilde{\lambda}T\right\}, \tag{10}$$

$$B_n = \frac{1}{(\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{T}}\ln\frac{A_{2,n}}{A_{1,n}}, \tag{11}$$

а $F(x)$ *– функция распределения случайной стандартной нормальной величины.*

Доказательство. Как показано в [1], [2] при существовании и единственности мартингальной меры финансовый рынок является полным безарбитражным. Справедливая стоимость опциона европейского типа, в этом случае, определяется соотношением

$$C(T) = \tilde{\mathrm{E}}\left[B^{-1}(T)f(T)\right] = \tilde{\mathrm{E}}\left[\exp\{-rT\}\left(S_T^1 - S_T^2\right)^+\right], \tag{12}$$

здесь $\tilde{\mathrm{E}}(\cdot)$ – математическое ожидание относительно меры $\tilde{P}(\cdot)$.

Подставим в равенство (12) выражения (6) для явного вида процессов изменения стоимости акций S_t^i, $i = 1, 2$. Имеем

$$\begin{gathered} C(T) = \tilde{\mathrm{E}}\left(S_0^1 \exp\left\{\left(\nu_1\tilde{\lambda} - \tfrac{[\sigma_1]^2}{2}\right)T + \sigma_1\tilde{W}_T + N_T\ln(1-\nu_1)\right\} - \right. \\ \left. -S_0^2 \exp\left\{\left(\nu_2\tilde{\lambda} - \tfrac{[\sigma^2]^2}{2}\right)T + \sigma_2\tilde{W}_T + N_T\ln(1-\nu_2)\right\}\right)^+. \end{gathered} \tag{13}$$

С учетом того, что процессы $\tilde{W}_t$ и N_t независимы относительно мартингальной меры $\tilde{P}(\cdot)$, продолжая равенство (13), получим

$$\begin{gathered} C(T) = \tilde{\mathrm{E}}\left(\tilde{\mathrm{E}}\left[\left(S_0^1 \exp\left\{\left(\nu_1\tilde{\lambda} - \tfrac{[\sigma^1]^2}{2}\right)T + \sigma_1\tilde{W}_T + N_T\ln(1-\nu_1)\right\} - \right.\right.\right. \\ \left.\left.\left. -S_0^2 \exp\left\{\left(\nu_2\tilde{\lambda} - \tfrac{[\sigma_2]^2}{2}\right)T + \sigma_2\tilde{W}_T + N_T\ln(1-\nu_2)\right\}\right)^+ \middle| N_T\right]\right) = \\ = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathrm{E}}\left[\left(S_0^1 \exp\left\{\left(\nu_1\tilde{\lambda} - \tfrac{[\sigma_1]^2}{2}\right)T + \sigma_1\tilde{W}_T + N_T\ln(1-\nu_1)\right\} - \right.\right. \\ \left.\left. -S_0^2 \exp\left\{\left(\nu_2\tilde{\lambda} - \tfrac{[\sigma_2]^2}{2}\right)T + \sigma_2\tilde{W}_T + N_T\ln(1-\nu_2)\right\}\right)^+ \middle| N_T = n\right] \times \\ \times \tfrac{(\tilde{\lambda}T)^n}{n!} e^{-\tilde{\lambda}T} = \\ = e^{-\tilde{\lambda}T} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(\tilde{\lambda}T)^n}{n!} \tilde{\mathrm{E}}\left(S_0^1(1-\nu_1)^n \exp\left\{\left(\nu_1\tilde{\lambda} - \tfrac{[\sigma_1]^2}{2}\right)T\right\} \exp\left\{\sigma_1\tilde{W}_T\right\} - \right. \\ \left. -S_0^2(1-\nu_2)^n \exp\left\{\left(\nu_2\tilde{\lambda} - \tfrac{[\sigma_2]^2}{2}\right)T\right\} \exp\left\{\sigma_2\tilde{W}_T\right\}\right)^+ = e^{-\tilde{\lambda}T} \times \\ \times \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(\tilde{\lambda}T)^n}{n!} \tilde{\mathrm{E}}\left(A_{1,n} \exp\left\{\sigma_1\tilde{W}_T - \tfrac{[\sigma_1]^2}{2}T\right\} - A_{2,n} \exp\left\{\sigma_2\tilde{W}_T - \tfrac{[\sigma_2]^2}{2}T\right\}\right)^+, \end{gathered} \tag{14}$$

где $A_{1,n}$ и $A_{2,n}$ определяются соотношениями (10) соответственно.

Найдем математическое ожидание, входящее в выражение (14):

$$\begin{gathered} \tilde{\mathrm{E}}\left(A_{1,n} \exp\left\{\sigma_1\tilde{W}_T - \tfrac{[\sigma_1]^2}{2}T\right\} - A_{2,n} \exp\left\{\sigma_2\tilde{W}_T - \tfrac{[\sigma_2]^2}{2}T\right\}\right)^+ = \\ = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi T}} \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(A_{1,n} \exp\left\{\sigma_1 x - \tfrac{[\sigma_1]^2}{2}T\right\} - \right. \\ \left. -A_{2,n} \exp\left\{\sigma_2 x - \tfrac{[\sigma_2]^2}{2}T\right\}\right)^+ \exp\left\{-\tfrac{x^2}{2T}\right\} dx. \end{gathered} \tag{15}$$

Введем следующее обозначение: $K = \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} \ln \frac{a_2}{a_1} + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)T}{2}$. Если $\sigma_1 < \sigma_2$, то продолжая равенство (15), получим

$$\begin{gathered}\tilde{\mathrm{E}}\left(A_{1,n}\exp\left\{\sigma_1\tilde{W}_T-\frac{[\sigma_1]^2}{2}T\right\}-A_{2,n}\exp\left\{\sigma_2\tilde{W}_T-\frac{[\sigma_2]^2}{2}T\right\}\right)^+=\\=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{K}\left(A_{1,n}\exp\left\{\sigma_1 x-\frac{[\sigma_1]^2}{2}T\right\}-\right.\\\left.-A_{2,n}\exp\left\{\sigma_2 x-\frac{[\sigma_2]^2}{2}T\right\}\right)\exp\left\{-\frac{x^2}{2T}\right\}dx=\\=\frac{A_{1,n}}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{K}\exp\left\{-\frac{(x-\sigma_1T)^2}{2T}\right\}dx-\\-\frac{A_{2,n}}{\sqrt{2\pi T}}\int_{-\infty}^{K}\exp\left\{-\frac{(x-\sigma_2T)^2}{2T}\right\}dx=\\=A_{1,n}F\left(\frac{K-\sigma_1T}{\sqrt{T}}\right)-A_{2,n}F\left(\frac{K-\sigma_2T}{\sqrt{T}}\right)=\\=A_{1,n}F\left(\frac{1}{(\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{T}}\ln\frac{A_{2,n}}{A_{1,n}}+\frac{(\sigma_2-\sigma_1)\sqrt{T}}{2}\right)-\\-A_{2,n}F\left(\frac{1}{(\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{T}}\ln\frac{A_{2,n}}{A_{1,n}}+\frac{(\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{T}}{2}\right)=\\=A_{1,n}F\left(B_n+\frac{(\sigma_2-\sigma_1)\sqrt{T}}{2}\right)-A_{2,n}F\left(B_n+\frac{(\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{T}}{2}\right).\end{gathered}\tag{16}$$

Подставляя выражение (16) в равенство (14), получим соотношение (8).

В случае если $\sigma_1>\sigma_2$, тогда

$$\begin{gathered}\tilde{\mathrm{E}}\left(A_{1,n}\exp\left\{\sigma_1\tilde{W}_T-\frac{[\sigma_1]^2}{2}T\right\}-A_{2,n}\exp\left\{\sigma_2\tilde{W}_T-\frac{[\sigma_2]^2}{2}T\right\}\right)^+=\\=\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_{K}^{+\infty}\left(\left(A_{1,n}\exp\left\{\sigma_1 x-\frac{[\sigma_1]^2}{2}T\right\}\right)-\right.\\\left.-A_{2,n}\exp\left\{\sigma_2 x-\frac{[\sigma_2]^2}{2}T\right\}\right)\exp\left\{-\frac{x^2}{2T}\right\}dx=\\=A_{1,n}\left[1-F\left(\frac{K-\sigma_1T}{\sqrt{T}}\right)\right]-A_{2,n}\left[1-F\left(\frac{K-\sigma_2T}{\sqrt{T}}\right)\right]=\\=A_{1,n}\left[1-F\left(B_n+\frac{(\sigma_2-\sigma_1)\sqrt{T}}{2}\right)\right]-\\-A_{2,n}\left[1-F\left(B_n+\frac{(\sigma_1-\sigma_2)\sqrt{T}}{2}\right)\right].\end{gathered}\tag{17}$$

И, наконец, подставляя выражение (17) в равенство (14), получим требуемое в теореме соотношение (9). □

4. Заключение. В работе рассмотрена модель финансового (B,S)-рынка с непрерывным временем. Рынок состоит из банковского счета и двух рисковых активов. При этом эволюция стоимости акции является процессом скачкообразной диффузии, т.е. цена актива подчиняется геометрическому броуновскому движению, но иногда испытывает скачки вверх или вниз с постоянными магнитудами.

Показано, что для данной модели существует единственная мартингальная мера, т.е. рынок является полным безарбитражным. Выписана явная аналитическая формула для справедливой стоимости обмениваемого опциона, аналогичная формуле Марграбе.

1. *Буренин А.Н.* Форварды, фьючерсы, опционы, экзотические и погодные производные. – М.: Научно-техническое общество имени академика С.И. Вавилова, 2005. – 534 с.
2. *Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л.* Математика финансовых обязательств. – М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 260 с.

3. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики: в 2 т. – М.: ФАЗИС, Т. 1: Факты и модели, 1998. – 512 с.
4. *Bachelier L.* Theorie de la Speculation // Annales de I'Ecole Normale Superieure. – 1900. – **17**. – P. 21–86.
5. *Black F., Scholes* The Pricing of Otions and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. – 1973. – **81**. – № 3. – P. 637–659.
6. *Cont R., Tankov P.* Financial modelling with jump processes. – Chapman & Hall/CRC Press, 2004. – 606 p.
7. *Fischer S.* Call Option Pricing When the Exercise Price is Uncertain, and the Valuation of Index Bonds // Journal of Finance. – 1978. – P. 169–176.
8. *Johnson H.* Options on the maximum or the minimum of several assets // Journal of Financial and Quantitative Analysis. – 1987. – **22**. – P. 277–283.
9. *Margrabe W.* The value of an option to exchange one asset for another // The Journal of Finance. – 1978. – **23**. – P. 177–186.
10. *Merton R.C.* Theory of Rational Option Pricing // Bell Journal of Economics and Management Science. – 1973. – **4**, № 1. – P. 141–183.
11. *Merton R.C.* Option Pricing When Underlying Stock Return are Discontinuous // Journal of Financial Economics. – 1976. – **3**, № 1. – P. 125–144.
12. *Rubinstein M.* Somewhere over the rainbow // Risk. – 1991. – **4**. – P. 63–66.
13. *Stulz R. M.* Options on the minimum or the maximum of two risky assets // Journal of Financial Economics. – 1982. – XXXIII. – № 1. – P. 161–185.
14. *West, G.* Better approximations to cumulative normal functions // WILMOTT Magazine May, 2005. – P. 70–76.

A. A. Simogin

Two-Color Option Pricing Under a Jump Diffusion Model.

The article considers of exotic purchase two-color option of European type a jump diffusion model of (B, S)-financial market. The author have obtained the analytical formulas determining the options prices.

Keywords: *financial market, two-color option, jump diffusion model.*

Донецкий национальный ун-т
`anatolsimsim@gmail.com`

Получено 19.05.15