УДК 531.38

©2015. **Н. С. Иванисенко**

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ СТОКСА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Выведены формулы, аналогичные формуле Стокса, для некоторого симплекса в четырехмерном пространстве.

Ключевые слова: *дифференциальный оператор, симплекс, локальная проблема Помпейю.*

1. Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $\mathbf{M}(n)$ – группа движений $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{Mot}(A,B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n)\colon \lambda A \subset B\}$ – часть группы движений, оставляющая A внутри B. $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < R\}$ – шар радиуса R.

Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю в $\mathbb{R}^n$, если всякая локально суммируемая функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для которой $\int_{\lambda A} f(x)\,dx = 0$ при всех $\lambda \in \mathbf{M}(n)$, равна нулю почти всюду. Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса $\mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ таких множеств A.

Приведем одну из возможных постановок локального варианта указанной проблемы. Пусть функция f локально суммируема в шаре $\mathbb{B}_R$ и равенство $\int_{\lambda A} f(x)dx = 0$ выполняется при всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(A, \mathbb{B}_R)$. Если из этого условия следует, что $f = 0$ в $\mathbb{B}_R$ почти всюду, будем говорить, что A является множеством Помпейю в $\mathbb{B}_R$ и обозначать $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)$. Для многих A это имеет место, если размеры $\mathbb{B}_R$ достаточно велики по сравнению с A, см. [1], [2]. В связи с этим в работе [3] поставлена следующая

Проблема (4.1.1 из [3], локальный вариант проблемы Помпейю). Для данного A найти $\mathcal{R}(A) = \inf\{R > 0 : A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)\}$.

Величину $\mathcal{R}(A)$ естественно называть экстремальным радиусом Помпейю (или просто радиусом Помпейю) для множества A.

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathcal{R}(A)$, получены К.А. Беренстейном и Р. Гэем (см. [1], [2]), а также В.В. Волчковым (см. [3], глава 4, § 1–2). Наиболее полный библиографический обзор по проблеме Помпейю и близким к ней вопросам, включающими локальные варианты этой проблемы, состоит из [3–6].

В частности, верхняя оценка $\mathcal{R}(A)$ была получена для многогранников в $\mathbb{R}^n$ (см. [3]). Для симплексов в $\mathbb{R}^4$ она может быть уточнена с помощью, выведенных в работе формул, аналогичных формуле Стокса.

2. Основные результаты. В данной работе рассмотрен симплекс $\mathbf{S}_4 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 1,\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,3,4\}$ с вершинами $z_0(0,0,0,0)$, $z_1(1,0,0,0)$,

This work was supported, in part, by the International Soros Science Education Program (ISSEP) through grant N EPU0xx037

$z_2(0,1,0,0),\ z_3(0,0,1,0),\ z_4(0,0,0,1)$.

Следующие теоремы содержат информацию о том, какими допустимыми дифференциальными операторами необходимо подействовать на достаточно гладкую функцию f, чтобы интеграл по множеству $\mathbf{S}_4$ от данных конструкций выражался через значения некоторых дифференциальных операторов от функции f в вершинах z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, сторонах $z_0z_1, z_0z_2, z_0z_3, z_0z_4, z_1z_2, z_1z_3, z_1z_4, z_2z_3, z_2z_4, z_3z_4$, гранях $z_0z_1z_2$, $z_0z_1z_3$, $z_0z_1z_4$, $z_0z_2z_3$, $z_0z_2z_4$, $z_0z_3z_4$, и объемных телах симплекса $z_0z_1z_2z_3, z_0z_1z_2z_4, z_0z_2z_3z_4$.

Рассмотрим следующие дифференциальные операторы: $q_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}$; $q_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_3}$; $q_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_4}$; $q_4 = \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3}$; $q_5 = \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_4}$; $q_6 = \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}$; $q_7 = \frac{\partial}{\partial x_1}$; $q_8 = \frac{\partial}{\partial x_2}$; $q_9 = \frac{\partial}{\partial x_3}$; $q_{10} = \frac{\partial}{\partial x_4}$; $D = \prod_{i=0}^{10} q_i$; $D_1 = \prod_{i=2}^{10} q_i$; $p_1 = \prod_{i=2}^{6} q_i$; при $i \neq 2:$ $D_2 = \prod_{i=1}^{10} q_i$; $p_2 = \prod_{i=1}^{6} q_i$; при $i \neq 3:$ $D_3 = \prod_{i=1}^{10} q_i$, $p_3 = \prod_{i=1}^{6} q_i$; при $i \neq 4:$ $D_4 = \prod_{i=1}^{10} q_i$; $p_4 = \prod_{i=1}^{6} q_i$; при $i \neq 5:$ $D_5 = \prod_{i=1}^{10} q_i$; $p_5 = \prod_{i=1}^{6} q_i$; при $i \neq 6:$ $D_6 = \prod_{i=1}^{10} q_i$; $p_6 = \prod_{i=1}^{5} q_i$; при $i \neq 7:$ $D_7 = \prod_{i=1}^{10} q_i$; при $i \neq 8:$ $D_8 = \prod_{i=1}^{10} q_i$; при $i \neq 9:$ $D_9 = \prod_{i=1}^{10} q_i$; $D_{10} = \prod_{i=1}^{9} q_i$; $q = q_2q_4q_3q_5q_6q_1(q_1 + q_6)$; $q^* = q_6q_1 + q_5q_2$; $q^{**} = q_1 + q_2 + q_3$.

Основными результатами работы является теоремы, содержащие формулы, аналогичные формуле Стокса, в четырехмерном пространстве.

Перед формулировкой основного результата введем следующие дифференциальные операторы: $L_1 = -q_2q_4q_5q_1 - q_2q_4q_5q_6 + q_4q_3q_5q_1 + q_4q_3q_5q_6$; $L_2 = q_2q_4q_3q_1 + q_2q_4q_3q_6 - q_2q_3q_5q_1 - q_2q_3q_5q_6$; $L_3 = q_2q_3q_5q_1 + q_2q_3q_5q_6 - q_4q_3q_5q_1 - q_4q_3q_5q_6$; $L_4 = -q_2q_4q_3q_1 - q_2q_4q_3q_6 + q_2q_4q_5q_1 + q_2q_4q_5q_6$; $L_5 = -q_2q_4q_3q_1 + q_2q_3q_5q_1$; $L_6 = q_2q_4q_5q_1 - q_4q_3q_5q_1$; $L_7 = -q_2q_3q_5q_1$; $L_8 = q_2q_4q_5q_6$; $L_9 = q_2q_4q_3q_1$; $L_{10} = -q_4q_3q_5q_6$; $L_{11} = q_4q_3q_5q_1$; $L_{12} = -q_2q_4q_3q_6$; $L_{13} = -q_2q_4q_5q_1$; $L_{14} = q_2q_3q_5q_6$; $L_{15} = q_2q_4q_3q_6 - q_2q_4q_5q_6$; $L_{16} = -q_2q_3q_5q_6 + q_4q_3q_5q_6$; $G_0 = -\sum_{i=7}^{10} D_iL_{i-6}$; $G_1 = D_7L_1 + 2[D_1(L_6 - L_5) + D_2(L_8 - L_7) + D_3(L_{10} - L_9)]$; $G_2 = D_8L_2 + 2[D_1(L_5 - -L_6) + D_4(L_{12} - L_{11}) + D_5(L_{14} - L_{13})]$; $G_3 = D_9L_3 + 2[D_2(L_7 - L_8) + D_4(L_{11} - L_{12}) + D_6(L_{16} - L_{15})]$; $G_4 = D_{10}L_4 + 2[D_3(L_9 - L_{10}) + D_5(L_{13} - L_{14}) + D_6(L_{15} - L_{16})]$.

Теорема 1. *Для любой функции $f \in \mathbb{C}^{17}(\mathbf{S}_4)$ выполняется следующее равенство:*

$$\int_{\mathbf{S}_4} (Dqf)(x)dx = \sum_{i=0}^{4} (G_if)(z_i).$$

Рассмотрим следующие дифференциальные операторы: $P_{0,2} = -\sum_{i=7}^{10} D_iL_{i-6}$; $P_{1,2} = D_7L_1 + 2[D_1(L_6 - L_5) + D_2(L_8 - L_7) + D_3(L_{10} - L_9)]$; $P_{2,2} = 2[D_1(L_5 - L_6) + D_4(L_{12} - L_{11}) + D_5(L_{14} - L_{13})]$; $P_{3,2} = D_9L_3 + 2[D_2(L_7 - L_8) + D_4(L_{11} - L_{12}) + D_6(L_{16} - L_{15})]$; $P_{4,2} = D_{10}L_4 + 2[D_3(L_9 - L_{10}) + q_5(L_{13} - L_{14}) + D_6(L_{15} - L_{16})]$; $\sum_{i=0}^{4} \widetilde{P}_{i,0,2} = \sum_0^4 \frac{P_{i,2}}{q_8}$; $Q_{0,2} = D_8$, $P_{0,3} = -\sum_{i=7}^{10} D_iL_{i-6}$; $P_{1,3} = D_7L_1 + 2[D_1(L_6 - L_5) + D_2(L_8 - L_7) + D_3(L_{10} - L_9)]$; $P_{2,3} = D_8L_2 + 2[D_1(L_5 - L_6) + D_4(L_{12} - L_{11}) + D_5(L_{14} - L_{13})]$; $P_{3,3} = 2[D_2(L_7 - L_8) + D_4(L_{11} - L_{12}) + D_5(L_{13} - L_{14})]$; $P_{4,3} = D_{10}L_4 + 2[D_3(L_9 - L_{10}) + D_5(L_{13} - L_{14}) + D_6(L_{15} - L_{16})]$; $\sum_{i=0}^{4} \widetilde{P}_{i,0,3} = \sum_0^4 \frac{P_{i,3}}{q_9}$, $Q_{0,3} = D_9$; $P_{0,4} = -\sum_{i=7}^{10} D_iL_{i-6}$; $P_{1,4} = D_7L_1 + 2[D_1(L_6 - L_5) + D_2(L_8 - L_7) + D_3(L_{10} - L_9)]$; $P_{2,4} = D_8L_2 + 2[D_1(L_5 - L_6) + D_4(L_{12} - L_{11}) + D_5(L_{14} - L_{13})]$; $P_{3,4} = D_9L_3 + 2[D_2(L_7 - L_8) + D_4(L_{11} - L_{12}) + D_6(L_{16} - L_{15})]$; $P_{4,4} =$

$= 2[D_3(L_9-L_{10})+D_5(L_{13}-L_{14})+D_6(L_{15}-L_{16})]$; $\sum_{i=0}^4 \widetilde{P}_{i,0,4} = \sum_0^4 \frac{P_{i,4}}{q_{10}}$; $Q_{0,4} = D_{10}$; $P_{0,5} = -\sum_{i=7}^{10} D_i L_{i-6}$; $P_{1,5} = D_7 L_1 + 2[D_2(L_8 - L_7) + D_3(L_{10} - L_9)]$; $P_{2,5} = = D_8 L_2 + 2[D_4(L_{12} - L_{11}) + D_5(L_{14} - L_{13})]$; $P_{3,5} = D_9 L_3 + 2[D_2(L_7 - L_8) + D_4(L_{11} - -L_{12}) + D_6(L_{16} - L_{15})]$; $P_{4,5} = D_{10} L_4 + 2[D_3(L_9 - L_{10}) + D_5(L_{13} - L_{14}) + D_6(L_{15} - -L_{16})]$; $\sum_{i=0}^4 \widetilde{P}_{i,1,2} = \sum_0^4 \frac{P_{i,5}}{q_1}$; $Q_{1,2} = D_1$; $P_{0,6} = -\sum_7^{10} D_i L_{i-6}$; $P_{1,6} = D_7 L_1 + +2[D_1(L_6 - L_5) + D_3(L_{10} - L_9)]$; $P_{2,6} = q_8 L_2 + 2[D_1(L_5 - L_6) + D_4(L_{12} - L_{11}) + +D_5(L_{14} - L_{13})]$; $P_{3,6} = D_9 L_3 + 2[D_4(L_{11} - L_{12}) + D_6(L_{16} - L_{15})]$; $P_{4,6} = D_{10} L_4 + +2[D_3(L_9-L_{10})+D_5(L_{13}-L_{14})+D_6(L_{15}-L_{16})]$; $\sum_{i=0}^4 \widetilde{P}_{i,1,3} = \sum_0^4 \frac{P_{i,6}}{q_2}$; $Q_{1,3} = D_2$; $P_{0,7} = -\sum_{i=7}^{10} D_i L_{i-6}$; $P_{1,7} = D_7 L_1 + 2[D_1(L_6 - L_5) + D_2(L_8 - L_7)]$; $P_{2,7} = = D_8 L_2 + 2[D_1(L_5 - L_6) + D_4(L_{12} - L_{11}) + D_5(L_{14} - L_{13})]$; $P_{3,7} = D_9 L_3 + 2[D_2(L_7 - -L_8) + D_4(L_{11} - L_{12}) + D_6(L_{16} - L_{15})]$; $P_{4,7} = D_{10} L_4 + 2[D_5(L_{13} - L_{14}) + D_6(L_{15} - -L_{16})]$; $\sum_{i=0}^4 \widetilde{P}_{i,1,4} = \sum_0^4 \frac{P_{i,7}}{q_3}$; $Q_{1,4} = D_3$; $P_{0,8} = -\sum_{i=7}^{10} q_i L_{i-6}$; $P_{1,8} = q_7 L_1 + +2[D_1(L_6-L_5)+D_2(L_8-L_7)+D_3(L_{10}-L_9)]$; $P_{2,8} = D_8 L_2+2[D_1(L_5-L_6)+D_5(L_{14}- -L_{13})]$; $P_{3,8} = D_9 L_3 + 2[D_2(L_7 - L_8) + D_6(L_{16} - L_{15})]$; $P_{4,8} = D_{10} L_4 + 2[D_3(L_9 - -L_{10}) + D_5(L_{13} - L_{14}) + D_6(L_{15} - L_{16})]$; $\sum_{i=0}^4 \widetilde{P}_{i,2,3} = \sum_0^4 \frac{P_{i,8}}{q_4}$; $Q_{2,3} = D_4$; $P_{0,9} = = -\sum_{i=7}^{10} D_i L_{i-6}$; $P_{1,9} = D_7 L_1+2[D_1(L_6-L_5)+D_2(L_8-L_7)+D_3(L_{10}-L_9)]$; $P_{2,9} = = D_8 L_2 + 2[D_1(L_5 - L_6) + D_4(L_{12} - L_{11})]$; $P_{3,9} = D_9 L_3 + 2[D_2(L_7 - L_8) + D_4(L_{11} - -L_{12})+D_6(L_{16}-L_{15})]$; $P_{4,9} = D_{10} L_4+2[D_3(L_9-L_{10})+D_6(L_{15}-L_{16})]$; $\sum_{i=0}^4 \widetilde{P}_{i,2,4} = = \sum_0^4 \frac{P_{i,9}}{q_5}$; $Q_{2,4} = D_5$; $P_{0,10} = -\sum_7^{10} D_i L_{i-6}$; $P_{1,10} = D_7 L_1 + 2[D_1(L_6 - L_5) + +D_2(L_8 - L_7) + D_3(L_{10} - L_9)]$; $P_{2,10} = D_8 L_2 + 2[D_1(L_5 - L_6) + D_4(L_{12} - L_{11}) + +D_5(L_{14} - L_{13})]$; $P_{3,10} = D_9 L_3 + 2[D_2(I_7 - I_8) + D_4(L_{11} - L_{12})]$; $P_{4,10} = D_{10} L_4 + +2[q_3(I_9 - I_{10}) + D_5(L_{13} - L_{14})]$; $\sum_{i=0}^4 \widetilde{P}_{i,3,4} = \sum_0^4 \frac{P_{i,10}}{q_6}$; $Q_{3,4} = D_6$.

Теорема 2. *Пусть* $E := \{(l,k) : l = \overline{0,3},\quad k = \overline{1,4},\quad l < k\}$. *Тогда для любой функции* $f \in \mathbb{C}^{16}(\mathbf{S}_4)$ *выполняется следующее равенство:*

$$\int_{\mathbf{S}_4} (Q_{l,k} q f)(x) dx = H_{l,k} + \sum_{i=0}^4 \widetilde{P}_{i,l,k}, \quad l,k \in E.$$

Введем дифференциальные операторы: $K_1 = -p_1$, $K_2 = -q_3q_4q_5q_6 + q_2q_4q_5q_6 - -2q_2q_3q_5q_6 + q_2q_3q_4q_6$, $K_3 = q_3q_4q_5q_6 - 2q_2q_4q_5q_6$, $K_4 = -2q_2q_3q_5q_6 + q_2q_3q_4q_6$, $K_5 = -q_3q_4q_5q_6 + 2q_2q_3q_5q_6 + q_2q_3q_4q_5$, $K_6 = 2q_2q_4q_5q_6 - q_2q_3q_4q_6 - q_2q_3q_4q_5$, $K_7 = = q_2q_4q_5q_6 + 2q_2q_3q_5q_6 + q_2q_3q_4q_5$, $K_8 = q_2q_3q_4q_6 + q_2q_3q_4q_5$, $K_9 = q_3q_4q_5q_6$, $K_{10} = = -q_2q_4q_5q_6$, $K_{11} = p_2$, $K_{12} = -q_3q_4q_5q_6 + q_1q_4q_5q_6 + 2q_1q_3q_5q_6 + q_1q_3q_4q_5$, $K_{13} = = q_3q_4q_5q_6 - 2q_1q_4q_5q_6$, $K_{14} = -q_3q_4q_5q_6 - 2q_1q_3q_5q_6 + q_1q_3q_4q_5$, $K_{15} = 2q_1q_3q_5q_6 + +q_1q_3q_4q_5$, $K_{16} = 2q_1q_4q_5q_6 - q_1q_3q_4q_6 - q_1q_3q_4q_5$, $K_{17} = q_1q_4q_5q_6$, $K_{18} = 2q_1q_3q_5q_6 - -q_1q_3q_4q_6$, $K_{19} = q_1q_3q_4q_6 + q_1q_3q_4q_5$, $K_{20} = q_3q_4q_5q_6$, $K_{21} = -q_1q_4q_5q_6$, $R_{0,1,3} = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} [-(D_2p_2K_{11}f)(x_1, 1-x_1-x_3, x_3, 0) + (D_2p_2K_{11}f)(x_1, 0, x_3, 0)] dx_3$, $R_{1,3} = \int_0^1 (D_2K_{12}f)(t, 0, 1-t, 0) dt$, $\widetilde{R}_{0,1,3} = -\sum_{i=7}^{10} \frac{D_2K_{i+6}}{q_i}$, $\widetilde{R}_{1,1,3} = \frac{D_2K_{13}}{q_7} + +2(\frac{D_2(K_{17}-K_{18})}{q_1} - \frac{D_2K_{19}}{q_3})$, $\widetilde{R}_{2,1,3} = \frac{D_2K_{14}}{q_8} + 2(\frac{D_2(K_{18}-K_{17})}{q_1} + \frac{D_2K_{20}}{q_4} - \frac{D_2K_{21}}{q_5})$, $\widetilde{R}_{3,1,3} = = \frac{D_2K_{15}}{q_9} - 2(\frac{D_2K_{20}}{q_4} + \frac{D_2K_{21}}{q_6})$, $\widetilde{R}_{4,1,3} = \frac{D_2K_{16}}{q_{10}} + 2(\frac{D_2K_{19}}{q_3} + \frac{D_2K_{21}}{q_5} + \frac{D_2K_{21}}{q_6})$, $K_{22} = = p_3$, $K_{23} = q_1q_2q_4q_6 + q_1q_2q_4q_5$, $K_{24} = q_2q_4q_5q_6 + q_1q_4q_5q_6$, $K_{25} = -q_2q_4q_5q_6 - -2q_1q_2q_5q_6 + q_1q_2q_4q_6$, $K_{26} = -q_1q_4q_5q_6 + 2q_1q_2q_5q_6 + q_1q_2q_4q_5$; $K_{27} = -q_1q_2q_4q_6 -$

$-q_1q_2q_4q_5$, $K_{28}=-q_1q_4q_5q_6-2q_1q_2q_5q_6+q_1q_2q_4q_6$, $K_{29}=-q_2q_4q_5q_6+2q_1q_2q_5q_6+$ $+q_1q_2q_4q_5$, $K_{30}=q_2q_4q_5q_6-q_1q_4q_5q_6$, при $i\neq 3$: $g_3=\prod_{i=1}^4 q_i$, $Q=\prod_{i=7}^{10} q_i$, $R_{0,1,4}=\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}[(g_3QK_{22}f)(x_1,1-x_1-x_4,0,x_4)+(g_3QK_{22}f)(x_1,0,1-x_1-$ $-x_4,x_4)-2(q_3QK_{22}f)(x_1,0,0,x_4)]dx_4$, $R_{1,4}=\int_0^1[(g_3QK_{23}f)(1-t,0,0,t)]dt$, $\widetilde{R}_{0,1,4}=$ $=-\sum_{i=7}^{10}\frac{g_3QK_{i+17}}{q_i}$, $\widetilde{R}_{1,1,4}=\frac{g_3QK_{24}}{q_7}+2(\frac{g_3QK_{28}}{q_1}+2\frac{g_3QK_{29}}{q_3})$, $\widetilde{R}_{2,1,4}=\frac{g_3QK_{25}}{q_8}+$ $+2(-\frac{g_3QK_{28}}{q_1}+\frac{g_3QK_{30}}{q_4})$, $\widetilde{R}_{3,1,4}=\frac{g_3QK_{26}}{q_9}--2\frac{g_3QK_{29}}{q_2}$, $\widetilde{R}_{4,1,4}=\frac{g_3QK_{27}}{q_{10}}-2\frac{g_3QK_{30}}{q_4}$, $K_{31}=2q_1q_2q_3q_5q_6$, $K_{32}=q_2q_3q_5q_6-q_1q_3q_5q_6$, $K_{33}=q_2q_3q_5q_6+q_1q_3q_5q_6-2q_1q_2q_5q_6$, $K_{34}=-q_2q_3q_5q_6+q_1q_2q_3q_6$, $K_{35}=-q_1q_3q_5q_6+q_1q_2q_3q_5$, $K_{36}=2q_1q_2q_5q_6--q_1q_2q_3q_6-$ $q_1q_2q_3q_5$, $K_{37}=-q_1q_3q_5q_6+q_1q_2q_5q_6+q_1q_2q_3q_6$, $K_{38}=-q_2q_3q_5q_6++q_1q_2q_5q_6+$ $q_1q_2q_3q_5$, $K_{39}=q_1q_2q_3q_6+q_1q_2q_3q_5$, $K_{40}=-q_1q_2q_5q_6$, $R_{0,2,3}=$ $=\int_0^1 dx_2\int_0^{1-x_2}[(D_4K_{31}f)(1-x_2-x_3,x_2,x_3,0)-(D_4K_{31}f)(0,x_2,x_3,0)]dx_3$, $R_{2,3}=$ $=\int_0^1[(D_4K_{32}f)(0,t,1-t,0)]dt$, $\widetilde{R}_{0,2,3}=-\sum_{i=7}^{10}\frac{D_4K_{26+i}}{q_i}$, $\widetilde{R}_{1,2,3}=\frac{D_4K_{33}}{q_7}+2(\frac{D_4K_{37}}{q_1}+$ $+\frac{D_4K_{38}}{q_2}-\frac{D_4K_{39}}{q_3})$, $\widetilde{R}_{2,2,3}=\frac{D_4K_{34}}{q_8}-2(-\frac{D_4K_{37}}{q_1}+\frac{D_4K_{40}}{q_5})$, $\widetilde{R}_{3,2,3}=\frac{D_4K_{35}}{q_9}-2(\frac{D_4K_{38}}{q_2}+$ $+\frac{D_4K_{40}}{q_6})$, $\widetilde{R}_{4,2,3}=\frac{D_4K_{36}}{q_{10}}+2(\frac{D_4K_{39}}{q_3}+\frac{D_4K_{40}}{q_5}+\frac{D_4K_{40}}{q_6})$; $K_{41}=p_5$, $K_{42}=q_1q_2q_4q_6$, $K_{43}=q_2q_3q_4q_6+q_1q_3q_4q_6-2q_1q_2q_4q_6$, $K_{44}=-q_2q_3q_4q_6-2q_1q_2q_3q_6$, $K_{45}=$ $=-q_1q_3q_4q_6+2q_1q_2q_3q_6+q_1q_2q_3q_4$, $K_{46}=2q_1q_2q_4q_6-q_1q_2q_3q_4$, $K_{47}=-q_1q_3q_4q_6+$ $+q_1q_2q_4q_6-2q_1q_2q_3q_6$, $K_{48}=-q_2q_3q_4q_6+q_1q_2q_4q_6+2q_1q_2q_3q_6+q_1q_2q_3q_4$, $K_{49}=$ $=q_1q_2q_3q_4$, $K_{50}=q_2q_3q_4q_6-q_1q_3q_4q_6, K_{51}=-q_1q_2q_4q_6$, $R_{0,2,4}=\int_0^1 dx_2\int_0^{1-x_2}[-(D_5$ $K_{41}f)(1-x_2-x_4,x_2,0,x_4)+(D_5K_{41}f)(0,x_2,0,x_4)]dx_4$, $R_{2,4}=\int_0^1[(D_5K_{42}f)(0,t,$ $0,1-t)]dt$, $\widetilde{R}_{0,2,4}=-\sum_{i=7}^{10}\frac{D_5K_{36+i}}{q_i}$, $\widetilde{R}_{1,2,4}=\frac{D_{45}K_{43}}{q_7}+2(\frac{D_5K_{47}}{q_1}+\frac{D_5K_{48}}{q_2}-\frac{D_5K_{49}}{q_3})$, $\widetilde{R}_{2,2,4}=\frac{D_5K_{44}}{q_8}+2(-\frac{D_5K_{47}}{q_1}+\frac{D_5K_{50}}{q_5})$, $\widetilde{R}_{3,2,4}=\frac{D_5K_{45}}{q_9}-2(\frac{D_5K_{48}}{q_2}+\frac{D_5K_{50}}{q_4}+\frac{D_5K_{51}}{q_6})$, $\widetilde{R}_{4,2,4}=\frac{D_5K_{46}}{q_{10}}+2(\frac{D_5K_{49}}{q_3}+\frac{D_5K_{51}}{q_6})$, $K_{52}=p_6$, $K_{53}=q_1q_2q_4q_5$, $K_{54}=q_2q_3q_4q_5+$ $+q_1q_3q_4q_5-2q_1q_2q_4q_5$, $K_{55}=-q_2q_3q_4q_5-2q_1q_2q_3q_5+q_1q_2q_3q_4$, $K_{56}=-q_1q_3q_4q_5+$ $+2q_1q_2q_3q_5$, $K_{57}=2q_1q_2q_4q_5-q_1q_2q_3q_4$, $K_{58}=-q_1q_3q_4q_5+q_1q_2q_4q_5-2q_1q_2q_3q_5+$ $+q_1q_2q_3q_4$, $K_{59}=-q_2q_3q_4q_5++q_1q_2q_4q_5+2q_1q_2q_3q_5$, $K_{60}=q_1q_2q_3q_4$, $K_{61}=$ $=q_2q_3q_4q_5-q_1q_3q_4q_5$, $K_{62}=-q_1q_2q_3q_4$, $R_{0,3,4}=\int_0^1 dx_3\int_0^{1-x_3}[-(D_6K_{52}f)(1-$ $-x_3-x_4,0,x_3,x_4)+(D_6K_{52}f)(0,0,x_3,x_4)]dx_4$, $R_{3,4}=\int_0^1[(D_6K_{53}f)(0,0,t,1-t)]dt$, $\widetilde{R}_{0,3,4}=-\sum_{i=7}^{10}\frac{D_6K_{47+i}}{q_i}$, $\widetilde{R}_{1,3,4}=\frac{D_6K_{54}}{q_7}+2(\frac{D_6K_{58}}{q_1}+\frac{D_6K_{59}}{q_2}-\frac{D_4K_{60}}{q_3})$, $\widetilde{R}_{2,3,4}=$ $=\frac{D_6K_{55}}{q_8}+2(-\frac{D_6K_{58}}{q_1}+\frac{D_6K_{61}}{q_4}+\frac{D_6K_{62}}{5})$, $\widetilde{R}_{3,3,4}=\frac{D_6K_{56}}{q_9}+2(-\frac{D_6K_{59}}{q_2}+\frac{D_6K_{61}}{q_4}+\frac{D_6K_{62}}{q_5})$, $\widetilde{R}_{4,3,4}=\frac{D_6K_{57}}{q_{10}}+2(\frac{D_6K_{60}}{q_3}-\frac{D_6K_{62}}{q_5})$.

Теорема 3. *Пусть* $F:=\{(l,k): l=\overline{1,3},\quad k=\overline{2,4},\quad l<k\}$, *произвольная функция* $f\in\mathbb{C}^{30}(\mathbf{S}_4)$. *Тогда следующее равенство верно:*

$$\int_{\mathbf{S}_4}(G_{k,l}f)(x)dx=R_{0,k,l}+R_{k,l}+\sum_{i=0}^{4}(P_{i,k,l}f)(z_i),\quad l,k\in F.$$

Введем следующие дифференциальные операторы: $N_1=q_{10}q_3q_5q_6q^{**}, N_{0,1,2,3}=$ $=\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2\int_0^{1-x_1-x_2}[(q_{10}q_3q_5q_6f)(x_1,x_2,x_3,1-x_1-x_2-x_3)-(q_{10}q_3q_5q_6f)(x_1,$ $x_2,x_3,0)]dx_3$, $N_{0,1,2,(1)}=\int_0^1 dx_1\int_0^1[-(q_{10}q_3q_6f)(x_1,x_2,1-x_1-x_2,0)+(q_{10}q_3q_6f)(x_1,$ $x_2,0,0)]dx_2$, $N_{0,1,3,(1)}=\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}[-(q_{10}q_3q_5f)(x_1,1-x_1-x_3,x_3,0)+(q_{10}q_3q_5f)$ $(x_1,0,x_3,0)]dx_3$, $N_{0,2,3,(1)}=\int_0^1 dx_2\int_0^{1-x_2}[3(q_{10}q_3q_5f)(1-x_2-x_3,x_2,x_3,0)-3(q_{10}q_3q_5f)$

$(0,x_2,x_3,0)]dx_3$, $N_{0,1,(1)}=\int_0^1(-q_{10}q_5-q_{10}q_6)(f)(x_1,0,0,0)dx_1$, $N_{0,2,(1)}=\int_0^1(3q_{10}q_3f)(0,x_2,0,0)dx_2$, $N_{1,2,(1)}=\int_0^1(q_{10}q_5+3q_{10}q_3)(f)(x_1,1-x_1,0,0)dx_1$, $N_{1,3,(1)}==\int_0^1[(q_{10}q_6f)(x_1,0,1-x_1,0)]dx_1$, $N_{2,4,(1)}=\int_0^1(q_{10}q_5f)(0,x_2,0,1-x_2)dx_2$, $N_{3,4,(1)}==\int_0^1(q_{10}q_6f)(0,0,x_3,1-x_3)dx_3$, $N_{0,(1)}=q_6+q_5+3q_3$, $N_{1,(1)}=6q_{10}$, $N_{4,(1)}=-3q_3-q_5-q_6-6q_{10}$, $N_{0,p,q,(1)}=N_{0,1,2,3,(1)}+N_{0,1,2,(1)}+N_{0,1,3,(1)}$, $N_{0,k,l,(1)}==N_{0,2,3,(1)}+N_{0,1,(1)}+N_{0,2,(1)}+N_{1,2,(1)}+N_{1,3,(1)}+N_{2,4,(1)}$, $N_{m,(1)}=N_{3,4,(1)}++(N_{0,(1)}f)(z_0)+(N_{1,(1)}f)(z_1)+(N_{4,(1)}f)(z_4)$, $N_2=q_6q_4q_2(q_1+q_2+q_3)$, $N_{0,1,2,4}==\int_0^1dx_1\int_0^{1-x_1}dx_2\int_0^{1-x_2-x_4}[-(q_6q_4q_2f)(x_1,x_2,1-x_1-x_2-x_4,x_4)+(q_6q_4q_2f)(x_1,x_2,0,x_4)]dx_4$, $N_{0,1,2,(2)}=\int_0^1dx_1\int_0^{1-x_2}[-(q_6q_4f)(x_1,x_2,0,1-x_1-x_2)+(q_6q_4f)(x_1,x_2,0,0)]dx_2$, $N_{0,1,4,(2)}=\int_0^1dx_1\int_0^{1-x_1}[-(q_6q_4f)(x_1,1-x_1-x_4,0,x_4)+(q_6q_4f)(x_1,0,0,x_4)]dx_4$, $N_{0,2,4,(2)}=\int_0^1dx_2\int_0^{1-x_2}[(3q_6q_2f)(1-x_2-x_4,x_2,0,x_4)-(3q_6q_2f)(0,x_2,0,x_4)]dx_4$, $N_{0,2,(2)}=\int_0^1(-q_6f)(0,x_2,0,0)dx_2$, $N_{0,3,(2)}=\int_0^1(3q_2-q_4+q_6)(f)(0,0,x_3,0)dx_3$, $N_{0,4,(2)}=\int_0^1(-3q_2+q_4)(f)(0,0,0,x_4)dx_4$, $N_{1,3,(2)}=\int_0^1(3q_2f)(x_1,0,1-x_1,0)dx_1$, $N_{1,4,(2)}=\int_0^1(-3q_2f)(x_1,0,0,1-x_1)dx_1$, $N_{2,3,(2)}=\int_0^1(-q_4f)(0,x_2,1-x_2,0)dx_2$, $N_{2,4,(2)}=\int_0^1(q_4+q_2)(f)(0,x_2,0,1-x_2)dx_2$, $N_{3,(2)}=-2$, $N_{4,(2)}=2$, $N_{0,p,q,r}==N_{0,1,2,(2)}+N_{0,1,4,(2)}+N_{0,2,4,(2)}$, $N_{k,l,(2)}=N_{0,2,(2)}+N_{0,3,(2)}+N_{0,4,(2)}+N_{1,3,(2)}++N_{1,4,(2)}+N_{2,3,(2)}+N_{2,4,(2)}$, $N_{m,(2)}=(N_{3,(2)}f)(z_3)+(N_{4,(2)}f)(z_4)$, $N_{0,2,3,4}==3\int_0^1dx_2\int_0^{1-x_2}dx_3\int_0^{1-x_2-x_3}[(q_3q_2q_1f)(1-x_2-x_3-x_4,x_2,x_3,x_4)-(q_3q_2q_1f)(0,x_2,x_3,x_4)]dx_4$, $N_3=q_5q_4q_1(q_1+q_2+q_3)$, $N_{0,1,3,4}=\int_0^1dx_1\int_0^{1-x_1}dx_3\int_0^{1-x_1-x_3}[-(q_5q_4q_1f)(x_1,1-x_1-x_3-x_4,x_3,x_4)+(q_5q_4q_1f)(x_1,0,x_3,x_4)]dx_4$, $N_{0,1,3,(3)}=\int_0^1dx_1\int_0^{1-x_1}[-(q_5q_4f)(x_1,0,x_3,1-x_1-x_3)+(q_5q_4f)(x_1,0,x_3,0)]dx_3$, $N_{0,1,4,(3)}=\int_0^1dx_1\int_0^{1-x_1}[-(q_5q_4f)(x_1,0,1-x_1-x_4,x_4)+(q_5q_4f)(x_1,0,0,x_4)]dx_4$, $N_{0,3,4,(3)}=\int_0^1dx_3\int_0^{1-x_3}[-(3q_5q_1f)(1-x_3-x_4,0,x_3,x_4)+(3q_5q_1f)(0,0,x_3,x_4)]dx_4$, $N_{0,2,(3)}=\int_0^1(-3q_1-q_4-q_5)(f)(0,x_2,0,0)dx_2$, $N_{0,3,(3)}=\int_0^1(q_5f)(0,0,x_3,0)]dx_3$, $N_{0,4,(3)}=\int_0^1(3q_1+q_4)(f)(0,0,0,x_4)dx_4$, $N_{1,2,(3)}=\int_0^1-(3q_1f)(x_1,1-x_1,0,0)dx_1$, $N_{1,4,(3)}=\int_0^1(3q_1f)(x_1,0,0,1-x_1)dx_1$, $N_{2,3,(3)}=\int_0^1(q_4f)(0,x_2,1-x_2,0)dx_2$, $N_{3,4,(3)}=\int_0^1[(q_4-q_5)(f)(0,0,x_3,1-x_3)dx_3$, $N_{2,(3)}=2$, $N_{4,(3)}=-2$, $N_{0,p,q,(3)}=N_{0,1,3,(3)}+N_{0,1,4,(3)}+N_{0,3,4,(3)}$, $N_{k,l,(3)}==N_{0,2,(3)}+N_{0,3,(3)}+N_{0,4,(3)}+N_{1,2,(3)}+N_{1,4,(3)}+N_{2,3,(3)}+N_{3,4,(3)}$, $N_{m,(3)}=(N_{2,(3)}f)(z_2)++(N_{4,(3)}f)(z_4)$, $N_4=q_3q_2q_1q^*$, $N_{0,2,3,(4)}=\int_0^1dx_2\int_0^{1-x_2}[(q_3q_2f)(0,x_2,x_3,1-x_2--x_3)-(q_3q_2f)(0,x_2,x_3,0)]dx_3$, $N_{0,2,4,(4)}=\int_0^1dx_2\int_0^{1-x_2}[(q_3q_2f)(0,x_2,1-x_2--x_4,x_4)-(q_3q_2f)(0,x_2,0,x_4)]dx_4$, $N_{0,3,4,(4)}=\int_0^1dx_3\int_0^{1-x_3}[(q_3q_1f)(0,1-x_3-x_4,x_3,x_4)-(q_3q_1f)(0,0,x_3,x_4)]dx_4$, $N_{0,1,(4)}=\int_0^1(q_2+q_3)(f)(x_1,0,0,0)dx_1$, $N_{0,3,(4)}==\int_0^1(-q_3f)(0,0,x_3,0)dx_3$, $N_{0,4,(4)}=\int_0^1(-q_1-q_2)(f)(0,0,0,x_4)dx_4$, $N_{1,2,(4)}==\int_0^1(-q_1f)(x_1,1-x_1,0,0)dx_1$, $N_{1,3,(4)}=\int_0^1(-q_2f)(x_1,0,1-x_1,0)dx_1$, $N_{1,4,(4)}==\int_0^1(q_1f)(x_1,0,0,1-x_1)dx_1$, $N_{2,4,(4)}=\int_0^1(-q_1f)(0,x_2,0,1-x_2)dx_2$, $N_{3,4,(4)}==\int_0^1(-q_2+q_3)(f)(0,0,x_3,1-x_3)dx_3$, $N_{1,(4)}=-2$, $N_{4,(4)}=2$, $N_{0,p,q,(4)}==N_{0,2,3,(4)}+N_{0,2,4,(4)}+N_{0,3,4,(4)}$, $N_{k,l,(4)}=N_{0,1,(4)}+N_{0,3,(4)}+N_{0,4,(4)}+N_{1,2,(4)}++N_{1,3,(4)}+N_{1,4,(4)}+N_{2,4,(4)}+N_{3,4,(4)}$, $N_{m,(4)}=(N_{1,(4)}f)(z_1)+(N_{4,(4)}f)(z_4)$.

Теорема 4. *Пусть* $G = \{(i,j,r) : i = 1,2, \quad j = 2,3, j > i, \quad r = 3,4, r > j\}$. *Тогда для любой функции* $f \in \mathbb{C}^{34}(\mathbf{S}_4)$ *следующее равенство верно:*

$$\int_{\mathbf{S}_4} (N_s f)(x)dx = N_{0,i,j,r,(s)} + N_{0,p,q,(s)} + N_{0,k,l,(s)} + N_{m,(s)}, \quad s \in [1,4], \quad i,j,r \in G.$$

3. Доказательство основного результата.

Доказательство теоремы 1. Для произвольной функции переход к повторному интегралу по множеству $\mathbf{S}_4$ осуществляется исходя из следующих равенств:
$\int_{\mathbf{S}_4}(f)(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4 =$
$= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \int_0^{1-x_1-x_2-x_3} f(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_4 =$
$= \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_3 \int_0^{1-x_2-x_3} dx_4 \int_0^{1-x_2-x_3-x_4} f(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_1 =$
$= \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} dx_4 \int_0^{1-x_3-x_4} dx_1 \int_0^{1-x_1-x_3-x_4} f(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_2 =$
$= \int_0^1 dx_4 \int_0^{1-x_4} dx_1 \int_0^{1-x_1-x_4} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2-x_4} f(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_3.$

Выбираем тот порядок интегрирования, который позволяет вычислить внутренний интеграл, получаем $\int_{\mathbf{S}_4}((q_1+q_6)f)(x)dx = \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} dx_3 \int_0^{1-x_2-x_3} dx_4$ $\int_0^{1-x_2-x_3-x_4} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_1$ - $\int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} dx_4 \int_0^{1-x_3-x_4} dx_1 \int_0^{1-x_1-x_3-x_4} \frac{\partial}{\partial x_2} f$ $(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_2 + \int_0^1 dx_4 \int_0^{1-x_4} dx_1 \int_0^{1-x_1-x_4} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2-x_4} \frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_3-$ -$\int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \int_0^{1-x_1-x_2-x_3} \frac{\partial}{\partial x_4} f(x_1,x_2,x_3,x_4)dx_4 = \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} dx_4$ $\int_0^{1-x_3-x_4}[f(1-x_2-x_3-x_4,x_2,x_3,x_4)-f(0,x_2,x_3,x_4)]dx_2- \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} dx_4 \int_0^{1-x_3-x_4}[f$ $(x_1,1-x_1-x_3-x_4,x_3,x_4)-f(x_1,0,x_3,x_4)]dx_1+ \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2}[f(x_1,x_2,1-$ $-x_1-x_2-x_4,x_4)-f(x_1,x_2,0,x_4)]dx_4- \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2}[f(x_1,x_2,x_3,1-x_1-$ $-x_2-x_3)-f(x_1,x_2,x_3,0)]dx_3.$

Действуя на функции из предыдущего интеграла, дифференциальным оператором q_6q_1, имеем $\int_{\mathbf{S}_4}(q_6q_1(q_1+q_6)f)(x)dx = \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2}[(-q_1f)(1-x_2-x_4,x_2,0,x_4)+$ $(q_1f)(0,x_2,0,x_4)]dx_4- \int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2}[(-q_1f)(1-x_2-x_3,x_2,x_3,0)+(q_1f)(0,x_2,x_3,0)]dx_3-$ $-\int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1}[(-q_1f)(x_1,1-x_1-x_4,0,x_4)+(q_1f)(x_1,0,0,x_4)]dx_4+ \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1}[(-q_1$ $f)(x_1,1-x_1-x_3,x_3,0)+(q_1f)(x_1,0,x_3,0)]dx_3 + \int_0^1 dx_4 \int_0^{1-x_4}[(-q_6f)(0,x_2,1-x_2-$ $-x_4,x_4)+(q_6f)(0,x_2,0,x_4)]dx_2- \int_0^1 dx_4 \int_0^{1-x_4}[(-q_6f)(x_1,0,1-x_1-x_4,x_4)+(q_6f)(x_1,0,$ $0,x_4)]dx_1- \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3}[(-q_6f)(0,x_2,x_3,1-x_2-x_3)+(q_6f)(0,x_2,x_3,0)]dx_2+ \int_0^1 dx_3$ $\int_0^{1-x_3}[(-q_6f)(x_1,0,x_3,1-x_1-x_3)+(q_6f)(x_1,0,x_3,0)]dx_1.$

Действуем на полученную функцию оператором $q_2q_4q_3q_5$, и приводя подобные слагаемые, получаем: $\int_{\mathbf{S}_4}(q_2q_4q_3q_5q_6q_1(q_1+q_6)f)(x)dx = \int_0^1[(-q_2q_4q_5q_1f-q_2q_4q_5q_6f+$ $+q_4q_3q_5q_1f+q_4q_3q_5q_6f)(x_1,0,0,0)]dx_1+ \int_0^1[(q_2q_4q_3q_1f+q_2q_4q_3q_6f-q_2q_3q_5q_1f-q_2q_3q_5$ $q_6f)(0,x_2,0,0)]dx_2+ \int_0^1[(q_2q_3q_5q_1f+q_2q_3q_5q_6f-q_4q_3q_5q_1f-q_4q_3q_5q_6f)(0,0,x_3,0)]dx_3+$ $+\int_0^1[(-q_2q_4q_3q_1f-q_2q_4q_3q_6f+q_2q_4q_5q_1f+q_2q_4q_5q_6f)(0,0,0,x_4)]dx_4+ \int_0^1[(-q_2q_4q_3q_1f+$ $+q_2q_3q_5q_1f)(1-x_2,x_2,0,0)]dx_2+ \int_0^1[(q_2q_4q_5q_1f-q_4q_3q_5q_1f)(x_1,1-x_1,0,0)]dx_1+$ $+\int_0^1[(-q_2q_3q_5q_1f)(1-x_3,0,x_3,0)]dx_3+ \int_0^1[(q_2q_4q_5q_6f)(x_1,0,1-x_1,0)]dx_1+ \int_0^1[(q_2q_4$ $q_3q_1f)(1-x_4,0,0,x_4)]dx_4+ \int_0^1[(-q_4q_3q_5q_6f)(x_1,0,0,1-x_1)]dx_1+ \int_0^1[(q_4q_3q_5q_1f)(0,1-$ $-x_3,x_3,0)]dx_3+ \int_0^1[(-q_2q_4q_3q_6f)(0,x_2,1-x_2,0)]dx_2+ \int_0^1[(-q_2q_4q_5q_1f)(0,1-x_4,0,$

$x_4)]dx_4+\int_0^1[(q_2q_3q_5q_6f)(0,x_2,0,1-x_2)]dx_2+\int_0^1[(q_2q_4q_3q_6f-q_2q_4q_5q_6f)(0,0,1-x_4,$ $x_4)]dx_4+\int_0^1[(-q_2q_3q_5q_6f+q_4q_3q_5q_6f)(0,0,x_3,1-x_3)]dx_3.$

Производим следующие замены: в пятом интеграле $x_1=1-x_2$, в седьмом: $x_1=1-x_3$, в девятом: $x_1=1-x_4$, в одиннадцатом: $x_2=1-x_3$, в тринадцатом: $x_2=1-x_4$, в пятнадцатом $x_3=1-x_4$, получаем: $\int_{\mathbf{S}_4}(qf)(x)dx=\int_0^1(L_1f)(x_1,0,0,0)dx_1+$ $+\int_0^1(L_2f)(0,x_2,0,0)dx_2+\int_0^1(L_3f)(0,0,x_3,0)dx_3+\int_0^1(L_4f)(0,0,0,x_4)dx_4+\int_0^1(L_6-$ $-L_5)(f)(x_1,1-x_1,0,0)dx_1+\int_0^1(L_8-L_7)(f)(x_1,0,1-x_1,0)dx_1+\int_0^1(L_{10}-L_9)(f)(x_1,0,$ $0,1-x_1)dx_1+\int_0^1(L_{12}-L_{11})(f)(0,x_2,1-x_2,0)dx_2+\int_0^1(L_{14}-L_{13})(f)(0,x_2,0,1--x_2)dx_2+$ $\int_0^1(L_{16}-I_{15}f)(0,0,x_3,1-x_3)dx_3.$

Действуя на полученную функцию qf дифференциальным оператором D, имеем: $\int_{\mathbf{S}_4}(Dqf)(x)dx=(-q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_8q_9q_{10}L_1-q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_7q_9q_{10}L_2-q_1q_2q_3q_4q_5$ $q_6q_7q_8q_{10}L_3-q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_7q_8q_9L_4)(f)(0,0,0,0)+(q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_8q_9q_{10}L_1+2q_2q_3q_4q_5$ $q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_6-L_5)+2q_1q_3q_4q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_8-L_7)+2q_1q_2q_4q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_{10}-$ $-L_9))(f)(1,0,0,0)+(q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_7q_9q_{10}L_2+2q_2q_3q_4q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_5-L_6)+2q_1q_2q_3$ $q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_{12}-L_{11})+2q_1q_2q_3q_4q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_{14}-L_{13}))(f)(0,1,0,0)+(q_1q_2q_3q_4q_5q_6$ $q_7q_8q_{10}L_3+2q_1q_3q_4q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_7-L_8)+2q_1q_2q_3q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_{11}-L_{12})+2q_1q_2q_3q_4$ $q_5q_7q_8q_9q_{10}(L_{16}-L_{15}))(f)(0,0,1,0)+(q_1q_2q_3q_4q_5q_6q_7q_8q_9L_4+2q_1q_2q_4q_5q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_9-$ $-L_{10})+2q_1q_2q_3q_4q_6q_7q_8q_9q_{10}(L_{13}-L_{14})+2q_1q_2q_3q_4q_5q_7q_8q_9q_{10}(L_{15}-L_{16}))(f)(0,0,0,1).$

Учитывая обозначения введенные перед теоремами, получаем требуемое утверждение:

$$\int_{\mathbf{S}_4}(Dqf)(x)dx=\sum_{i=0}^{4}(G_if)(z_i),$$

что завершает доказательство теоремы 1. □

Доказательство теоремы 2. Для того, чтобы получить интеграл по симплексу, который выражается через значения рассматриваемых дифференциальных операторов от функции f в стороне z_0z_1, подействуем на функцию qf, дифференциальным оператором D_7, имеем:

$\int_{\mathbf{S}_4}(D_7qf)(x)dx=\int_0^1(D_7L_1f)(x_1,0,0,0)dx_1+\sum_{i=8}^{10}(-D_iL_{i-6}/q_7)(f)(0,0,0,0)+$ $+2[(D_1(L_6-L_5)+D_2(L_8-L_7)+D_3(L_{10}-L_9))/q_7](f)(1,0,0,0)+[(D_8L_2+2(D_1(L_5-$ $-L_6)+D_4(L_{12}-L_{11})+D_5(L_{14}-L_{13})))/q_7](f)(0,1,0,0)+[(D_9L_3+2(D_2(L_7-L_8)+$ $+D_4(L_{11}-L_{12})+D_6(L_{16}-L_{15})))/q_7](f)(0,0,1,0)+[(D_{10}+2(D_3(L_9-L_{10})+D_5(L_{13}-$ $L_{14})+D_6(L_{15}-L_{16})))/q_7](f)(0,0,0,1).$

Заменяя в первом интеграле $t=x_1$, $\widetilde{P}_{0,0,1}=\sum_{i=8}^{10}-D_iL_{i-6}/q_7$; $\widetilde{P}_{1,0,1}=2(D_1(L_6-$ $-L_5)+D_2(L_8-L_7)+D_3(L_{10}-L_9))/q_7$; $\widetilde{P}_{2,0,1}=(D_8L_2+2(D_1(L_5-L_6)+D_4(L_{12}-$ $-L_{11})+D_5(L_{14}-L_{13})))/q_7$; $\widetilde{P}_{3,0,1}=(D_9L_3+2(D_2(L_7-L_8)+D_4(L_{11}-L_{12})+D_6(L_{16}-$ $-L_{15})))/q_7$; $\widetilde{P}_{4,0,1}=(D_{10}+2(D_3(L_9-L_{10})+D_5(L_{13}-L_{14})+D_6(L_{15}-L_{16})))/q_7$, получим:

$$\int_{\mathbf{S}_4}(Q_{0,1}qf)(x)dx=\int_0^1(Q_{0,1}L_1f)(0,0,0,t)dt+\sum_{i=0}^{4}\widetilde{P}_{i,0,1}(z_i).$$

Отсюда следует, что для того, чтобы получить интеграл, который выражается через дифференциальные операторы в стороне z_0z_i, $i=\overline{1,4}$, необходимо на функцию

qf подействовать соответственно операторами D_{i+6}. Учитывая замены: в первом полученном интеграле $t = x_2$, во втором $t = x_3$ и в третьем $t = x_4$, имеем:

$$\int_{\mathbf{S}_4} (Q_{0,2}qf)(x)dx = \int_0^1 (Q_{0,2}L_2f)(0,t,0,0)dt + \sum_{i=0}^{4} \widetilde{P}_{i,0,2}(z_i).$$

$$\int_{\mathbf{S}_4} (Q_{0,3}qf)(x)dx = \int_0^1 (Q_{0,3}L_3f)(0,0,t,0)dt + \sum_{i=0}^{4} \widetilde{P}_{i,0,3}(z_i).$$

$$\int_{\mathbf{S}_4} (Q_{0,4}qf)(x)dx = \int_0^1 (Q_{0,4}L_4f)(0,0,0,t)dt + \sum_{i=0}^{4} \widetilde{P}_{i,0,4}(z_i).$$

Таким образом, действуя на функцию qf операторами D_i, $i = \overline{1,6}$, получим интегралы, выражающиеся с помощью дифференциальных операторов в сторонах z_jz_k, $j = \overline{1,3}$, $k = \overline{2,4}$, $j < k$. Делая в полученных интегралах замены: в первом, втором и третьем интеграле $t = x_1$, в четвертом и пятом $t = x_2$ и шестом $t = x_3$; получаем требуемые утверждения:

$$\int_{\mathbf{S}_4} (Q_{1,2}qf)(x)dx = \int_0^1 (Q_{1,2}(L_6 - L_5)f)(t,1-t,0,0)dt + \sum_{i=0}^{4} \widetilde{P}_{i,1,2}(z_i),$$

$$\int_{\mathbf{S}_4} (Q_{1,3}qf)(x)dx = \int_0^1 (Q_{1,3}(L_8 - L_7)f)(t,0,1-t,0)dt + \sum_{i=0}^{4} \widetilde{P}_{i,1,3}(z_i),$$

$$\int_{\mathbf{S}_4} (Q_{1,4}qf)(x)dx = \int_0^1 (Q_{1,4}(L_{10} - L_9)f)(t,0,0,1-t)dt + \sum_{i=0}^{4} \widetilde{P}_{i,1,4}(z_i),$$

$$\int_{\mathbf{S}_4} (Q_{2,3}qf)(x)dx = \int_0^1 (Q_{2,3}(L_{12} - L_{11})f)(0,t,1-t,0)dt + sum_{i=0}^{4} \widetilde{P}_{i,2,3}(z_i),$$

$$\int_{\mathbf{S}_4} (Q_{2,4}qf)(x)dx = \int_0^1 (Q_{2,4}(L_{14} - L_{13})f)(0,t,0,1-t)dt + \sum_{i=0}^{4} \widetilde{P}_{i,2,4}(z_i),$$

$$\int_{\mathbf{S}_4} (Q_{3,4}qf)(x)dx = \int_0^1 (Q_{3,4}(L_{16} - L_{15})f)(0,0,t,1-t)dt + \sum_{i=0}^{4} \widetilde{P}_{i,3,4}(z_i),$$

что завершает доказательство теоремы 2. □

Доказательство теоремы 3. Вычисляя интеграл по симплексу от функции $q^*f(x)$, получаем интегралы выражающиеся через значения функций в грани $z_0z_1z_2$ и ребрах $z_{i,j}$, $\quad i = \overline{0,3}, \quad j = \overline{1,4}, \quad i < j$:

$\int_{\mathbf{S}_4} (q^*f)(x)dx = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} [-f(x_1,x_2,1-x_1-x_2,0) + f(x_1,x_2,0,0)]dx_2 + + \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} [-f(x_1,1-x_1-x_3,x_3,0) + f(x_1,0,x_3,0)]dx_3 + \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} [f(x_1,1- -x_1-x_4,0,x_4) + f(x_1,0,1-x_1-x_4,x_4) - 2f(x_1,0,0,x_4)]dx_4 + 2\int_0^1 dx_2 \int_0^{1-x_2} [f(1-x_2-$

$-x_3,x_2,x_3,0)-f(0,x_2,x_3,0)]dx_3+\int_0^1 dx_2\int_0^{1-x_2}[-f(1-x_2-x_4,x_2,0,x_4)+f(0,x_2,0,$ $x_4)]dx_4+\int_0^1 dx_3\int_0^{1-x_3}[-f(1-x_3-x_4,0,x_3,x_4)+f(0,0,x_3,x_4)]dx_4.$

Действуя оператором p_1 на рассматриваемую функцию, и вводя замены во втором интеграле $t=x_1$, в третьем интеграле $t=1-x_2$, получим:

$\int_{\mathbf{S}_4}(q_2q_3q_4q_5q_6q^*f)(x)dx=\int_0^1 dx_1\int_0^{1-x_1}[(K_1f)(x_1,x_2,1-x_1-x_2,0)+(K_1f)(x_1,x_2,0,$ $0)]dx_2+\int_0^1[(K_2f)(t,1-t,0,0)]dt+\int_0^1[(K_3f)(x_1,0,0,0)]dx_1+\int_0^1[(K_4f)(0,x_2,0,0)]dx_2+$ $+\int_0^1[(K_5f)(0,0,x_3,0)]dx_3+\int_0^1[(K_6f)(0,0,0,x_4)]dx_4+\int_0^1[(K_7f)(x_1,0,1-x_1,0)]dx_1+$ $+\int_0^1[(K_8f)(1-x_4,0,0,x_4)]dx_4+\int_0^1(K_9f)(0,1-x_3,x_3,0)dx_3+\int_0^1(K_{10}f)(0,1-x_4,0,$ $x_4)dx_4+\int_0^1(K_{10}f)(0,0,1-x_4,x_4)dx_4.$

Действуя на полученную функцию оператором D_1p_1, получаем требуемое равенство:

$$\int_{\mathbf{S}_4}(D_1p_1q^*f)(x)dx=R_{0,1,2}+R_{1,2}+\sum_{i=0}^{4}(\widetilde{R}_{i,1,2})(z_i).$$

Аналогично предыдущему, действуя поочередно на функцию q^*, дифференциальными операторами D_2p_2, g_3Qp_3, D_4p_4, D_5p_5, D_6q_6 и производя соответственно замены: в первом интеграле $t=x_1$, во втором интеграле $t=x_4$, в третьем интеграле $t=x_2$, в четвертом интеграле $t=x_2$, в пятом интеграле $t=x_4$, в шестом интеграле $t=x_3$, имеем выражения интегралов, выражающиеся через введенные операторы в интересующих нас гранях $z_0z_iz_j$, $i=\overline{2,3}$, $j=\overline{3,4}$, $i<j$, а также ребрах и вершинах симплекса:

$$\int_{\mathbf{S}_4}(D_2p_2q^*f)(x)dx=R_{0,1,3}+R_{1,3}+\sum_{i=0}^{4}(\widetilde{R}_{i,1,3})(z_i).$$

$$\int_{\mathbf{S}_4}(q_3Qp_3q^*f)(x)dx=R_{0,1,4}+R_{1,4}+\sum_{i=0}^{4}(\widetilde{R}_{i,1,4})(z_i).$$

$$\int_{\mathbf{S}_4}(D_4p_4q^*f)(x)dx=R_{0,2,3}+R_{2,3}+\sum_{i=0}^{4}(\widetilde{R}_{i,2,3})(z_i).$$

$$\int_{\mathbf{S}_4}(D_5p_5q^*f)(x)dx=R_{0,2,4}+R_{2,4}+\sum_{i=0}^{4}(\widetilde{R}_{i,2,4})(z_i).$$

$$\int_{\mathbf{S}_4}(D_6p_6q^*f)(x)dx=R_{0,3,4}+R_{3,4}+\sum_{i=0}^{4}(\widetilde{R}_{i,3,4})(z_i),$$

что завершает доказательство теоремы 3. □

Доказательство теоремы 4. При действии на функцию f оператором q^{**}, имеем сумму интегралов, выражающихся, через функции в объемных телах $z_{0,i,j,k}$, $i=\overline{1,2}$, $j=\overline{2,3}$, $k=\overline{3,4}$, $i<j<k:$

$\int_{\mathbf{S}_4}(q^{**}f)(x)dx=\int_0^1 dx_2\int_0^{1-x_2}dx_3\int_0^{1-x_2-x_3}[f(x_1,x_2,x_3,1-x_1-x_2-x_3)-f(x_1,x_2,$ $x_3,0)]dx_1+\int_0^1 dx_2\int_0^{1-x_2}dx_4\int_0^{1-x_2-x_4}[-f(x_1,x_2,1-x_1-x_2-x_4,x_4)+f(x_1,x_2,0,$ $x_4)]dx_1+\int_0^1 dx_3\int_0^{1-x_3}dx_4\int_0^{1-x_3-x_4}[-f(x_1,1-x_1-x_3-x_4,x_3,x_4)+f(x_1,0,x_3,x_4)]dx_1+$ $+3\int_0^1 dx_3\int_0^{1-x_3}dx_4\int_0^{1-x_3-x_4}[f(1-x_2-x_3-x_4,x_2,x_3,x_4)-f(0,x_2,x_3,x_4)]dx_2.$

Действуя на функцию q^{**} дифференциальным оператором $q_{10}q_3q_5q_6$, получим сумму конструкций выражающихся в тетраэдре $z_0z_1z_2z_3$, в гранях $z_0z_1z_2$, $z_0z_1z_3$, $z_0z_2z_3$, в ребрах $z_0z_1, z_0z_2, z_1z_2, z_1z_3, z_2z_4, z_3z_4$ и в вершинах симплекса z_0, z_1, z_4 :

$$\int_{\mathbf{S}_4} N_1(f)(x)dx = N_{0,1,2,3,(1)} + N_{0,p,q,(1)} + N_{0,k,l,(1)} + N_{m,(1)}.$$

Для нахождения интегралов по симплексу, от допустимых операторов, выражающихся через функции в каждом тетраэдре $z_0z_1z_2z_4$, $z_0z_1z_3z_4$, $z_0z_2z_3z_4$ (правая часть равенства, кроме указанных интегралов, может содержать также интегралы, выводящие на грани, ребра и вершины симплекса), действуем соответственно операторами $q_6q_4q_2$, $q_5q_4q_1$, $q_3q_2q_1$ на функции q^{**}.

Итак, действуя на функцию q^{**} дифференциальным оператором $z_0z_1z_2z_4$ получаем:

$$\int_{\mathbf{S}_4} (N_2f)(x)dx = N_{0,1,2,4} + N_{0,p,q,(2)} + N_{k,l,(2)} + N_{m,(2)}.$$

Далее, при действии на функцию q^{**} дифференциальным оператором $q_5q_4q_1$ имеем:

$$\int_{\mathbf{S}_4} (N_3f)(x)dx = N_{0,1,3,4} + N_{0,p,q,(3)} + N_{k,l,(3)} + N_{m,(3)}.$$

Для вывода последнего равенства, подействуем на функцию q^{**} оператором $q_3q_2q_1$. Таким образом, получим требуемое тождество:

$$\int_{\mathbf{S}_4} (N_4f)(x)dx = N_{0,2,3,4} + N_{0,p,q,(4)} + N_{k,l,(4)} + N_{m,(4)},$$

что завершает доказательство теоремы 4. □

1. *Berenstein C.A.* Le probleme de Pompeiu locale // J. Anal. Math. – 1989. – **52**. – P. 133–166.
2. *Berenstein C.A.* A local version of the two-circles theorem // Israel J. Math. – 1986. – **55**. – P. 267–288.
3. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. Kluwer Academic Publishers. – 2003. – 454 p.
4. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. Springer. – 2009. – 671 p.
5. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Offbeat integral geometry on symmetric spaces. Basel: Birkhauser. – 2013. – 592 p.
6. *Zalcman L.* A bibliographic survey of Pompeiu problem // Approximation dy solutions of partial differential equations / ed. B. Fuglede et al., – 1992. – P. 185–194.
7. *Zalcman L.* Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of the Pompeiu problem’. In: Radon Transforms and Tomography. Contemp. Math., 2001. – № 278. – P. 69–74.

N. S. Ivanisenko

A version of the Stokes’ formula in four-dimensional space.

We found a formula similar to the Stokes’ for some simplex in four-dimensional space.

Keywords: *differential operator, simplex, extremal version of the Pompeiu problem.*

Донецкий национальный ун-т
Ivanisenko.n.s@gmail.com

Получено 02.06.15