УДК 531.35

©2015. **Б. И. Коносевич, Ю. Б. Коносевич**

НОВОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЙ ОСИ СИММЕТРИИ АРТИЛЛЕРИЙСКОГО СНАРЯДА

В статье рассмотрен новый тип приближенного ВКБ-решения уравнений углового движения оси симметрии снаряда. Оно является модификацией известного приближенного решения этих уравнений. Из полученных оценок следует, что в случае незатухающих низкочастотных колебаний оси симметрии снаряда оба приближенных решения имеют погрешности одинакового порядка, а при затухающих колебаниях модифицированное решение точнее известного на один порядок по малому параметру.

Ключевые слова: *артиллерийский снаряд, внешняя баллистика, метод ВКБ.*

Введение. В теории полета снаряда широко используется асимптотический метод, берущий свое начало в работах Лиувилля и развитый Вентцелем, Крамерсом и Бриллюэном применительно к задачам теоретической физики. В честь последних трех авторов его часто называют методом ВКБ. В классической баллистике с помощью метода ВКБ найдено в явном виде приближенное решение дифференциальных уравнений, описывающих угловое движение оси симметрии снаряда.

Наряду с этим *основным* приближенным решением известно также *модифицированное* приближенное ВКБ-решение уравнений углового движения оси симметрии снаряда. Оценки погрешности обоих этих приближенных решений получены В.С. Пугачевым [1] в виде сложных неравенств, содержащих операции дифференцирования, интегрирования и взятия максимума. Такого рода оценки не позволяют судить о сравнительной точности полученных приближений.

В статье [2] найден порядок погрешности *основного* приближенного решения по отношению к малому параметру, введенному в уравнения движения снаряда. Установлено, что погрешность основного приближенного решения имеет один и тот же порядок в случаях незатухающих и затухающих низкочастотных колебаний оси симметриии снаряда.

В статье [3] определен порядок погрешности *модифицированного* приближенного решения по отношению к малому параметру. Оказалось, что в случае незатухающих низкочастотных колебаний погрешности основного и модифицированного приближенных решений имеют одинаковые порядки, а при затухающих колебаниях модифицированное приближенное решение точнее основного на один порядок по малому параметру.

В процессе иследования этого классического модифицированного приближенного решения возникает новый тип модифицированного приближенного решения уравнений углового движения оси симметрии снаряда. В настоящей работе определена погрешность этого модифицированного решения нового типа и установлено, что порядки погрешности в случаях незатухающих и затухающих низкочастотных колебаний для него такие же, как и для классического модифицированного приближенного решения. Эти результаты были анонсированы в [4] без доказательства.

1. Уравнения движения снаряда. В статье рассматривается движение осесимметричного артиллерийского снаряда в поле силы тяжести под действием принятой в баллистике системы аэродинамических сил и моментов. Для описания движения снаряда используются следующие переменные: x, y, z – координаты центра масс снаряда в стартовой правой системе декартовых координат $Oxyz$ (ось Ox направлена горизонтально в сторону стрельбы, а ось Oy – вертикально вверх); v, θ, ψ – компоненты вектора $\boldsymbol{v}$ скорости центра масс (v – его модуль, θ – угол между осью Ox и проекцией $\boldsymbol{v}$ на вертикальную плоскость Oxy, ψ – угол между вектором $\boldsymbol{v}$ и плоскостью Oxy); α и β – проекции единичного вектора оси симметрии на вторую и третью оси полускоростной системы координат (ее первая ось направлена вдоль $\boldsymbol{v}$, а вторая ось лежит в плоскости Oxy); p, q, r – проекции вектора угловой скорости снаряда на оси полусвязанной (невращающейся) системы координат (ее первая ось направлена вдоль оси симметрии). Через I_1, I_2, m обозначаются осевой и экваториальный центральные моменты инерции снаряда и его масса, g – ускорение свободного падения.

Исследование динамики полета снаряда проводится при помощи системы дифференциальных уравнений, которая получается из исходной "точной" системы путем линеаризации аэродинамических сил и моментов по углу атаки δ (это угол между вектором $\boldsymbol{v}$ и осью симметрии снаряда), а также дополнительной линеаризацией по определенному выше углу ψ. Эта система, называемая в дальнейшем l-системой, линейна по переменным $q, r, \alpha, \beta, \psi$.

Чтобы прменить асимптотические методы к исследованию l-системы, в нее вводится малый параметр ε. Для этого используется процедура нормализации, которая описана в [2]. Она основана на том, что в качестве новых масштабов фазовых переменных и зависящих от них функций выбираются верхние характерные числовые значения их модулей, то есть значения, близкие к максимумам по времени для всех траекторий рассматриваемого класса снарядов. В полученных таким образом нормализованных уравнениях движения выделяются безразмерные функции порядка 1, зависящие от фазовых переменных, и масштабные множители при них, которые при определенных предположениях выражаются в виде степеней малого параметра. Малый параметр вводится вместо числа 0,1. Для нормализованных переменных используются те же обозначения, что и для соответствующих ненормализованных переменных.

Изменение порядков безразмерных аэродинамических функций связано, в основном, с изменением нормализованной скорости v. С учетом этого данные функции представлены в виде произведений множителей вида v^n на новые функции, причем целые степени n таких представлений выбраны так, чтобы новые функции принимали значения, численно близкие к 1 на среднем участке траектории, который вносит определяющий вклад в формирование погрешности приближенных решений.

Полученная в результате l-система с малым параметром состоит из следующей подсистемы *уравнений поступательного движения и продольного вращения снаряда*

$$\dot{x} = \varepsilon^3 v \cos\theta, \quad \dot{y} = \varepsilon^3 v \sin\theta, \quad \dot{z} = \varepsilon^3 v\psi,$$
$$\dot{v} = \varepsilon^3 v^3 K_0(y,v) - \varepsilon^4 g \sin\theta,$$
$$\dot{\theta} = -\varepsilon^4 \frac{g\cos\theta}{v} + \varepsilon^4 v^2 K_1(y,v)\alpha - \varepsilon^4 v^2 K_2(y,v,p)\beta, \tag{1}$$
$$\dot{\psi} = \varepsilon^4 \frac{g}{v}\psi \sin\theta + \varepsilon^2 v^2 K_2(y,v,p)\alpha + \varepsilon^2 v^2 K_1(y,v)\beta,$$
$$\dot{p} = \varepsilon^4 p v K_3(y,v)$$

и следующей подсистемы *уравнений углового движения его оси симметрии*

$$\dot{\Omega} = a(y,v,p,\varepsilon)\Omega + b(y,v,p,\varepsilon)\Delta,$$
$$\dot{\Delta} = -i\Omega - k(y,v,p,\varepsilon)\Delta + l(v,\theta,\psi,\varepsilon). \tag{2}$$

Здесь $\Omega = q + ir, \ \Delta = \alpha + i\beta$, функции a, b, k, l представляются в виде

$$a(y,v,p,\varepsilon) = \varepsilon^2 v A_1(y,v) + ipI,$$
$$b(y,v,p,\varepsilon) = v^3[\varepsilon^2 B_1(y,v,p) + iB_2(y,v)],$$
$$k(y,v,p,\varepsilon) = \varepsilon^2 v^2 \big[K_1(y,v) + iK_2(y,v,p)\big], \tag{3}$$
$$l(v,\theta,\psi,\varepsilon) = \varepsilon^2 \frac{g}{v}(\cos\theta - i\varepsilon^2\psi\sin\theta).$$

Пусть $\phi = \phi(x,y,z,v,\theta,\psi,p,q,r,\alpha,\beta,t,\varepsilon)$ – действительная или комплексная функция. Равенство $\phi = O(\varepsilon^n)$ означает, что функция ϕ имеет в рабочей области порядок ε^n или более высокий порядок при $\varepsilon \to 0$, а равенство $\phi = O^*(\varepsilon^n)$ означает, что ϕ имеет порядок, равный ε^n при $\varepsilon \to 0$. Запись $\phi = O^*_+(\varepsilon^n)$ означает, что ϕ является действительной положительной функцией порядка ε^n, а запись $\phi \le O^*_+(\varepsilon^n)$ означает, что ϕ является действительной функцией, которая ограничена сверху положительной функцией порядка ε^n.

Функции K_0, K_1, K_3, A_1, B_2 в (1), (3) равны $O^*(1)$, когда их аргументы y, v, p принимают значения в пределах рабочей области, а частные производные этих функций по y, v, p равны $O(1)$. Функции K_2 и B_1, связанные с силой и моментом Магнуса, предполагаются равными $O(1)$ вместе с их частными производными.

Обозначая через t_0 и t_1 момент выстрела и момент падения снаряда на землю, имеем $t_1 - t_0 = O(\varepsilon^{-3})$. Для сокращения записи вводим векторные обозначения

$$\xi = (x, y, \varepsilon^2 z, v, \theta, \varepsilon^2\psi, p), \quad \xi^{(5)} = (y, v, \theta, \varepsilon^2\psi, p),$$
$$\xi^{(4)} = (y, v, \theta, p), \quad \xi^{(3)} = (y, v, p). \tag{4}$$

В [5] установлены оценки погрешности решения l-системы по сравнению с решением исходной "точной" системы при тех же начальных условиях в момент выстрела.

2. Основное ВКБ-представление угловых колебаний оси симметрии снаряда. Для вывода оценок погрешности различных приближений в теории полета снаряда необходимо располагать априорными оценками всех фазовых переменных системы (1), (2) при $t \in [t_0, t_1]$. Выполнение таких оценок

$$x, y, z, v, \theta, \psi, p(t, \varepsilon) = O(1), \quad t \in [t_0, t_1], \tag{5}$$

для переменных $x, y, z, v, \theta, \psi, p$ обеспечивается правильным выбором их масштабов при нормализации. Что касается переменных q, r, α, β углового движения, то оценки вида

$$\Omega, \Delta(t, \varepsilon) = O(1), \quad t \in [t_0, t_1], \tag{6}$$

выполняются для них только при дополнительных условиях, называемых условиями правильности полета. Их проще всего получить, анализируя общее приближенное ВКБ-решение уравнений углового движения (2).

Пусть $\xi_l, \Omega_l, \Delta_l(t, \varepsilon)$ – решение l-системы (1), (2) при начальных условиях в момент выстрела t_0. Функции фазовых переменных и параметра ε на этом решении становятся функциями t, ε и отмечаются в дальнейшем индексом l. Например, $k_l(t, \varepsilon) = k(\xi_l^{(3)}(t, \varepsilon), \varepsilon)$. Рассматривая зависимость $\xi_l^{(5)}(t, \varepsilon)$ в решении $\xi_l, \Omega_l, \Delta_l(t, \varepsilon)$ как известную, определяем коэффициенты системы линейных уравнений (2) как функции t, ε и записываем эту систему в виде

$$\dot{\Omega} = a_l(t, \varepsilon)\Omega + b_l(t, \varepsilon)\Delta, \quad \dot{\Delta} = -i\Omega - k_l(t, \varepsilon)\Delta + l_l(t, \varepsilon). \tag{7}$$

Построим приближенное общее решение системы уравнений (7), основываясь на идеях метода ВКБ.

Чтобы получить приближенные выражения для двух линейно независимых решений соответствующей однородной системы, воспользуемся способом [6], который основан на переходе к уравнению Риккати и построению его приближенных решений с помощью разложений по степеням параметра. Приближенное частное решение неоднородной системы (7) строится в виде суммы убывающих членов: $\Omega = e_1 + e_2 + e_3 + \ldots$, $\Delta = d_1 + d_2 + d_3 + \ldots$, причем порядки последующих членов определяются в зависимости от выбора предыдущих членов, так что их трудно определить заранее.

Пусть функции $e_1, d_1(\xi^{(5)}, \varepsilon)$, а также $w, \lambda_j, n_j, \omega_j(\xi^{(4)}, \varepsilon)$ и $\lambda_{j+}(\xi^{(5)}, \alpha, \beta, \varepsilon)$ $(j = 1, 2)$ определены равенствами

$$\begin{gathered} e_1 = \frac{b\,l}{ib - ak}, \quad d_1 = -\frac{al}{ib - ak}, \qquad w = \frac{(a-k)^2}{4} - ib + ak - \frac{\dot{a} + \dot{k}}{2}, \\ \lambda_j = n_j + i\omega_j = \frac{a-k}{2} \pm \sqrt{w}, \qquad \lambda_{j+} = \lambda_j - \frac{\dot{w}}{4w} \quad (j = 1, 2). \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $\dot{a}, \dot{k}$ – производные функций a, k по t в силу уравнений движения, $\sqrt{w} = i\sqrt{_+(-w)}$, где $\sqrt{_+}$ – главное значение корня [7], верхний и нижний знаки соответствуют $j = 1$ и $j = 2$.

Тогда, учитывая два первых члена разложений для решений однородных уравнений и один член – для решения неоднородных уравнений, получаем для общего решения уравнений (2) приближенные формулы

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega}_{l+}^{[0]}(t,\varepsilon) &= i\sum_{j=1}^{2}[\lambda_{jl+}(t,\varepsilon)+k_l(t,\varepsilon)]\widetilde{s}_{jl+}^{[0]}(t,\varepsilon)\exp i\varphi_{jl}(t,\varepsilon)+e_{1l}(t,\varepsilon), \\ \widetilde{\Delta}_{l+}^{[0]}(t,\varepsilon) &= \sum_{j=1}^{2}\widetilde{s}_{jl+}^{[0]}(t,\varepsilon)\exp i\varphi_{jl}(t,\varepsilon)+d_{1l}(t,\varepsilon), \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{s}_{j+l}^{[0]}(t,\varepsilon) &= C_{jl+}^{[0]}\exp\int\limits_{t_0}^{t}\Big[n_{jl}(\tau,\varepsilon)-\frac{\dot{w}_l(\tau,\varepsilon)}{4w_l(\tau,\varepsilon)}\Big]\,d\tau = \\ &= C_{jl+}^{[0]}\frac{w_l^{1/4}(t_0,\varepsilon)}{w_l^{1/4}(t,\varepsilon)}\exp\int\limits_{t_0}^{t}n_{jl}(\tau,\varepsilon)\,d\tau, \\ \varphi_{jl}(t,\varepsilon) &= \int\limits_{t_0}^{t}\omega_{jl}(\tau,\varepsilon)\,d\tau \quad (j=1,2). \end{aligned} \tag{10}$$

"Тильда" – знак приближения, индекс в квадратных скобках – номер приближения. Постоянные C_{jl+} $(j=1,2)$ определяются начальными условиями.

В формулу (9) для $\widetilde{\Omega}_{l+}^{[0]}(t,\varepsilon)$ входят величины $\lambda_{jl+}(t,\varepsilon)$ $(j=1,2)$. Определения (8) функций λ_{j+} $(j=1,2)$ содержат производную функции $w(y,v,\theta,p)$ по времени в силу уравнений движения снаряда. Так как функция w зависит от θ через $\dot{a},\dot{k}$, то, в соответствии с пятым уравнением (1), ее производная $\dot{w}$ зависит от неизвестных α,β. Поэтому в приближенном представлении общего решения уравнений (2), заданном формулами (9), (10), функция $\widetilde{\Omega}_{l+}^{[0]}(t,\varepsilon)$ определена некорректно, в связи с чем такое представление уместно назвать *приближенным квазирешением* этих уравнений. Величины, связанные с квазирешением, отмечаются индексом $+$ (плюс). Взяв в определении $\widetilde{\Omega}_{l+}^{[0]}$ вместо функций λ_{jl+} $(j=1,2)$ функции λ_{jl} $(j=1,2)$, получим *основное приближенное решение* уравнений (2)

$$\begin{aligned} \widetilde{\Omega}_{l}^{[0]}(t,\varepsilon) &= i\sum_{j=1}^{2}[\lambda_{jl}(t,\varepsilon)+k_l(t,\varepsilon)]\widetilde{s}_{jl}^{[0]}(t,\varepsilon)\exp i\varphi_{jl}(t,\varepsilon)+e_{1l}(t,\varepsilon), \\ \widetilde{\Delta}_{l}^{[0]}(t,\varepsilon) &= \sum_{j=1}^{2}\widetilde{s}_{jl}^{[0]}(t,\varepsilon)\exp i\varphi_{jl}(t,\varepsilon)+d_{1l}(t,\varepsilon), \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\widetilde{s}_{jl}^{[0]}(t,\varepsilon) = C_{jl}\frac{w_l^{1/4}(t_0,\varepsilon)}{w_l^{1/4}(t,\varepsilon)}\exp\int\limits_{t_0}^{t} n_{jl}(\tau,\varepsilon)\,d\tau,$$
$$\varphi_{jl}(t,\varepsilon) = \int\limits_{t_0}^{t}\omega_{jl}(\tau,\varepsilon)\,d\tau \quad (j=1,2). \tag{12}$$

Определение функции $\widetilde{\Omega}_l^{[0]}(t,\varepsilon)$ аналогично соответствующему определению в [1].

Изложенная формальная процедура построения приближенного квазирешения (9), (10) и приближенного решения (11), (12) может быть обоснована их малой погрешностью по сравнению с точным решением l-системы [2]:

$$\Omega_l(t,\varepsilon) - \widetilde{\Omega}_{l+}^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad \Delta_l(t,\varepsilon) - \widetilde{\Delta}_{l+}^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad t\in[t_0,t_1]. \tag{13}$$

$$\Omega_l(t,\varepsilon) - \widetilde{\Omega}_{l}^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad \Delta_l(t,\varepsilon) - \widetilde{\Delta}_{l}^{[0]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad t\in[t_0,t_1].$$

Формулы (11), (12) описывают быстрые двухчастотные колебания величин Ω,Δ с частотами ω_{1l},ω_{2l} и фазами $\varphi_{1l},\varphi_{2l}$ около средних значений e_{1l},d_{1l}. Параметры этих колебаний ω_{jl},n_{jl} $(j=1,2)$ и средние значения e_{jl},d_{jl} зависят от времени посредством функций $\xi_l^{(5)}(t,\varepsilon)$.

Чтобы сформулировать *условия правильности полета снаряда*, подставим выражения (3) в определения (8) функций e_1,d_1,w. Получаем для величин e_1,d_1 представления

$$e_1(\xi^{(5)},\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{v}E(\xi^{(3)},\varepsilon)(\cos\theta - i\varepsilon^2\psi\sin\theta),$$
$$d_1(\xi^{(5)},\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{v^4}D(\xi^{(3)},\varepsilon)(\cos\theta - i\varepsilon^2\psi\sin\theta), \tag{14}$$

а для функции w формулу

$$w(\xi^{(4)},\varepsilon) = -\frac{p^2I^2}{4}\left[1-\frac{4v^3B_2(y,v)}{p^2I^2}\right] + O(\varepsilon^2). \tag{15}$$

Потребуем, чтобы на всех траекториях полета снаряда выполнялось соотношение $d_1 = O(1)$. Отметим, что в соответствии с седьмым уравнением (1) нормализованная продольная угловая скорость p сохраняет порядок 1 на всем промежутке $[t_0,t_1]$ длины $O(\varepsilon^{-3})$, то есть

$$p = O^*(1). \tag{16}$$

Далее, поскольку $K_0,K_1,B_2 = O^*(1)$ в (1), (3), имеем $E,D = O^*(1)$ в (14). А поскольку $\cos\theta = O^*(1)$, заключаем, что соотношение $d_1 = O(1)$ выполняется только в том случае, когда минимальное значение нормализованной скорости v вблизи вершины траектории имеет порядок $\varepsilon^{1/2}$ или более низкий. Учитывая также, что v принимает свое максимальное значение $O_+^*(1)$ в момент выстрела, устанавливаем, что на любой траектории скорость изменяется в диапазоне

$$O_+^*(\varepsilon^{1/2}) \le v \le O_+^*(1). \tag{17}$$

Потребуем также, чтобы выражение в квадратных скобках в формуле (15) было положительным на всех траекториях полета снаряда, и обозначим его через σ^2:

$$\sigma^2(y,v,p) = 1 - \frac{4v^3 B_2(y,v)}{p^2 I^2} > 0. \tag{18}$$

Неравенство в (18) – это условие Маиевского, записанное с использованием принятых обозначений. Снаряд и орудие конструируются так, что $0{,}6 < \sigma(t_0,\varepsilon) < 0{,}7$. Таким образом, в момент выстрела условие Маиевского выполняется в усиленной форме $\sigma^2(t_0,\varepsilon) = O_+^*(1)$. После выстрела нормализованная скорость v убывает, оставаясь в диапазоне (17).

Поэтому, с учетом (16), из определения (18) величины σ^2 следует, что условие Маиевского выполняется на всей траектории полета снаряда, а коэффициент σ заключен в пределах

$$\sigma(t_0,\varepsilon) \le \sigma \le 1 - O_+^*(\varepsilon^{3/2}), \quad \sigma(t_0,\varepsilon) = O_+^*(1). \tag{19}$$

Тогда угловое движение оси симметрии снаряда является колебательным.

Ограниченность амплитуд этих колебаний обеспечивают неравенства

$$n_1, n_2(\xi^{(4)},\varepsilon) \le O_+^*(\varepsilon^4). \tag{20}$$

Они гарантирует выполнение оценок

$$\exp \int\limits_{\tau}^{t} \lambda_j(\tau_1,\varepsilon)\, d\tau_1 = O(1), \quad j=1,2;\ t_0 \le \tau \le t \le t_1. \tag{21}$$

В [8] показано, что при условиях (16)–(20) сотношения (6) выполняются на решениях исходной нелинейной системы уравнений движения осесимметричного снаряда. Очевидно, что при этих условиях соотношения (6) справедливы и для решений l-системы (1), (2).

Для максимальных по модулю значений медленных переменных справедливы оценки (5), а кроме того, формулы (16), (17) определяют порядки минимальных значений переменных p, v. Следовательно, на всех траекториях полета снаряда рабочую область для переменных, объединенных в вектор ξ, можно представить в виде параллелепипеда

$$\Xi = \{\xi : (0,0,-\varepsilon^2 C_z^*, \sqrt{\varepsilon} C_{v*}, -C_\theta^*, -\varepsilon^2 C_\psi^*, C_{p*}) \le \xi \le \\ \le (C_x^*, C_y^*, \varepsilon^2 C_z^*, C_v^*, C_\theta^*, \varepsilon^2 C_\psi^*, C_p^*)\}.$$

Здесь выполнение неравенства $\le$ для вектора ξ означает выполнение такого неравенства для всех компонент этого вектора. Буквой C с индексами обозначены положительные постоянные порядка 1.

В уравнениях (1) и далее функции фазовых переменных, времени и параметра ε, обозначаемые заглавными латинскими буквами, равны $O(1)$ при $\xi \in \Xi$, $\quad q, r, \alpha, \beta = O(1)$, $\quad t \in [t_0, t_1]$.

Во время полета снаряда скорость v изменяется в диапазоне (17), и порядки по ε функций, входящих в уравнения движения (1), (2), изменяются вместе с v. Чтобы учесть такие изменения, эти функции были представлены как суммы членов вида $\varepsilon^m v^n F_{mn}$, где $F_{mn} = O(1)$ или $F_{mn} = O^*(1)$. Такие представления используются в дальнейшем и для других функций, описывающих динамику полета снаряда. Назовем их *εv-представлениями.*

3. Определения модифицированных решений типов 1, 2. В статье [2] получена квадратичная оценка (13) погрешности основного приближенного решения уравнений (7). Порядок этой оценки равен наименьшему из порядков интегралов h_{1j}, h_{2j} ($j = 1, 2$), заданных формулами (4.5) этой статьи. Для интегралов h_{1j}, определяющих погрешность приближенного решения однородной системы уравнений углового движения, в [2] получены кубические по ε оценки, а для интегралов h_{2j}, определяющих погрешность приближенного решения неоднородной системы уравнений углового движения, получены оценки, одна из которых кубическая, а другая квадратичная. Это указывает на то, что существует возможность уточнить основное общее приближенное решение за счет уточнения приближенного частного решения.

Такое частное решение находится в [1, 9] как сумма двух первых членов разложения точного частного решения по обратным степеням большого параметра. Следуя этому правилу, будем искать уточненное приближенное частное решение уравнений углового движения (7) в виде суммы убывающих слагаемых $\Omega = e_1 + e_2 + e_3 + ...$, $\Delta = d_1 + d_2 + d_3 + ...$ Для e_1, d_1 уже найдены выражения (8). Для уточняющих поправок e_2, d_2 получаем выражения

$$e_2 = -\frac{\dot{e}_1 k + \dot{d}_1 b}{ib - ak}, \quad d_2 = \frac{i\dot{e}_1 + \dot{d}_1 a}{ib - ak}. \tag{22}$$

Записав уравнения (1) при помощи обозначений (4)

$$\dot{\xi} = f(\xi^{(5)}, \varepsilon) + f_\alpha(\xi^{(3)}, \varepsilon)\alpha + f_\beta(\xi^{(3)}, \varepsilon)\beta,$$

имеем

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(\xi, \alpha, \beta, \varepsilon) &= \frac{\partial e_1(\xi, \varepsilon)}{\partial \xi}[f(\xi, \varepsilon) + f_\alpha(\xi, \varepsilon)\alpha + f_\beta(\xi, \varepsilon)\beta], \\ \dot{d}_1(\xi, \alpha, \beta, \varepsilon) &= \frac{\partial d_1(\xi, \varepsilon)}{\partial \xi}[f(\xi, \varepsilon) + f_\alpha(\xi, \varepsilon)\alpha + f_\beta(\xi, \varepsilon)\beta]. \end{aligned} \tag{23}$$

Так как функции e_1, d_1 зависят от θ, ψ через функцию l, то в выражения (23) входят величины α, β через правые части пятого и шестого уравнений (1), определяющих $\dot{\theta}, \dot{\psi}$. Поэтому искомые величины α, β входят в определения (22) поправок e_2, d_2 и, следовательно, эти определения неконструктивны.

Чтобы получить конструктивное определение поправок e_2, d_2, в формулах (22) вместо производных $\dot{e}_1, \dot{d}_1$ следует использовать их выражения, которые содержат известные приближения для α, β. Продолжая начатую выше нумерацию вариантов приближенных решений, рассмотрим следующие два варианта выбора приближенных выражений для $\dot{e}_1, \dot{d}_1$.

Вариант 1. При вычислении $\dot e_1, \dot d_1$ в уравнениях (1), определяющих $\dot\theta, \dot\psi$, принимается $\alpha = \beta = 0$. Таким образом, в формулах (22) вместо производных e_1, d_1 по t в силу уравнений (1) используются их производные в силу уравнений модели снаряда как материальной точки. Такие приближенные производные равны

$$\widetilde{\dot e}_1^{[1]}(\xi,\varepsilon) = \frac{\partial e_1(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi} f(\xi,\varepsilon), \quad \widetilde{\dot d}_1^{[1]}(\xi,\varepsilon) = \frac{\partial d_1(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi} f(\xi,\varepsilon). \tag{24}$$

Вариант 2. При вычислении $\dot e_1, \dot d_1$ в уравнениях (1), определяющих $\dot\theta, \dot\psi$, вместо α, β берутся их средние значения $d_{1\alpha} = \operatorname{Re} d_1$, $d_{1\beta} = \operatorname{Im} d_1$ в основном приближенном решении (11). В таком случае имеем для $\dot e_1, \dot d_1$ приближенные выражения

$$\begin{aligned}
\widetilde{\dot e}_1^{[2]}(\xi,\varepsilon) &= \frac{\partial e_1(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi}[f(\xi,\varepsilon) + f_\alpha(\xi,\varepsilon)d_{1\alpha}(\xi,\varepsilon) + f_\beta(\xi,\varepsilon)d_{1\beta}(\xi,\varepsilon)],\\
\widetilde{\dot d}_1^{[2]}(\xi,\varepsilon) &= \frac{\partial d_1(\xi,\varepsilon)}{\partial\xi}[f(\xi,\varepsilon) + f_\alpha(\xi,\varepsilon)d_{1\alpha}(\xi,\varepsilon) + f_\beta(\xi,\varepsilon)d_{1\beta}(\xi,\varepsilon)].
\end{aligned} \tag{25}$$

Модифицированное приближенное *квазирешение* для варианта с номером $m = 1, 2$ представляется в виде

$$\begin{aligned}
\widetilde\Omega_{l+}^{[m]}(t,\varepsilon) &= i\,[\lambda_{1l+}(t,\varepsilon) + k_l(t,\varepsilon)]\,\widetilde u_{1l+}^{[m]}(t,\varepsilon) + \\
&\qquad + i\,[\lambda_{2l+}(t,\varepsilon) + k_l(t,\varepsilon)]\,\widetilde u_{2l+}^{[m]}(t,\varepsilon) + e_{1l}(t,\varepsilon) + e_{2l}^{[m]}(t,\varepsilon),\\
\widetilde\Delta_{l+}^{[m]}(t,\varepsilon) &= \widetilde u_{1l+}^{[m]}(t,\varepsilon) + \widetilde u_{2l+}^{[m]}(t,\varepsilon) + d_{1l}(t,\varepsilon) + d_{2l}^{[m]}(t,\varepsilon).
\end{aligned} \tag{26}$$

Здесь при известной зависимости $\xi_l^{(5)}(t,\varepsilon)$ функции $\widetilde u_{jl+}^{[m]}(t,\varepsilon)$ равны

$$\begin{aligned}
\widetilde u_{jl+}^{[m]}(t,\varepsilon) &= C_{jl+}^{[m]} \exp\int_{t_0}^{t} \lambda_{jl+}(\tau,\varepsilon)\,d\tau = \\
&= C_{jl+}^{[m]} \frac{w_l^{1/4}(t_0,\varepsilon)}{w_l^{1/4}(t,\varepsilon)} \exp\int_{t_0}^{t} \lambda_{jl}(\tau,\varepsilon)\,d\tau, \quad j = 1, 2,
\end{aligned} \tag{27}$$

а поправки выражаются формулами

$$e_{2l}^{[m]}, d_{2l}^{[m]}(t,\varepsilon) = e_2^{[m]}, d_2^{[m]}(\xi_l^{(5)}(t,\varepsilon),\varepsilon), \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned}
e_2^{[m]} &= e_2^{[m]}(\xi^{(5)},\varepsilon) = -\frac{\widetilde{\dot e}_1^{[m]} k + \widetilde{\dot d}_1^{[m]} b}{ib - ak},\\
d_2^{[m]} &= d_2^{[m]}(\xi^{(5)},\varepsilon) = \frac{i\widetilde{\dot e}_1^{[m]} + \widetilde{\dot d}_1^{[m]} a}{ib - ak},
\end{aligned} \tag{29}$$

функции $\widetilde{\dot{e}}_1^{[m]}, \widetilde{\dot{d}}_1^{[m]}$ определены в (24), (25).

Модифицированное приближенное *решение* $\widetilde{\Omega}_l^{[m]}, \widetilde{\Delta}_l^{[m]}$ для варианта с номером $m = 1, 2$ определено формулами, которые отличаются от формул (26) только тем, что вместо величин λ_{jl+} в них используются величины λ_{jl} $(j = 1, 2)$. Комплексные постоянные в этом приближенном решении обозначим через $C_{jl}^{[m]}$, комплексные моды – через $u_{jl}^{[m]}$, а их приближения вида (27) – через $\widetilde{u}_{jl}^{[m]}$ $(j = 1, 2)$.

Приближенное квазирешение и приближенное решение уравнений углового движения (8) удовлетворяют в момент выстрела t_0 тем же начальным условиям, что и точное решение этих уравнений. Это позволяет однозначно определить постоянные $C_{jl+}^{[m]}$, $C_{jl}^{[m]}$ $(j = 1, 2)$.

Вариант 1 аналогичен рассмотренному в работе [1], он изучен в [3]. Вариант 2 является новым, он рассматривается ниже.

4. Интегральные уравнения для комплексных мод в модифицированном квазирешении типа 2. Модифицированное приближенное *квазирешение* $\widetilde{\Omega}_{l+}^{[2]}$, $\widetilde{\Delta}_{l+}^{[2]}$ типа 2 определено формулами (26), (27), взятыми при $m = 2$. Поправки $e_{2l}^{[2]}$, $d_{2l}^{[2]}$ вычисляются по формулам (28), (29), где функции $\widetilde{\dot{e}}_1^{[2]}, \widetilde{\dot{d}}_1^{[2]}$ определены формулами (25). Модифицированное приближенное *решение* $\widetilde{\Omega}_l^{[2]}, \widetilde{\Delta}_l^{[2]}$ типа 2 определено формулами, которые при $m = 2$ получаются из формул (26), (27) путем замены в первой из формул (26) величин λ_{j+} на λ_j $(j = 1, 2)$.

Чтобы определить погрешность квазирешения типа 2, введем переменные $u_{1l+}^{[2]}$, $u_{2l+}^{[2]}$ (комплексные моды) по формулам

$$
\begin{aligned}
\Omega &= i \sum_{j=1}^{2} [\lambda_{jl+}(t,\varepsilon) + k_l(t,\varepsilon)]\, u_{jl+}^{[2]} + e_{1l}(t,\varepsilon) + e_{2l}^{[2]}(t,\varepsilon), \\
\Delta &= \sum_{j=1}^{2} u_{jl+}^{[2]} + d_{1l}(t,\varepsilon) + d_{2l}^{[2]}(t,\varepsilon).
\end{aligned} \tag{30}
$$

Подставив выражения (30) в уравнения углового движения (8), получаем для переменных $u_{1l+}^{[2]}$, $u_{2l+}^{[2]}$ систему двух дифференциальных уравнений

$$
\dot{u}_{jl+}^{[2]} = \lambda_{jl+} u_{jl+}^{[2]} \pm_l \rho (u_{1l+}^{[2]} + u_{2l+}^{[2]}) \pm \frac{1}{2w_l^{1/2}} [i h_{el}^{[2]} + (\lambda_{3-j,l+} + k) h_{dl}^{[2]}], \quad j = 1, 2, \tag{31}
$$

где

$$
h_e^{[2]} = \dot{e}_1 - \widetilde{\dot{e}}_1^{[2]} + \dot{e}_2^{[2]}, \quad h_d^{[2]} = \dot{d}_1 - \widetilde{\dot{d}}_1^{[2]} + \dot{d}_2^{[2]}, \tag{32}
$$

функция ρ определена формулой

$$
\rho = \frac{\ddot{w}}{8w^{3/2}} - \frac{5\dot{w}^2}{32w^{5/2}}, \tag{33}
$$

верхний и нижний знаки соответствуют $j = 1$ и $j = 2$.

С учетом начальных условий из уравнений (31) следуют выражения для разностей точных и приближенных комплексных мод

$$u_{jl+}^{[2]}(t,\varepsilon) - \widetilde{u}_{jl+}^{[2]}(t,\varepsilon) = h_{1jl}(t,\varepsilon) + h_{2jl}(t,\varepsilon) \quad (j = 1,2), \tag{34}$$

где

$$\begin{aligned} h_{1jl}(t,\varepsilon) &= \pm\int_{t_0}^{t} \rho_l(u_{1l+}^{[2]} + u_{2l+}^{[2]})(\exp\int_{\tau}^{t} \lambda_{jl+}\, d\tau_1)\, d\tau, \\ h_{2jl}(t,\varepsilon) &= \pm\int_{t_0}^{t} \frac{1}{2w_l^{1/2}}[ih_{el}^{[2]} + (\lambda_{3-j,l+} + k)h_{dl}^{[2]}](\exp\int_{\tau}^{t} \lambda_{jl+}\, d\tau_1)\, d\tau \quad (j = 1,2). \end{aligned} \tag{35}$$

Поэтому для оценки погрешности комплексных мод $\widetilde{u}_{jl+}^{[2]}$ в квазирешении $\widetilde{\Omega}_{l+}^{[2]}$, $\widetilde{\Delta}_{l+}^{[2]}$ достаточно найти порядки интегралов (35) по ε.

5. Вспомогательные результаты. При выводе таких оценок воспользуемся εv-представлениями (14) функций e_1, d_1. Продифференцируем выражения (14) по t в силу уравнений (1). При этом примем во внимание, что входящие в эти выражения функции $E, D(\xi^{(3)}, \varepsilon)$ равны $O^*(1)$, а их частные производные по компонентам вектора $\xi^{(3)}$ равны $O(1)$. Выделив в полученных формулах комплексную переменную $\Delta = \alpha + i\beta$, получаем представления

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(\xi^{(5)},\alpha,\beta,\varepsilon) &= \varepsilon^5\dot{E}_{50}(\xi^{(5)},\varepsilon) + \varepsilon^6 v^{-2}\dot{E}_{6,-2}(\xi^{(5)},\varepsilon) + \\ &+ \varepsilon^6 v\Delta\dot{E}_{Eq49}^{\Delta}(\xi^{(5)},\varepsilon) + \varepsilon^8 v\alpha\psi\dot{E}_{81}^{\alpha\psi}(\xi^{(5)},\varepsilon) + \varepsilon^8 v\beta\psi\dot{E}_{81}^{\beta\psi}(\xi^{(5)},\varepsilon), \\ \dot{d}_1(\xi^{(5)},\alpha,\beta,\varepsilon) &= \varepsilon^5 v^{-3}\dot{D}_{5,-3}(\xi^{(5)},\varepsilon) + \varepsilon^6 v^{-5}\dot{D}_{6,-5}(\xi^{(5)},\varepsilon) + \\ &+ \varepsilon^6 v^{-2}\Delta\dot{D}_{6,-2}^{\Delta}(\xi^{(5)},\varepsilon) + \varepsilon^8 v^{-2}\alpha\psi\dot{D}_{8,-2}^{\alpha\psi}(\xi^{(5)},\varepsilon) + \varepsilon^8 v^{-2}\beta\psi\dot{D}_{8,-2}^{\beta\psi}(\xi^{(5)},\varepsilon). \end{aligned} \tag{36}$$

Здесь функции, обозначенные через $\dot{E}, \dot{D}$ с индексами, равны $O(1)$.

Согласно (25), функции $\widetilde{\dot{e}}_1^{[2]}, \widetilde{\dot{d}}_1^{[2]}$ равны функциям $\dot{e}_1, \dot{d}_1$ взятым при $\Delta = d_1 = d_{1\alpha} + id_{1\beta}$. Поэтому из равенств (36) следуют представления

$$\begin{aligned} \widetilde{\dot{e}}_1^{[2]} &= \widetilde{\dot{e}}_1^{[2]}(\xi^{(5)},\varepsilon) = \varepsilon^5\dot{E}_{50} + \varepsilon^6 v^{-2}\dot{E}_{6,-2} + \\ &\qquad + \varepsilon^6 v d_1\dot{E}_{Eq49}^{\Delta} + \varepsilon^8 v d_{1\alpha}\psi\dot{E}_{81}^{\alpha\psi} + \varepsilon^8 v d_{1\beta}\psi\dot{E}_{81}^{\beta\psi}, \\ \widetilde{\dot{d}}_1^{[2]} &= \widetilde{\dot{d}}_1^{[2]}(\xi^{(5)},\varepsilon) = \varepsilon^5 v^{-3}\dot{D}_{5,-3} + \varepsilon^6 v^{-5}\dot{D}_{6,-5} + \\ &\qquad + \varepsilon^6 v^{-2} d_1\dot{D}_{6,-2}^{\Delta} + \varepsilon^8 v^{-2} d_{1\alpha}\psi\dot{D}_{8,-2}^{\alpha\psi} + \varepsilon^8 v^{-2} d_{1\beta}\psi\dot{D}_{8,-2}^{\beta\psi}. \end{aligned} \tag{37}$$

Вычитая равенства (37) из (36), приходим к представлениям

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 - \widetilde{\dot{e}}_1^{[2]} &= \dot{e}_1^{\Delta}(\Delta - d_1) + O(\varepsilon^8), \\ \dot{d}_1 - \widetilde{\dot{d}}_1^{[2]} &= \dot{d}_1^{\Delta}(\Delta - d_1) + O(\varepsilon^{13/2}). \end{aligned} \tag{38}$$

Они отличаются от аналогичных представлений [3] при $m = 1$ тем, что вместо величины Δ в них входит разность $\Delta - d_1$.

Из (29), (37) для функций $e_2^{[2]}, d_2^{[2]}$ следуют формулы

$$\begin{aligned} e_2^{[2]}(\xi^{(5)}, \varepsilon) &= \varepsilon^5 v^{-3} F_{5,-3}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \varepsilon^6 v^{-5} F_{6,-5}(\xi^{(5)}, \varepsilon), \\ d_2^{[2]}(\xi^{(5)}, \varepsilon) &= \varepsilon^5 v^{-6} G_{5,-6}(\xi^{(5)}, \varepsilon) + \varepsilon^6 v^{-8} G_{6,-8}(\xi^{(5)}, \varepsilon). \end{aligned} \tag{39}$$

Отсюда для их производных получаем

$$\begin{aligned} \dot{e}_2^{[2]}(\xi^{(5)}, \alpha, \beta, \varepsilon) &= \varepsilon^8 v^{-2} \dot{F}_{8,-2} + \varepsilon^9 v^{-4} \dot{F}_{9,-4} + \varepsilon^{10} v^{-6} \dot{F}_{10,-6} + \\ &\quad + \varepsilon^9 v^{-1} (\alpha \dot{F}^{\alpha}_{9,-1} + \beta \dot{F}^{\beta}_{9,-1}) + \varepsilon^{10} v^{-3} (\alpha \dot{F}^{\alpha}_{10,-3} + \beta \dot{F}^{\beta}_{10,-3}), \\ \dot{d}_2^{[2]}(\xi^{(5)}, \alpha, \beta, \varepsilon) &= \varepsilon^8 v^{-5} \dot{G}_{8,-5} + \varepsilon^9 v^{-7} \dot{G}_{9,-7} + \varepsilon^{10} v^{-9} \dot{G}_{10,-9} + \\ &\quad + \varepsilon^9 v^{-4} (\alpha \dot{G}^{\alpha}_{9,-4} + \beta \dot{G}^{\beta}_{9,-4}) + \varepsilon^{10} v^{-6} (\alpha \dot{G}^{\alpha}_{10,-6} + \beta \dot{G}^{\beta}_{10,-6}). \end{aligned} \tag{40}$$

Поэтому, с учетом (17), справедливы оценки

$$\begin{aligned} e_2^{[2]} &= O(\varepsilon^{7/2}), & d_2^{[2]} &= O(\varepsilon^2), \\ \dot{e}_2^{[2]} &= O(\varepsilon^7), & \dot{d}_2^{[2]} &= O(\varepsilon^{11/2}), \\ h_e^{[2]} &= O(\varepsilon^6), & h_d^{[2]} &= O(\varepsilon^5). \end{aligned} \tag{41}$$

6. Оценка интегралов $\boldsymbol{h_{1jl}}$ $\boldsymbol{(j = 1, 2)}$. Определим порядки функций $w, \dot{w}, \ddot{w}, \rho$ по ε. Так как $\sigma^2 = O_+^*(1)$ согласно (19), то из (15) следует, что $w(\xi^{(4)}, \varepsilon) = O^*(1)$. Поскольку частные производные функции w по компонентам вектора $\xi^{(4)}$ равны $O(1)$, то при дифференцировании этой функции по t в силу уравнений (1) происходит повышение порядка на 3, то есть $\dot{w}(\xi^{(4)}, \alpha, \beta, \varepsilon) = O(\varepsilon^3)$. В выражении $\dot{w}$ ведущие члены порядка ε^3 зависят от $\xi^{(4)}$, а члены, содержащие α, β, имеют порядок ε^9. Поэтому при дифференцировании $\dot{w}$ снова происходит повышение порядка на 3. Таким образом, имеем

$$w(\xi^{(4)}, \varepsilon) = O^*(1), \quad \dot{w}(\xi^{(4)}, \alpha, \beta, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad \ddot{w}(\xi^{(5)}, q, r, \alpha, \beta, \varepsilon) = O(\varepsilon^6). \tag{42}$$

Отсюда для функции (33) вытекает оценка

$$\rho(\xi^{(5)}, q, r, \alpha, \beta, \varepsilon) = O(\varepsilon^6).$$

Далее, пользуясь второй формулой замены (30), в соответствии с (6), (41) имеем

$$u_{1+}^{[2]} + u_{2+}^{[2]} = \Delta - d_1 - d_2^{[2]} = O(1).$$

Кроме того, в общем случае незатухающих колебаний оси симметрии снаряда, то есть при выполнении неравенств (20), из (21), (42) следуют оценки

$$\exp\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_{j+}(\tau_1,\varepsilon)\,d\tau_1=\frac{w^{1/4}(\tau,\varepsilon)}{w^{1/4}(t,\varepsilon)}\exp\int\limits_{\tau}^{t}n_j(\tau_1,\varepsilon)\,d\tau_1=O(1),\ t_0\le\tau\le t\le t_1.$$

Таким образом, подынтегральные функции в формуле (35) для h_{1jl} равны $O(\varepsilon^6)$. Поэтому при $t-t_0=O(\varepsilon^{-3})$ в случае незатухающих колебаний имеем

$$h_{1jl}(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^3);\quad j=1,2;\quad t\in[t_0,t_1]. \tag{43}$$

7. Оценка интегралов h_{2jl} $(j=1,2)$. Интегралы h_{2jl} $(j=1,2)$ записываются в виде сумм

$$h_{2jl}(t,\varepsilon)=h_{2jl}^{(1)}(t,\varepsilon)+h_{2jl}^{(2)}(t,\varepsilon)+h_{2jl}^{(3)}(t,\varepsilon),\quad j=1,2, \tag{44}$$

где

$$h_{2jl}^{(1)}(t,\varepsilon)=\pm\int\limits_{t_0}^{t}\frac{1}{2w_l^{1/2}}[i(\dot e_{1l}-\widetilde{\dot e}_{1l}^{[2]})+(\lambda_{3-j,l}+k_l)(\dot d_{1l}-\widetilde{\dot d}_{1l}^{[2]})](\exp\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_{jl+}\,d\tau_1)\,d\tau,$$

$$h_{2jl}^{(2)}(t,\varepsilon)=\mp\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\dot w_l}{8w_l^{3/2}}h_{dl}^{[2]}(\exp\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_{jl+}\,d\tau_1)\,d\tau, \tag{45}$$

$$h_{2jl}^{(3)}(t,\varepsilon)=\pm\int\limits_{t_0}^{t}\frac{1}{2w_l^{1/2}}[i\dot e_{2l}^{[2]}+(\lambda_{3-j,l}+k_l)\dot d_{2l}^{[2]}](\exp\int\limits_{\tau}^{t}\lambda_{jl+}\,d\tau_1)\,d\tau,\quad j=1,2.$$

Рассмотрим интегралы $h_{2jl}^{(1)}$ $(j=1,2)$. Преобразуем их, пользуясь представлениями (38) разностей $\dot e_1-\widetilde{\dot e}_1^{[2]}$, $\dot d_1-\widetilde{\dot d}_1^{[2]}$ через $\Delta-d_1$. После этого, учитывая (13), заменим величину Δ_l под знаками интегралов выражением $\Delta_l=\widetilde\Delta_{l+}^{[0]}+O(\varepsilon^2)$, где функция $\widetilde\Delta_{l+}^{[0]}$ представлена формулами (9), (10). В результате получим для $h_{2jl}^{(1)}$ $(j=1,2)$ выражение

$$h_{2jl}^{(1)}(t,\varepsilon)=\frac{w_l^{1/4}(t_0,\varepsilon)}{2w_l^{1/4}(t,\varepsilon)}\big[C_{jl+}^{[0]}\,i_j^{(1)}(t,\varepsilon)+C_{3-j,l+}^{[0]}\,i_j^{(2)}(t,\varepsilon)\big]+O(\varepsilon^{7/2}),\quad j=1,2,$$

в котором интегралы $i_j^{(1)},i_j^{(2)}$ определены формулами (47) статьи [3], но отсутствуют имевшиеся в этой статье интегралы $i_j^{(0)}$, связанные с величиной d_1. Оценим интегралы $i_j^{(1)},i_j^{(2)}$ по методике статьи [3]. Несмотря на то, что в настоящей статье малый параметр введен несколько иначе, чем в [3], получаем для интегралов $i_j^{(1)},i_j^{(2)}$, а вместе с ними и для интегралов $h^{(1)}_{2jl}$ $(j = 1, 2)$, прежние оценки. Таким образом, в общем случае незатухающих колебаний с низшей частотой ω_2 имеем

$$h^{(1)}_{21l}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad h^{(1)}_{22l}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \tag{46}$$

а при затухающих низкочастотных колебаниях получаем

$$h^{(1)}_{2jl}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad j = 1, 2. \tag{47}$$

Определение (45) интегралов $h^{(2)}_{2jl}$ $(j = 1, 2)$ при $m = 2$ отличается от данного в [3] определения таких интегралов при $m = 1$ тем, что вместо функции $h^{[1]}_d$ используется функция $h^{[2]}_d$ того же порядка $O(\varepsilon^5)$. Поэтому остается верной оценка (60) статьи [3], выведенная там для общего случая:

$$h^{(2)}_{2jl}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^5), \quad j = 1, 2. \tag{48}$$

Согласно формулам (45), интегралы $h^{(3)}_{2jl}$ $(j = 1, 2)$ при $m = 2$ отличаются от соответствующих интегралов [3] при $m = 1$ тем, что в их определения вместо функций $\dot{e}^{[1]}_2$, $\dot{d}^{[1]}_2$ входят функции $\dot{e}^{[2]}_2$, $\dot{d}^{[2]}_2$. Поскольку те и другие функции имеют одинаковые представления вида (40), то для интегралов $h^{(3)}_{2jl}$ $(j = 1, 2)$ при $m = 2$ справедливы найденные в [3] оценки (61), которые с учетом нового способа введения малого параметра в общем случае принимают вид:

$$h^{(3)}_{21l}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^7), \quad h^{(3)}_{22l}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^4). \tag{49}$$

8. Оценки погрешности модифицированного решения типа 2. Оценки (43), (46)–(49) совпадают с аналогичными оценками в [3]. Поэтому из формул (34), (44) следует, что квазирешение $\widetilde{\Omega}^{[m]}_{l+}, \widetilde{\Delta}^{[m]}_{l+}$ и решение $\widetilde{\Omega}^{[m]}_{l}, \widetilde{\Delta}^{[m]}_{l}$ имеют в рассматриваемом случае $m = 2$ погрешности таких же порядков, как и в случае $m = 1$, изученном в [3]. Таким образом, для погрешности модифицированного приближенного *квазирешения* типа 2 в случае незатухающих низкочастотных колебаний оси симметрии снаряда имеем квадратичную оценку

$$\Omega_l(t, \varepsilon) - \widetilde{\Omega}^{[2]}_{l+}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad \Delta_l(t, \varepsilon) - \widetilde{\Delta}^{[2]}_{l+}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0, t_1], \tag{50}$$

а в случае затухающих низкочастотных колебаний – кубическую оценку

$$\Omega_l(t, \varepsilon) - \widetilde{\Omega}^{[2]}_{l+}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad \Delta_l(t, \varepsilon) - \widetilde{\Delta}^{[2]}_{l+}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{51}$$

Для погрешности модифицированного приближенного *решения* типа 2 в случае незатухающих колебаний оси симметрии также имеем квадратичную оценку

$$\Omega_l(t, \varepsilon) - \widetilde{\Omega}^{[2]}_{l}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad \Delta_l(t, \varepsilon) - \widetilde{\Delta}^{[2]}_{l}(t, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad t \in [t_0, t_1], \tag{52}$$

Верхние оценки порядков погрешности приближенных решений $\widetilde{\Omega}_l^{[m]}, \widetilde{\Delta}_l^{[m]}$ $(m = 0, 1, 2)$

Вид н/ч колебаний	$\Omega_l - \widetilde{\Omega}_l^{[0]}$ $\Delta_l - \widetilde{\Delta}_l^{[0]}$	$\Omega_l - \widetilde{\Omega}_l^{[1]}$ $\Delta_l - \widetilde{\Delta}_l^{[1]}$	$\Omega_l - \widetilde{\Omega}_l^{[2]}$ $\Delta_l - \widetilde{\Delta}_l^{[2]}$
незатухающие	ε^2	ε^2	ε^2
затухающие	ε^2	ε^3	ε^3

а при затухании низкочастотных колебаний – кубическую оценку

$$\Omega_l(t,\varepsilon) - \widetilde{\Omega}_l^{[2]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad \Delta_l(t,\varepsilon) - \widetilde{\Delta}_l^{[2]}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad t \in [t_0, t_1]. \qquad (53)$$

Итак, несмотря на то, что в модифицированном решении типа 2 для аппроксимации производных $\dot{e}_1$, $\dot{d}_1$ используются более точные выражения α, β, чем в модифицированном решении типа 1, эти приближенные решения имеют погрешности, одинаковые по порядку.

В таблице приведены найденные в [2, 3] и в данной статье оценки погрешности трех типов приближенных решений уравнений угловых колебаний оси симметрии снаряда.

Эти оценки получены для нормализованных переменных, а именно, переменная $\Omega = q + ir$ отнесена к 1 с$^{-1}$, а переменная $\Delta = \alpha + i\beta$ отнесена к $0{,}1^2$. Малый параметр ε соответствует числу 0,1. Следовательно, если для нормализованных переменных q, r, α, β для некоторого приближенного решения в таблице дана аналитическая оценка погрешности $O(\varepsilon^n)$, то для исходных, ненормализованных переменных q, r ей соответствует верхняя числовая оценка погрешности порядка $0{,}1^n$ с$^{-1}$, а исходным переменным α, β соответствует верхняя числовая оценка погрешности порядка $0{,}1^{n+2}$. Результаты расчетов, проведенных для нескольких типов снарядов, полностью соответствуют этим числовым оценкам.

1. *Пугачев В.С.* Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе // Тр. ВВИА им. Жуковского. – 1940. – Вып. 70. – 90 с.
2. *Коносевич Б.И.* Оценка погрешности асимптотического представления угловых колебаний оси симметрии вращающегося твердого тела // Прикладная механика. – 2014. – **50**, № 4. – С. 102–116.
3. *Коносевич Б.И.* О модифицированном асимптотическом представлении угловых колебаний оси симметрии снаряда // Механика твердого тела. – Донецк, 2009. – Вып. 39. – С. 121–136.
4. *Коносевич Б.И.* Асимптотические представления угловых колебаний оси симметрии снаряда // Доповіді НАН України. – 2010. – № 7. – С. 54–61.
5. *Коносевич Б.И.* Оценка погрешности линеаризованных уравнений движения осесимметричного снаряда // ПММ. – 2008. – **72**, вып. 6. – С. 930-941.
6. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 350 с.
7. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. Т. 1. – М.: Наука, 1967. – 486 с.
8. *Коносевич Б.И.* Исследование динамики полета осесимметричного снаряда // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 109–119.

9. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. – 2-е изд. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

B. I. Konosevich, Yu. B. Konosevich

New asymptotic representation of angular oscillations of the symmetry axis of an artillery shell.

In the paper, a new type of approximate WKB-solution of equations of angular motion of the symmetry axis of an artillery shell is considered. This solution is a modification of the known approximate solution of these equations. It follows from the estimates obtained that both types of approximate solutions have errors of equal orders in the case of undamped low-frequency oscillations of the symmetry axis of the shell, and the modified approximate solution is more precise than the known approximate solution in the case of damped low-frequency oscillations.

Keywords: *artillery shell, exterior ballistics, WKB-method.*

Ин-т прикл. математики и механики, Донецк
`konos@iamm.su`

Получено 25.08.15