ISSN 1683-4720 Труды ИПММ. 2015. Том 29

УДК 531.38

©2015. **Г. А. Котов**

РЕГУЛЯРНАЯ ПРЕЦЕССИЯ ГИРОСТАТА, НЕСУЩЕГО ДВА РОТОРА

В статье рассмотрены условия существования регулярных прецессионных движений гиростата в поле силы тяжести. Получены три новых решения уравнений движения.

Ключевые слова: *гиростат, регулярные прецессии, переменный гиростатический момент.*

1. Введение. Математическое моделирование регулярных прецессий механических систем связано с тем, что они являются рабочими режимами многих объектов техники. Данный класс движений изучен в задачах о движении гиростата под действием силы тяжести и под действием потенциальных и гироскопических сил (см., например, [2, 3, 7]). К настоящему времени исследованы условия существования регулярных прецессий в трех случаях. В первом случае предполагается, что гиростатический момент постоянен (см. обзор [3]) и для него целесообразно использовать метод инвариантных соотношений для автономных дифференциальных уравнений [11, 12]. Второй случай соответствует движению гиростата с одним ротором [1, 4, 9]. В третьем случае моделирование регулярных прецессий проводится при условии, что гиростат несет два ротора с переменным гиростатическим моментом [6], [8, 10]. Для исследования условий существования регулярных прецессий гиростата с двумя роторами может быть применен либо метод инвариантных соотношений для неавтономных дифференциальных уравнений [5], либо метод, основанный на использовании первых интегралов [8]. В данной статье продолжено изучение регулярных прецессий гиростата под действием силы тяжести. Построены классы движений, которые имеют новые свойства по сравнению с движениями [6, 8].

2. Постановка задачи. Уравнения движения гиростата в поле силы тяжести имеют вид [3]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\omega} - (\dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{s}, \qquad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – единичные ортогональные векторы, фиксированные в теле-носителе; $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ – дифференцируемые функции времени, являющиеся компонентами гиростатического момента в базисе векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; точка над переменными $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ обозначает дифференцирование по времени t.

Первые интегралы уравнений (1), (2) таковы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \qquad (3)$$

где k – произвольная постоянная.

Рассмотрим регулярные прецессионные движения гиростата относительно вертикали [3]. Третью ось подвижной системы координат направим по единичному вектору $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$, который образует постоянный угол θ_0 с вектором $\boldsymbol{\nu}$. Регулярные прецессионные движения характеризуются инвариантными соотношениями [3]

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0 = \cos\theta_0, \quad \boldsymbol{\nu} = (a_0' \sin nt,\ a_0' \cos nt,\ a_0), \quad \boldsymbol{\omega} = n\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{\nu}, \tag{4}$$

где $a_0' = \sin\theta_0$.

Внесем $\boldsymbol{\omega}$ из (4) в уравнения (1), (2). Уравнение (2) обращается в тождество, а уравнение (1) примет вид:

$$\begin{gathered} nm\Big[Sp(A)\big(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}\big) - 2\big(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}\big)\Big] - n^2\big(A\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}\big) - m^2\big(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}\big) - \\ - \lambda_1(t)\Big[n\big(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}\big) + m\big(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\nu}\big)\Big] - \lambda_2(t)\Big[n\big(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{a}\big) + m\big(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\nu}\big)\Big] + \\ + \dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

где $Sp(A)$ – след матрицы A.

По аналогии с [6, 8] при анализе уравнения (5) будем использовать ортонормированный базис $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$.

Так как

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0, \qquad |\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\beta}| = |\boldsymbol{\gamma}| = 1, \tag{6}$$

то, умножая левую часть уравнения (5) скалярно соответственно на $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$, получим

$$\begin{aligned} &\dot{\lambda}_1(t) - \lambda_2(t)\Big[\gamma_3 n + \big(a_0'\gamma_1 \sin nt + a_0'\gamma_2 \cos nt + a_0\gamma_3\big)m\Big] + F_1(t) = 0, \\ &\dot{\lambda}_2(t) + \lambda_1(t)\Big[\gamma_3 n + \big(a_0'\gamma_1 \sin nt + a_0'\gamma_2 \cos nt + a_0\gamma_3\big)m\Big] + F_2(t) = 0, \\ &\quad \lambda_2(t)\Big[\alpha_3 n + \big(a_0'\alpha_1 \sin nt + a_0'\alpha_2 \cos nt + a_0\alpha_3\big)m\Big] - \\ &\qquad -\lambda_1(t)\Big[\beta_3 n + \big(a_0'\beta_1 \sin nt + a_0'\beta_2 \cos nt + a_0\beta_3\big)m\Big] + F_3(t) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_i(t) = A_{0,i}n^2 - \Big(&A_{2,i}\cos 2nt + A_{2,i}'\sin 2nt + a_0 A_{1,i}\cos nt + a_0 A_{1,i}'\sin nt + \\ + \varkappa_0 A_{0,i}\Big)&m^2 + nm\Big[\big(d_{1,i}' - A_{1,i}\big)\cos nt - \big(d_{1,i} + A_{1,i}'\big)\sin nt + 2a_0 A_{0,i}\Big] + \\ + \delta_{1,i}\cos nt &+ \delta_{1,i}'\sin nt + \delta_{0,i}, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$
\begin{aligned}
&i = 1,2,3, \quad \boldsymbol{e}_i = (e_{1,i}, e_{2,i}, e_{3,i}), \quad (\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{\gamma}),\\
&d_{0,i} = e_{1,i}A_{13} + e_{2,i}A_{23} + e_{3,i}A_{33}, \quad d'_{1,i} = a'_0\big(e_{1,i}A_{11} + e_{2,i}A_{12} + e_{3,i}A_{13}\big),\\
&d_{1,i} = a'_0\big(e_{1,i}A_{12} + e_{2,i}A_{22} + e_{3,i}A_{23}\big), \quad A_{0,i} = e_{2,i}A_{13} - e_{1,i}A_{23},\\
&A_{1,i} = a'_0\Big[e_{1,i}\big(A_{22} - A_{33}\big) - e_{2,i}A_{12} + e_{3,i}A_{13}\Big],\\
&A'_{1,i} = a'_0\Big[e_{2,i}\big(A_{33} - A_{11}\big) + e_{1,i}A_{12} - e_{3,i}A_{23}\Big],\\
&A_{2,i} = \frac{a'^2_0}{2}\big(2e_{3,i}A_{12} - e_{1,i}A_{23} - e_{2,i}A_{13}\big),\\
&A'_{2,i} = \frac{a'^2_0}{2}\Big[e_{2,i}A_{23} - e_{1,i}A_{13} + e_{3,i}(A_{11} - A_{22})\Big],\\
&\varkappa_0 = \frac{1}{2}(a'^2_0 - 2a^2_0), \quad \delta'_{1,i} = a'_0(e_{3,i}s_2 - e_{2,i}s_3),\\
&\delta_{1,i} = a'_0(e_{1,i}s_3 - e_{3,i}s_1), \quad \delta_{0,i} = a_0(e_{2,i}s_1 - e_{1,i}s_2).
\end{aligned}
$$

3. Об общем методе исследования. Согласно методу, предложенному в [8], обозначим:

$$
\begin{aligned}
&M = \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nu} = a'_0\alpha_1\sin nt + a'_0\alpha_2\cos nt + a_0\alpha_3,\\
&N = \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\nu} = a'_0\beta_1\sin nt + a'_0\beta_2\cos nt + a_0\beta_3,\\
&L = \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nu} = a'_0\gamma_1\sin nt + a'_0\gamma_2\cos nt + a_0\gamma_3,\\
&F_4(t) = A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} - k = (A'_1\sin nt + A_1\cos nt + a_0A_{33})n+\\
&\ + (A_2\cos 2nt + A'_2\sin 2nt + 2a_0A_1\cos nt + 2a_0A'_1\sin nt + A_0)m - k,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&A_2 = \frac{a'^2_0}{2}(A_{22} - A_{11}), \quad A'_2 = a'^2_0A_{12}, \quad A'_1 = a'_0A_{13}, \quad A_1 = a'_0A_{23},\\
&A_0 = \frac{a'^2_0}{2}(A_{22} + A_{11}) + a^2_0A_{33}.
\end{aligned}
$$

Запишем с учетом (9) интеграл моментов из (3):

$$
\lambda_1(t)M + \lambda_2(t)N + F_4(t) = 0. \tag{10}
$$

Из равенства (10) и третьего соотношения из (7) найдем

$$
\begin{aligned}
\lambda_1(t) &= \frac{NF_3(t) - F_4(t)(\alpha_3n + Mm)}{n(\alpha_3M + \beta_3N) + m(M^2 + N^2)},\\
\lambda_2(t) &= -\frac{MF_3(t) + F_4(t)(\beta_3n + Nm)}{n(\alpha_3M + \beta_3N) + m(M^2 + N^2)}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Отметим, что в силу (6) для векторов $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ справедливы соотношения

$$
\alpha_i\alpha_j + \beta_i\beta_j + \gamma_i\gamma_j = \begin{cases} 0, \text{ если } i \neq j,\\ 1, \text{ если } i = j, \end{cases} \qquad i,j = 1,2,3. \tag{12}
$$

После подстановки (11) в первое уравнение из (7) имеем

$$\sum_{k=0}^{6}(P_k \cos knt + Q_k \sin knt) = 0. \tag{13}$$

Поскольку равенство (13) должно выполняться для всех t, то приходим к алгебраической системе из 13 уравнений

$$P_0 = 0, \quad P_k = 0, \quad Q_k = 0, \quad k = \overline{1,6}. \tag{14}$$

Пусть угол нутации отличен от $\frac{\pi}{2}$, т. е. $a_0 \neq 0$. С учетом обозначений (8) и соотношений (12) равенства $P_6 = 0$, $Q_6 = 0$ из системы (14) обратятся в тождества. Запишем равенства $P_5 = 0$, $Q_5 = 0$.

$$\begin{aligned} &\gamma_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2)(\beta_2 s_1 + \beta_1 s_2) + \gamma_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2)(\beta_2 s_2 - \beta_1 s_1) = 0, \\ &\gamma_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2)(\beta_2 s_1 + \beta_1 s_2) - \gamma_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2)(\beta_2 s_2 - \beta_1 s_1) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

На основании аналогичных преобразований из второго уравнения из (7) найдем

$$\sum_{k=0}^{6}(P'_k \cos knt + Q'_k \sin knt) = 0$$

и приходим к системе

$$P'_0 = 0, \quad P'_k = 0, \quad Q'_k = 0, \quad k = \overline{1,6}. \tag{16}$$

Равенства $P'_5 = 0$, $Q'_5 = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\gamma_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2)(\alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2) + \gamma_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2)(\alpha_2 s_2 - \alpha_1 s_1) = 0, \\ &\gamma_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2)(\alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2) - \gamma_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2)(\alpha_2 s_2 - \alpha_1 s_1) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Решая уравнения (15) относительно переменных $\beta_2 s_1 + \beta_1 s_2$ и $\beta_2 s_2 - \beta_1 s_1$, запишем главный определитель системы (15)

$$\begin{vmatrix} \gamma_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2) & \gamma_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2) \\ \gamma_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2) & -\gamma_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2) \end{vmatrix} = -(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^3,$$

который равен нулю только при $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Случай $\boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 1)$ рассмотрен в [6], здесь полагаем $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$. Тогда из (15) и (17) следует

$$\beta_2 s_1 + \beta_1 s_2 = 0, \quad \beta_2 s_2 - \beta_1 s_1 = 0, \quad \alpha_2 s_1 + \alpha_1 s_2 = 0, \quad \alpha_2 s_2 - \alpha_1 s_1 = 0.$$

Отсюда, учитывая (6), получим решение систем уравнений (15) и (17)

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0. \tag{18}$$

Таким образом, если плоскость, которой принадлежит вектор гиростатического момента, не ортогональна вектору $\boldsymbol{a}$, то в рассматриваемом случае для регулярной прецессии гиростата в поле силы тяжести центр масс принадлежит оси собственного вращения.

Из равенств $P_4 = 0$, $Q_4 = 0$ определим следующие равенства:

$$(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)A_{12} + \gamma_1\gamma_2(A_{22} - A_{11}) + \gamma_3(\gamma_1 A_{23} - \gamma_2 A_{13}) = 0, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &\big[\gamma_1\beta_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2) + \gamma_2\beta_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2)\big](a_0 s_3 + mk) = \\ &= m^2\big[\beta_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2)(\gamma_1 A_{11} + \gamma_2 A_{12} + \gamma_3 A_{13}) + \\ &+ \beta_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2)(\gamma_1 A_{12} + \gamma_2 A_{22} + \gamma_3 A_{23})\big]. \end{aligned} \tag{20}$$

При $\gamma_1\beta_1(\gamma_1^2 - 3\gamma_2^2) + \gamma_2\beta_2(\gamma_2^2 - 3\gamma_1^2) \neq 0$ равенство (20) служит для нахождения параметра s_3, а соотношение (19) устанавливает зависимость между компонентами тензора инерции и расположением роторов в теле-носителе.

Так как в общем случае нахождение решений системы (14) затруднительно, то дальнейшие исследования проведем при некоторых дополнительных условиях.

4. Примеры разрешимости системы (14)**.**

Пример 1. Положим $\boldsymbol{\alpha} = (0, 0, 1)$, $\boldsymbol{\beta} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\gamma} = (0, 1, 0)$ и проведем построение системы алгебраических уравнений из (13). Из (19) получим равенство $A_{12} = 0$, при выполнении которого уравнение (20) становится тождеством. Учитывая (18), система (14) приводится к виду:

$$\begin{aligned} &m^2 A_{22} - km - a_0 s_3 = 0, \quad A_{23}(n^2 - m^2)(n + a_0 m) = 0, \\ &A_{23}(n + a_0 m)\big[4n(n + a_0 m)(m + a_0 n) + m((n + a_0 m)^2 + 3(m + a_0 n)^2)\big] = 0, \\ &(m^2 + 4n^2 + 6mna_0 + m^2 a_0^2)(m^2 A_{22} - km - a_0 s_3) = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Из системы (21) следует условие $m^2 A_{22} - km - a_0 s_3 = 0$, а двум оставшимся уравнениям можно удовлетворить положив либо $A_{23} = 0$, либо $n + a_0 m = 0$. Запишем при ограничениях

$$s_1 = s_2 = 0, \quad A_{12} = 0, \quad m^2 A_{22} - km - a_0 s_3 = 0$$

выражения для $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ из (11).

Если $A_{23} = 0$, то

$$\begin{aligned} &\lambda_1(t) = -a_0' m A_{13} \sin nt - \frac{1}{m}(s_3 + m(n + a_0 m)A_{33} - a_0 m^2 A_{22}), \\ &\lambda_2(t) = a_0' m(A_{22} - A_{11}) \sin nt - (n + a_0 m)A_{13}. \end{aligned} \tag{22}$$

При условии $n + a_0 m = 0$ имеем

$$\begin{aligned} &\lambda_1(t) = -a_0' m(A_{13} \sin nt + A_{23} \cos nt) - \frac{1}{m}(s_3 - a_0 m^2 A_{22}), \\ &\lambda_2(t) = a_0' m(A_{22} - A_{11}) \sin nt. \end{aligned} \tag{23}$$

Таким образом, при $\boldsymbol{\alpha} = (0,0,1)$, $\boldsymbol{\beta} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{\gamma} = (0,1,0)$ координаты центра масс гиростата определяются зависимостями $s_1 = s_2 = 0, \quad m^2 A_{22} - km - a_0 s_3 = 0$, компоненты гиростатического момента являются периодическими функциями времени, линейными по $\sin nt$ и $\cos nt$. В случае $A_{23} = 0$ вторая ось является главной осью в теле-носителе; в случае $n + a_0 m = 0$ появляется зависимость между скоростями прецессии и собственного вращения гиростата, а гиростатический момент не зависит от A_{33}.

Рассмотрим другой пример.

Пример 2. Пусть $\boldsymbol{\alpha} = (0, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}), \quad \boldsymbol{\beta} = (\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{-2}{\sqrt{30}}), \quad \boldsymbol{\gamma} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$. Из (19), (20) найдем соответственно:

$$A_{23} = A_{13} - \frac{1}{2}(A_{22} - A_{11}), \tag{24}$$

$$s_3 = \frac{m}{a_0}\big(m(A_{11} + A_{12} + 2A_{13}) - k\big). \tag{25}$$

С учетом (18) и (24), (25) система алгебраических уравнений (14) примет вид:

$$\begin{aligned}
&(m^2 - n^2)K = 0, (a_0 n^2 + 3mn + 2a_0 m^2)K = 0, (a_0 n^2 + 2mn + a_0 m^2)K = 0,\\
&(12a_0 nm^2 - 15m^3 - mn^2 - 4a_0 n^3 - 3a_0^2 mn^2 + 27a_0^3 m^3)K = 0,\\
&(-84a_0 nm^2 - 51m^3 - 29mn^2 - 20a_0 n^3 - 39a_0^2 mn^2 + 15a_0^3 m^3)K = 0,\\
&(-5a_0 nm^2 - 9a_0 m^3 - a_0^3 mn^2 - 2a_0^2 n^3 + 7a_0^3 m^3 - 6m^2 n)K = 0,
\end{aligned} \tag{26}$$

где $K = 4a_0'^2 m(A_{11} + A_{12} + 2A_{13}) + a_0(n + a_0 m)(A_{11} - A_{22} + 4A_{13} + 4A_{33}) - 4k$. Из (26) следует равенство $K = 0$, которое приводит к условию

$$k = a_0'^2 m(A_{11} + A_{12} + 2A_{13}) + \frac{1}{4}a_0(n + a_0 m)(A_{11} - A_{22} + 4A_{13} + 4A_{33}). \tag{27}$$

При выполнении условий (18), (24), (25), (27) зависимости (11) будут иметь вид

$$\lambda_1(t) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{3}\big(\mu_j \cos(jnt) + \mu_j' \sin(jnt)\big)}{R_2(t)}, \; \lambda_2(t) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{3}\big(\sigma_j \cos(jnt) + \sigma_j' \sin(jnt)\big)}{R_2(t)}, \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned}
&R_2(t) = -\frac{1}{6}\big[a_0'^2 m \sin 2nt + 2a_0'(n + 2a_0 m)(\sin nt + \cos nt) - 2a_0(n + a_0 m) - 5a_0'^2 m\big],\\
&\mu_3 = \frac{m^2\sqrt{5}}{60}a_0'^3(2A_{12} - A_{13}), \quad \mu_3' = \frac{m^2\sqrt{5}}{120}a_0'^3\big[4A_{12} + 5(A_{11} - A_{22}) + 10A_{13}\big],
\end{aligned}$$

$$\mu_2=\frac{m\sqrt5}{60}a_0'^2(n+2a_0m)\big[8(A_{12}+A_{13})+5(A_{11}-A_{22})\big],$$
$$\mu_2'=\frac{m\sqrt5}{60}a_0'^2(n+3a_0m)\big[12A_{13}+5(A_{11}-A_{22})\big],$$
$$\mu_1=\frac{a_0'\sqrt5}{60}\big[5(A_{22}-A_{11})(n^2-a_0^2m^2+5m^2+5a_0mn)+A_{13}(5a_0^2m^2-56a_0mn-$$
$$-49m^2-12n^2)+2A_{12}(7a_0^2m^2-4a_0mn-11m^2)\big],$$
$$\mu_1'=\frac{a_0'\sqrt5}{120}\big[5(A_{22}-A_{11})(2n^2-m^2+6a_0mn+5m^2a_0^2)-2A_{13}(5m^2+12n^2+$$
$$+23a_0^2m^2+40a_0mn)+4A_{12}(11m^2+4a_0mn-7m^2a_0^2)\big],$$
$$\mu_0=\frac{\sqrt5}{120}\big[2a_0(n+a_0m)^2+a_0'^2m(7n+9a_0m)\big]\big[12A_{13}+5(A_{11}-A_{22})\big],$$

$$\sigma_3=\frac{m^2\sqrt{30}}{60}a_0'^3(2A_{13}+A_{12}),\quad \sigma_3'=\frac{m^2\sqrt{30}}{60}a_0'^3A_{12},$$
$$\sigma_2=\frac{m\sqrt{30}}{15}a_0'^2(n+2a_0m)(A_{13}+A_{12}),\quad \sigma_2'=-\frac{m\sqrt{30}}{30}a_0'^2(n+3a_0m)A_{13},$$
$$\sigma_1=\frac{a_0'\sqrt{30}}{60}\big[2A_{13}(5a_0^2m^2+6a_0mn-m^2+2n^2)+A_{12}(7a_0^2m^2-4a_0mn-11m^2)\big],$$
$$\sigma_1'=\frac{a_0'\sqrt{30}}{60}\big[4A_{13}(5m^2+n^2-a_0^2m^2+5a_0mn)+A_{12}(11m^2+4a_0mn-7m^2a_0^2)\big],$$
$$\sigma_0=\frac{\sqrt{30}}{30}(3a_0^2mn-9a_0m^2-2a_0n^2-7mn+7a_0^3m^2)A_{13}.$$

Таким образом, для случая, когда $\boldsymbol\alpha=(0,-\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5})$, $\boldsymbol\beta=(\frac{5}{\sqrt{30}},-\frac{1}{\sqrt{30}},-\frac{2}{\sqrt{30}})$, $\boldsymbol\gamma=(\frac{1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6})$, компоненты гиростатического момента являются периодическими функциями вида (28). Зависимость между компонентами тензора инерции выражается формулой (24), а после подстановки (27) в равенство (25) получим выражение

$$s_3=a_0m^2(A_{11}+A_{12}+2A_{13})-\frac{m(n+a_0m)}{4}(A_{11}-A_{22}+4A_{13}+4A_{33}).\qquad(29)$$

Отметим, что в силу (18) центр масс находится на оси собственного вращения, но, в отличие от предыдущего примера разрешимости, третья координата центра масс зависит только от компонент тензора инерции тела-носителя и скоростей собственного вращения и прецессии и не содержит постоянной моментов k, значение которой в данном примере находится из соотношения (27).

Пример 3. Пусть $\boldsymbol\alpha=(0,1,0)$, $\boldsymbol\beta=(0,0,1)$, $\boldsymbol\gamma=(1,0,0)$. Равенства (15) обращаются в тождества. Система алгебраических уравнений (14) имеет вид:

$$\begin{aligned}
&a_0 s_1 = 0, \quad a_0 s_2 = 0, \quad a_0 A_{12} = 0, \quad a_0(m + 6a_0 n + a_0^2 m)s_2 = 0,\\
&a_0(m^2 A_{11} - km - a_0 s_3) = 0, \quad a_0 A_{12}(12a_0 mn + 3m^2 + a_0^2 m^2 + 8a_0^2 n^2) = 0,\\
&a_0\big[s_1(m + 2a_0 n + a_0^2 m) + (m^2 - n^2)(n + a_0 m)A_{13}\big] = 0,\\
&a_0(m^2 + 8n^2 + 3a_0^2 m^2 + 12a_0 mn)(m^2 A_{11} - km - a_0 s_3) = 0,\\
&a_0\big[4(n + a_0 m)A_{13}(m^3 + a_0^2 m^3 + 6a_0 nm^2 + 3a_0^2 mn^2 + 3n^2 m + 2a_0 n^3) +\\
&+ s_1(3m^2 + 3a_0^4 m^2 + 8a_0^3 nm + 8a_0 nm + 2a_0^2 m^2 + 8a_0^2 n^2)\big] = 0.
\end{aligned} \tag{30}$$

Если положить $a_0 \neq 0$, то решение системы (30) описывается равенствами

$$\begin{aligned}
&s_1 = s_2 = 0, \quad A_{12} = 0, \quad m^2 A_{11} - km - a_0 s_3 = 0,\\
&A_{13} = 0 \text{ или } n + a_0 m = 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

При $a_0 = 0$, уравнения (30) выполняются при произвольных значениях других параметров. Для нахождения решения дифференциальных уравнений (7) необходимо рассматривать систему (16). Запишем (16), учитывая, что $a_0 = 0$, $a_0' = 1$.

$$\begin{aligned}
&s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad A_{12} = 0, \quad mA_{11} - k = 0,\\
&-5ms_1 + 4n(n^2 - m^2)A_{13} = 0, \quad 5ms_1 + 2nA_{13}(5n^2 + 3m^2) = 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

Решение системы (32) таково

$$s_1 = s_2 = 0, \quad A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0, \quad k = mA_{11}. \tag{33}$$

Отметим, что в случае $A_{13} = 0$, зависимости (33) можно получить из (31) положив $a_0 = 0$.

Таким образом, с учетом (11) и (31), запишем решение уравнений (7).

При произвольном значении угла θ_0 и $A_{13} = 0$ имеем,

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(t) = a_0' m(A_{22} - A_{11})\cos nt - (n + a_0 m)A_{23},\\
&\lambda_2(t) = -a_0' mA_{23}\cos nt - \frac{1}{m}(s_3 + m(n + a_0 m)A_{33} - a_0 m^2 A_{11}).
\end{aligned}$$

Если $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$ и $n + a_0 m = 0$, то компоненты гиростатического момента таковы

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(t) = a_0' m(A_{11} - A_{22})\cos nt,\\
&\lambda_2(t) = -a_0' m(A_{13}\sin nt + A_{23}\cos nt) - \frac{1}{m}(s_3 - a_0 m^2 A_{11}).
\end{aligned}$$

В данном примере, при угле нутации равном $\frac{\pi}{2}$ третья координата центра масс может принимать любые значения.

5. Выводы. На основании метода, использующего первые интегралы уравнений движения гиростата, получены три решения уравнений (1) и (2) движения гиростата в поле силы тяжести. Эти решения описывают прецессионные движения. В зависимости от расположения роторов в теле-носителе установлен вид зависимостей $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ от времени.

1. *Возняк А.А.* Полурегулярные прецессии первого типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – **24**. – С. 45–57.
2. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
3. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2012. – 364 с.
4. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О некоторых классах регулярной прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом относительно наклонной оси в обобщенной задаче динамики // Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – **21**. – С. 64–75.
5. *Горр Г.В., Ковалев А.М., Неспирный В.Н.* Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений с приложением в механике // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43 – С. 3–18.
6. *Горр Г.В., Щетинина Е.К.* Прецессии гиростата в случае плоского годографа гиростатического момента // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43 – С. 46–56.
7. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч. – М.; Л.: Гозтехиздат, 1949. – Т. 1. – С. 31–152.
8. *Котов Г.А.* Прецессии общего вида гиростата, несущего два маховика // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43 – С. 79–89.
9. *Мазнев А.В.* Регулярные прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Докл. НАН Украины. – 2011. – № 8. – С. 66–72.
10. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. – 1970. – № 2. – С. 83–96.
11. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-е НГУ, 1965. – 221 с.
12. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 4. – С. 52–73.

G. A. Kotov

Regular precession motion of gyrostat carrying two rotors.

The conditions of existence of gyrostat's regular precession motions under the action of gravity are studied in the article. Three new solutions of motion equations are obtained.

Keywords: *gyrostat, regular precession motions, variable gyrostatic moment.*

Донбасская нац. акад. строительства
и архитектуры, г. Макеевка
`kotov_ga@rambler.ru`

Получено 10.04.15