УДК 531.38

©2015. **А. В. Зыза**

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Исследуются условия существования полиномиальных решений дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Построены два новых решения данной задачи, которые характеризуются функциями, полученными обращением эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

Ключевые слова: *полиномиальное решение, гиростат, эффект Барнетта–Лондона, эллиптические интегралы Лежандра.*

1. Введение. Исследование полиномиальных решений в обобщенных задачах динамики (задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [1, 2] и задачи о движении гироскопа в магнитном поле [3–5]) основано на результатах, полученных в задаче о движении тяжелого гиростата с неподвижной точкой [6, 7]. Для уравнений Эйлера–Пуассона построены несколько классов полиномиальных решений. К первому классу относятся полиномиальные решения, рассмотренные В.А. Стекловым, Н. Ковалевским, Д.Н. Горячевым [6]. Второй класс характеризуется структурой решений, предложенной А.И. Докшевичем [7]. Для обобщенных задач динамики изучены оба класса полиномиальных решений (см., например, [8–12]). В данной работе продолжено изучение полиномиальных решений начатое в статье [12]. Получены два новых решения задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона.

2. Постановка задачи. Преобразование дифференциальных уравнений движения. При исследовании движения гиростата с неподвижной точкой в магнитном поле существуют различные подходы его моделирования [2, 3]. Рассматриваемый в статье эффект Барнетта–Лондона состоит в том, что первоначально ненамагниченные и сверхпроводящие твердые тела при при движении в магнитном поле намагничиваются вдоль оси вращения. Возникающая при вращении намагниченность характеризуется магнитным моментом $\mathbf{B} = B\boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость, B – симметричный тензор третьего порядка. Магнитный момент тела при взаимодействии с внешним магнитным полем будет стремиться к направлению вектора напряженности магнитного поля, что приводит к прецессии вектора кинетического момента тела вокруг вектора поля [3].

Уравнения движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона и момента ньютоновских сил в векторном виде [2] запишем так

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Эти уравнения допускают два первых интеграла

$$(A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k_0, \quad \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1. \tag{2}$$

Изменении полной энергии гиростата определяется соотношением

$$[(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) - 2(\mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})]^{\bullet} = 2(B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\omega}, \tag{3}$$

поэтому в общем случае уравнения (1) не имеют интеграла энергии.

В уравнениях (1)–(3) обозначения таковы: A – тензор инерции гиростата, построенных в неподвижной точке; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, характеризующий направление магнитного поля; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, 0)$ гиростатический момент; $\mathbf{s} = (s_1, s_2, 0)$ – вектор, коллинеарный вектору обобщенного центра масс; B и C – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; k_0 – постоянная интеграла площадей; точка над переменными означает относительную производную.

Поскольку для уравнений (1) в общем случае допустимы только два первых интеграла (2), то для этих дифференциальных уравнений недостаточно применение метода Якоби построения дополнительного первого интеграла [6]. Если же для динамического уравнения из (1) имеет место равенство $B = \alpha^* E$ (E – единичная матрица, α^* – некоторый параметр), то из соотношения (3) вытекает интеграл энергии для уравнений (1). Тогда уравнения (1) будут относиться к уравнениям класса Кирхгофа [1] и полученные для уравнений (1) результаты необходимо будет сопоставлять с результатами [2].

Запишем уравнения (1) и первые интегралы (2) в скалярном виде, полагая $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, C_3)$:

$$\left.\begin{array}{l} A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + \lambda_2\omega_3 + B_2\omega_2\nu_3 - B_3\omega_3\nu_2 + s_2\nu_3 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3, \\ A_2\dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 - \lambda_1\omega_3 + B_3\omega_3\nu_1 - B_1\omega_1\nu_3 - s_1\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_1\nu_3, \\ A_3\dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + \lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1 + B_1\omega_1\nu_2 - B_2\omega_2\nu_1 + \\ \qquad + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2 + s_1\nu_2 - s_2\nu_1; \end{array}\right\} \tag{4}$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = \omega_1\nu_3 - \omega_3\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = \omega_2\nu_1 - \omega_1\nu_2; \tag{5}$$

$$(A_1\omega_1 + \lambda_1)\nu_1 + (A_2\omega_2 + \lambda_2)\nu_2 + A_3\omega_3\nu_3 = k_0, \quad \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \tag{6}$$

Поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (4), (5) решений вида

$$\begin{gathered} \omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2 = Q(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} b_i\sigma^i, \quad \omega_3^2 = R(\sigma) = \sum_{j=0}^{m} c_j\sigma^i, \\ \nu_1 = \varphi(\sigma) = \sum_{i=0}^{l} a_i\sigma^i, \quad \nu_2 = \psi(\sigma) = \sum_{j=0}^{n_1} g_j\sigma^j. \quad \nu_3 = \varkappa(\sigma)\sigma^{-1}\omega_3, \\ \varkappa(\sigma) = \sum_{i=0}^{m_1} f_i\sigma^i, \end{gathered} \tag{7}$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа; b_i, c_j, a_i, g_j, f_i – неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Указанный класс решений является обобщением класса полиномиальных решений, рассмотренный А.И. Докшевичем [7].

Подставим выражения (7) в уравнения (4), (5) и геометрический интеграл из (6):

$$\dot{\sigma} = (\varphi'(\sigma))^{-1}(\psi(\sigma) - Q(\sigma)\varkappa(\sigma)\sigma^{-1})\sqrt{R(\sigma)}; \tag{8}$$

$$\left.\begin{array}{l} \psi'(\sigma)(\psi(\sigma)\sigma - Q(\sigma)\varkappa(\sigma)) = \varphi'(\sigma)\sigma P(\sigma), \quad P(\sigma) = \sigma\varkappa(\sigma) - \varphi(\sigma), \\ (R(\sigma)(\varkappa(\sigma)\sigma^{-1})^2)'\sigma P(\sigma) = 2\psi'(\sigma)\varkappa(\sigma)(Q(\sigma)\varphi(\sigma) - \psi(\sigma)\sigma^2); \end{array}\right\} \tag{9}$$

$$\begin{array}{c} 2A_1\sigma^2 P(\sigma) = \psi'(\sigma)(\varkappa(\sigma)\{(C_3 - C_2)\psi(\sigma) + B_2 Q(\sigma) + s_2\} + \\ +\{(A_2 - A_3)Q(\sigma) - B_3\psi(\sigma) + \lambda_2\}\sigma); \end{array} \tag{10}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_2 Q'(\sigma)\sigma P(\sigma) = \psi'(\sigma)(\varkappa(\sigma)\{(C_1 - C_3)\varphi(\sigma) - B_1\sigma^2 - s_1\} + \\ +\{(A_3 - A_1)\sigma^2 + B_3\varphi(\sigma) - \lambda_1\}\sigma); \\ A_3 R'(\sigma)P(\sigma) = 2\psi'(\sigma)(\psi(\sigma)\{(C_2 - C_1)\varphi(\sigma) + B_1\sigma^2 + s_1\} + \\ +Q(\sigma)\{(A_1 - A_2)\sigma^2 - B_2\varphi(\sigma) + \lambda_1\} - \lambda_2\sigma^2 - s_2\varphi(\sigma)); \end{array}\right\} \tag{11}$$

$$(\varphi^2(\sigma) + \psi^2(\sigma) - 1)\sigma^2 + R(\sigma)\varkappa^2(\sigma) = 0. \tag{12}$$

В уравнениях (8)–(11) штрихом обозначено дифференцирование по независимой переменной σ. Если функции $Q(\sigma), R(\sigma), \varphi(\sigma), \psi(\sigma), \varkappa(\sigma)$ определены, то зависимость σ от времени устанавливается из дифференциального уравнения (8).

3. Одно новое частное решение. Рассмотрим случай когда в (7) $n = 3$, $m = 6, l = 2, n_1 = 4, m_1 = 2$. Тогда

$$\begin{array}{c} \omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2 = Q(\sigma) = b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0, \\ \omega_3^2 = R(\sigma) = c_6\sigma^6 + c_5\sigma^5 + c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0, \\ \nu_1 = \varphi(\sigma) = a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0, \quad \nu_2 = \psi(\sigma) = g_4\sigma^4 + g_3\sigma^3 + g_2\sigma^2 + g_1\sigma + g_0, \\ \nu_3 = \varkappa(\sigma)\sigma^{-1}\omega_3, \quad \varkappa(\sigma) = f_2\sigma^2 + f_1\sigma + f_0. \end{array} \tag{13}$$

Подставим полиномы $Q(\sigma), \varphi(\sigma), \psi(\sigma), \varkappa(\sigma)$ из (13) в первое уравнение из (9) и динамическое уравнение (10). Полученные соотношения при $g_1 \neq 0, g_2 \neq 0, g_3 \neq 0$ могут быть тождествами по σ только при выполнении уравнений

$$\begin{array}{c} C_2 = C_3, \quad B_2 = B_3, \quad A_2 = A_3, \quad f_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad g_4 - b_3 f_2 = 0, \\ g_3 - b_3 f_1 - b_2 f_2 = 0, \quad g_2 = b_2 f_1 + b_1 f_2, \quad f_1 s_2 - B_3 g_0 + \lambda_2 = 0. \end{array} \tag{14}$$

С учетом (14) уравнение (10) упрощается

$$P(\sigma) = \mu(2A_1)^{-1}\psi'(\sigma), \quad \mu = f_2 s_2 + B_3(f_1 b_1 - g_1). \tag{15}$$

Соотношение (15) позволяет упростить уравнения исследуемой системы (9), (11). Исключая функцию $P(\sigma)$ из уравнений (9), (11), подставим в полученные уравнения и уравнения (12), (15) выражения компонент векторов $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}$ из (13). Требования того, чтобы полученные равенства при условиях (14) были тождествами по σ приводит к системе алгебраических уравнений на параметры задачи и коэффициенты решения

(13):

$$
\begin{gathered}
A_1(g_1 - b_1 f_1) - a_2\mu = 0, \quad 2A_1 g_0 - a_1\mu = 0, \\
2A_1(f_1 - a_2) - 3g_3\mu = 0, \quad A_1 f_2 - 2g_4\mu = 0, \\
A_1 a_1 + g_2\mu = 0, \quad 2A_1 a_0 + g_1\mu = 0 \\
2c_6 f_2\mu + A_1 g_4 = 0, \quad \mu(6c_6 f_1 + 7c_5 f_2) + 4A_1(g_3 - b_3 a_2) = 0, \\
\mu(5c_5 f_1 + 6c_4 f_2) + 4A_1(g_2 - b_3 a_1 - b_2 a_2) = 0, \\
\mu(4c_4 f_1 + 5c_3 f_2) + 4A_1(g_1 - b_3 a_0 - b_2 a_1 - b_1 a_2) = 0, \\
\mu(3c_3 f_1 + 4c_2 f_2) + 4A_1(g_0 - b_2 a_0 - b_1 a_1) = 0, \\
\mu c_2 f_1 - 2A_1 b_1 a_0 = 0, \quad B_1 - \alpha a_2 = 0, \quad 3\mu A_3 b_3 - 2A_1(\alpha f_2 a_1 - \gamma_0) = 0, \\
\beta g_0 + s_2 a_0 = 0, \quad \mu A_3 b_2 - A_1(\beta f_2 + a_1(\alpha f_1 + B_3)) = 0, \\
c_1 = 0, \quad c_0 = 0, \quad a_0^2 + g_0^2 - 1 = 0, \\
\mu A_3 b_1 - 2A_1(\beta f_1 + B_3 a_0 - \lambda_1) = 0, \\
3\mu A_3 c_6 + 2A_1(\alpha g_4 a_1 - \gamma_0 b_3) = 0, \\
5\mu A_3 c_5 + 4A_1(\beta g_4 + (\alpha g_3 + B_3 b_3)a_1 - \gamma_0 b_2) = 0, \\
\mu A_3 c_4 + A_1(\beta g_3 + (\alpha g_2 + B_3 b_2)a_1 - \gamma_0 b_1 - \eta b_3) = 0, \\
3\mu A_3 c_3 + 4A_1(\beta g_2 + (\alpha g_1 + B_3 b_1)a_1 - \eta b_2 + \lambda_2 + s_2 a_2) = 0, \\
\mu A_3 c_2 + 2A_1(\beta g_1 + (\alpha g_0 + s_2)a_1 - \eta b_1) = 0.
\end{gathered} \tag{16}
$$

Здесь

$$
\alpha = C_1 - C_3, \quad \beta = \alpha a_0 - s_1, \quad \gamma_0 = A_1 - A_3 - B_3 a_2, \quad \eta = \lambda_1 - B_3 a_0.
$$

Система уравнений (14), (16)совместима относительно параметров A_1, A_3, B_3. Запишем решение этой системы так:

$$
\begin{gathered}
\alpha = -\frac{\beta_3 A_3 B_3^2}{8\beta_0\beta_1^2}, \quad B_1 = \frac{\beta_3 B_3}{16\beta_0}, \\
s_1 = \frac{\beta_2\beta_3\beta_4\sqrt{\xi_1}B_3^2}{8\beta_0\beta_1^3\beta_7 A_3}, \quad s_2 = -\frac{\beta_0\beta_2\beta_3^2\beta_5 B_3^2}{\beta_1^2\sqrt{\xi_1\xi_2}}, \\
\lambda_1 = -\frac{2(8A_1^2 - 7A_1A_3 + A_3^2)B_3\sqrt{\xi_1}}{\beta_1^2\beta_7 A_3}, \quad \lambda_2 = \frac{\beta_0\beta_2\beta_3\beta_5 B_3}{\sqrt{\xi_1\xi_2}}, \\
b_3 = \frac{\sqrt{2\xi_2}\gamma}{4\beta_2\beta_3\beta_5 B_3}, \quad b_2 = \frac{\sqrt{\xi_2}}{2\beta_2\beta_5}, \quad b_1 = \frac{\sqrt{2\xi_2}\gamma}{2\beta_1\beta_5\sqrt{\xi_1}}, \quad b_0 = 0, \\
c_6 = \frac{\beta_1\sqrt{\xi_1}}{8\beta_2\beta_5 B_3}, \quad c_5 = \frac{\sqrt{2}\beta_1\beta_3\sqrt{\xi_1}}{4\beta_2\beta_5\gamma}, \quad c_4 = \frac{\beta_3\beta_6}{4\beta_2\beta_5}, \\
c_3 = \frac{\sqrt{2}\beta_3\beta_4 B_3}{\beta_5\gamma}, \quad c_2 = -\frac{\beta_3\beta_4 B_3\sqrt{\xi_1}}{\beta_1^2\beta_5\beta_7 A_3}, \quad c_1 = 0, \quad c_0 = 0, \\
g_4 = \frac{\beta_1^2\sqrt{\xi_1\xi_2}}{4\beta_2\beta_3\beta_5 A_3 B_3^2}, \quad g_3 = \frac{\sqrt{2}\beta_1^2\sqrt{\xi_2}\gamma}{2\beta_2\beta_3\beta_5 A_3 B_3^2}, \quad g_2 = \frac{2\beta_0\beta_1\sqrt{\xi_2}}{\beta_2\beta_5 A_3 B_3}, \\
g_1 = -\frac{\sqrt{2}\beta_1^2\beta_2\beta_3\beta_4}{\gamma A_3\sqrt{\xi_2}}, \quad g_0 = -\frac{2\beta_0\beta_1\beta_2\beta_3\beta_5}{A_3\sqrt{\xi_1\xi_2}}, \\
a_2 = -\frac{\beta_1^2}{2A_3 B_3}, \quad a_1 = -\frac{2\sqrt{2}\beta_0\beta_1\beta_3}{\gamma A_3}, \quad a_0 = \frac{\beta_4\sqrt{\xi_1}}{\beta_7 A_3^2}, \\
f_2 = \frac{\sqrt{2}\beta_1^2\gamma}{2\beta_3 A_3 B_3^2}, \quad f_1 = \frac{\beta_1^2}{A_3 B_3}, \quad f_0 = 0.
\end{gathered} \tag{17}
$$

Здесь

$$\begin{gathered}
\beta_0 = 2A_1 - A_3, \quad \beta_1 = 4A_1 - A_3, \quad \beta_2 = 4A_1 - 3A_3, \quad \beta_3 = 8A_1 - A_3, \\
\beta_4 = 8A_1 - 3A_3, \quad \beta_5 = 8A_1 - 5A_3, \quad \beta_6 = 12A_1 - 7A_3, \quad \beta_7 = 16A_1 - 7A_3, \\
\xi_1 = -\beta_1\beta_2\beta_7 A_3, \quad \xi_2 = -\beta_1\beta_2\beta_3\beta_5, \\
\gamma = \sqrt{\beta_3 B_3 \sqrt{\xi_1}}.
\end{gathered}$$

Решение (13) при условиях (17) будет действительным, если

$$B_3 > 0, \quad A_1 \in \left(\frac{1}{8}A_3;\ \frac{1}{4}A_3\right). \tag{18}$$

Зависимость вспомогательной переменной от времени получим из дифференциального уравнения (8)

$$\dot{\sigma} = \mu(2A_1)^{-1}\sigma\sqrt{c_6\sigma^4 + c_5\sigma^3 + c_4\sigma^2 + c_3\sigma + c_2}. \tag{19}$$

Рассмотрим числовой пример решения (13), (17), (19) уравнений (4), (5) при условиях (18).

Пусть

$$\begin{gathered}
A_1 = \frac{5}{24}A_3, \quad A_2 = A_3 = a, \quad B_1 = -\frac{B_3}{14}, \quad B_2 = B_3 = b, \\
C_2 = C_3, \quad \alpha = \frac{36}{7}\frac{b^2}{a}, \quad (a > 0, b > 0).
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\lambda} = -\frac{b}{\sqrt{33}}(4\sqrt{13}; 7\sqrt{5}; 0), \quad \mathbf{s} = \frac{8\sqrt{33}}{11}\frac{b^2}{a}\left(-\frac{13\sqrt{13}}{7}; 7\sqrt{5}; 0\right), \\
\boldsymbol{\omega}_1 = \sigma^2, \ \ \boldsymbol{\omega}_2 = Q(\sigma) = \frac{\sigma}{5}\left(\frac{\sqrt{10}}{8}\sqrt[4]{\frac{11}{39}}\sqrt{\frac{a}{b}}\sigma^2 + \frac{\sqrt{65}}{26}\sigma + \sqrt{10}\sqrt[4]{\frac{39}{11}}\sqrt{\frac{b}{a}}\right), \\
\boldsymbol{\omega}_3^2 = \frac{\sigma^2}{5}R^*(\sigma), \quad R^*(\sigma) = -\frac{\sqrt{429}}{1248}\frac{a}{b}\sigma^4 - \frac{\sqrt{2}}{104}\sqrt[4]{\frac{143}{3}}\sqrt{\frac{a}{b}}\sigma^3 - \\
-\frac{27}{52}\sigma^2 + 4\sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{3}{143}}\sqrt{\frac{b}{a}}\sigma + \frac{8\sqrt{429}}{11}, \\
\nu_1 = -\frac{1}{72}\frac{a}{b}\sigma^2 - \frac{7\sqrt{2}}{18}\sqrt[4]{\frac{3}{143}}\sqrt{\frac{a}{b}}\sigma + \frac{2\sqrt{429}}{99}, \\
\nu_2 = \frac{\sqrt{5}}{9}\left(\frac{\sqrt{33}}{960}\frac{a^2}{b^2}\sigma^4 + \frac{\sqrt{2}}{80}\sqrt[4]{\frac{11}{39}}\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}\sigma^3 + \right. \\
\left. + \frac{7\sqrt{13}}{260}\frac{a}{b}\sigma^2 - \frac{\sqrt{2}}{5}\sqrt[4]{\frac{39}{11}}\sqrt{\frac{a}{b}}\sigma - \frac{7\sqrt{33}}{11}\right), \\
\nu_3 = \frac{\sqrt{5}}{180}\frac{a}{b}\sigma\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt[4]{\frac{143}{3}}\sqrt{\frac{a}{b}}\sigma + 1\right)\sqrt{R^*(\sigma)};
\end{gathered} \tag{20}$$

$$\dot{\sigma} = \alpha_0\sigma\sqrt{R^*(\sigma)}, \quad \alpha_0 = \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{39}{11}}\sqrt{\frac{b}{a}}. \tag{21}$$

Функцию $\sigma = \sigma(t)$ находим из дифференциального уравнения (21). Действительность решения (20), (21) вытекает из условия, что подкоренная функция $R^* = R^*(\sigma)$ в точке $\sigma = 0$ принимает положительное значение. При этом зависимость $\sigma = \sigma(t)$ выражается функциями времени, полученными в результате обращения эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

4. Второе новое частное решение. Случай $n = 2$, $m = 4$, $l = 3$, $n_1 = 2, m_1 = 2$. Пусть теперь полиномы решения (13) имеют вид

$$\begin{gathered}
\omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2 = Q(\sigma) = b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0,\\
\omega_3^2 = R(\sigma) = c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0,\\
\nu_1 = \varphi(\sigma) = a_3\sigma^3 + a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0,\\
\nu_2 = \psi(\sigma) = g_2\sigma^2 + g_1\sigma + g_0, \quad \nu_3 = \varkappa(\sigma)\sigma^{-1}\omega_3,\\
\varkappa(\sigma) = f_2\sigma^2 + f_1\sigma + f_0.
\end{gathered} \tag{22}$$

Подставим полиномы $Q(\sigma), R(\sigma), \varphi(\sigma), \psi(\sigma), \varkappa(\sigma)$ из (22) в уравнения (9)–(12) и потребуем их выполнения при всех σ. Это требование приводит к следующей системе уравнений на параметры задачи и решения (22):

$$\begin{gathered}
C_1 = C_3, \quad A_1 = A_3, \quad B_1 = B_3, \quad \tilde\alpha g_2 + B_2 b_2 = 0,\\
f_1(\tilde\alpha g_0 + B_2 b_0 + s_2) + (A_2 - A_1)b_0 - B_3 g_0 + \lambda_2 = 0, \quad a_3 = f_2, \quad c_4 = -1,\\
2A_1(f_1 - a_2) - 2g_2 d_1 = 0, \quad 2g_2 d_0 + g_1 d_1 + 2A_1 a_1 = 0, \quad g_1 d_0 + 2A_1 a_0 = 0,\\
3d_1 + 2A_1 b_2 = 0, \quad 2A_1(g_2 - b_2 f_1 - b_1 f_2) - 3f_2 d_0 - 2a_2 d_1 = 0, \quad f_0 = 0,\\
2A_1(g_1 - b_1 f_1 - b_0 f_2) - 2a_2 d_0 - a_1 d_1 = 0, \quad 2A_1(g_0 - b_0 f_1) - a_1 d_0 = 0,\\
(5c_3 f_2 - 4f_1)d_1 - 6f_2 d_0 - 4A_1(b_2 a_2 + b_1 a_3 - g_2) = 0,\\
(5c_3 f_2 - 4f_1)d_0 + (4c_2 f_2 + 3c_3 f_1)d_1 - 4A_1(b_2 a_1 + b_1 a_2 + b_0 f_2 - g_1) = 0,\\
(4c_2 f_2 + 3c_3 f_1)d_0 + (3c_1 f_2 + 2c_2 f_1)d_1 - 4A_1(b_2 a_0 + b_1 a_1 + b_0 a_2 - g_0) = 0,\\
(3c_1 f_2 + 2c_2 f_1)d_0 + (2f_2 c_0 + f_1 c_1)d_1 - 4A_1(b_1 a_0 + b_0 a_1) = 0,\\
(2f_2 c_0 + f_1 c_1)d_0 - 4A_1 b_0 a_0 = 0, \quad A_2 b_2 d_1 + A_1 B_3(f_1 - a_2) = 0,\\
A_2(2b_2 d_0 + b_1 d_1) + 2A_1(f_2 s_1 - B_3 a_1) = 0,\\
A_2 b_1 d_0 + 2A_1(f_1 s_1 - B_3 a_0 + \lambda_1) = 0,\\
g_2\tilde\xi_0 + b_2\tilde\xi_1 - f_2(\tilde\alpha g_1 + B_2 b_1) - c_4 d_1 = 0,\\
4\{g_1\tilde\xi_0 + b_1\tilde\xi_1 - f_2(\tilde\alpha g_0 + B_2 b_0) - f_2 s_2\} - 4c_4 d_0 - 3c_3 d_1 = 0,\\
4\{g_0\tilde\xi_0 + b_0\tilde\xi_1 - a_1(\tilde\alpha g_1 + B_2 b_1) -\\
- a_2 s_2 - \lambda_2 + b_2\tilde\xi_3\} - 3c_3 d_0 - 2c_2 d_1 = 0,\\
4\{g_1\tilde\xi_2 - a_1(\tilde\alpha g_0 + B_2 b_0) - a_1 s_2 + b_1\tilde\xi_3\} - 2c_2 d_0 - c_1 d_1 = 0,\\
4\{g_0\tilde\xi_2 + b_0\tilde\xi_3 - a_0 s_2\} - c_1 d_0 = 0,\\
a_0^2 + g_0^2 - 1 + c_0 f_1^2 = 0.
\end{gathered} \tag{23}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
\tilde\alpha = C_3 - C_2, \quad d_1 = f_2(\tilde\alpha g_1 + B_2 b_1) - B_3 g_2 + (A_2 - A_1)b_2,\\
d_0 = f_2(\tilde\alpha g_0 + B_2 b_0 + s_2) + f_1(\tilde\alpha g_1 + B_2 b_1) + (A_2 - A_1)b_1 - B_3 g_1,\\
\tilde\xi_0 = B_3 - \tilde\alpha a_2, \quad \tilde\xi_1 = A_1 - A_2 - B_2 a_2, \quad \tilde\xi_2 = s_1 - \tilde\alpha a_0, \quad \tilde\xi_3 = \lambda_1 - B_2 a_0.
\end{gathered}$$

Считая $g_1 \neq 0$ и свободными параметрами A_3, g_2, B_2, B_3 запишем решение системы (23)

$$\begin{gathered}
\frac{B_2}{B_3} = k, \quad C_1 = C_3, \quad B_1 = B_3, \quad A_1 = A_3, \quad A_2 = \frac{2}{3}A_3, \quad \tilde{\alpha} = 3kB_3^2(2A_3)^{-1}, \\
g_1 = g_2(k(k+1)f_2B_3)^{-1}(\tilde{\gamma} - (2k^2+4k-5)A_3), \\
\tilde{\gamma} = [2(2(k-1)(2k^2+3k-4)A_3^2 - k(k+1)(2k^2+4k-5)(g_2B_3)^2)]^{1/2}, \\
g_0 = \Delta_1 f_2^{-2}, \\
a_3 = f_2, \quad a_2 = -(2(2k^2+5k-6)A_3 - 3\tilde{\gamma})(2k(k+1)B_3)^{-1}, \\
a_1 = g_2^2(2k(k+1)f_2A_3^2)^{-1}\{-2k(k+1)(g_2B_3)^2+ \\
+((6k^2+16k-17)A_3 - 4\tilde{\gamma})A_3\}, \quad a_0 = \Delta_2 f_2^{-2}, \\
b_2 = -3g_2B_3(2A_3)^{-1}, \quad b_1 = 3g_2((2k^2+5k-4)A_3 - \tilde{\gamma})(2k(k+1)f_2A_3)^{-1}, \\
b_0 = g_2(4k(k+1)^2f_2^2A_3^3B_3)^{-1}\{(k+1)(2k(k+1)(g_2B_3)^2 + (4\tilde{\gamma} - (10k^2+ \\
+26k-17)A_3)A_3)(g_2B_3)^2 + (2(4k^2+5k-8)A_3 - (2k+5)\tilde{\gamma})A_3^3\}, \\
c_4 = -1, \quad c_3 = 2g_2^2B_3(f_2A_3)^{-1}, \\
c_2 = -g_2^2(k(k+1)(f_2A_3)^2)^{-1}\{k(k+1)(g_2B_3)^2 + ((3k^2+7k-5)A_3 - \tilde{\gamma})A_3\}, \\
c_1 = -g_2^2(k(k+1)^2f_2^3A_3^2B_3)^{-1}\{(k+1)(\tilde{\gamma} - (4k^2+10k-5)A_3)(g_2B_3)^2+ \\
+((4k^2+6k-9)A_3 - (k+3)\tilde{\gamma})A_3^2\}, \quad c_0 = \Delta_3 f_2^{-4}, \\
f_1 = -(2k(k+1)A_3B_3)^{-1}(-2k(k+1)(g_2B_3)^2+ \\
+(2(2k^2+5k-6)A_3 - 3\tilde{\gamma})A_3), \quad f_0 = 0, \\
\lambda_1 = g_2^2A_3(2k(k+1)f_2^2)^{-1}, \quad s_1 = -g_2^2B_3(2kf_2^2)^{-1}, \\
\lambda_2 = -g_2(6k^2(k+1)^3f_2^2A_3^2B_3)^{-1}\{2k(k+1)(k(k+1)(k+4)(g_2B_3)^2- \\
-((5k^3+39k^2+39k-76)A_3 - 2(k+4)\tilde{\gamma})A_3)(g_2B_3)^2 + ((2k^3(19k+81)- \\
-(69k^2+418k-288))A_3 - (2k^3+34k^2+41k-72)\tilde{\gamma})A_3^3\}. \\
s_2 = g_2(4k(k+1)^3f_2^2A_3^3)^{-1}\{2k(k+1)(k(k+1)(2k+5)(g_2B_3)^2- \\
-((10k^3+55k^2+35k-91)A_3 - 2(2k+5)\tilde{\gamma})A_3)(g_2B_3)^2+ \\
+((4k^3(13k+45) - (120k^2+437k-324))A_3- \\
-(4k^3+42k^2+39k-80)\tilde{\gamma})A_3^3\},
\end{gathered} \tag{24}$$

Здесь f_2 – действительный корень уравнения

$$f_2^4 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3 f_1^2,$$

$$\begin{gathered}
\Delta_1 = -g_2(2k^2(k+1)^3(A_3B_3)^2)^{-1}\{k(k+1)(2k(k+1)(k+2)(g_2B_3)^2+ \\
+(4(k+2)\tilde{\gamma} - (10k^3+48k^2+25k-67)A_3)A_3)(g_2B_3)^2+ \\
+((2k^2(10k^2+33k-21) - (151k-108))A_3- \\
-(2k^3+16k^2+14k-27)\tilde{\gamma})A_3^3\},
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\Delta_2 = -g_2^2((2k^2+4k-5)A_3 - \tilde{\gamma})(4k^2(k+1)^2A_3^2B_3)^{-1}(-2k(k+1)(g_2B_3)^2+ \\
+(4(k^2+3k-3)A_3 - 3\tilde{\gamma})A_3),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\Delta_3 = -g_2^2(4k^2(k+1)^3(A_3B_3)^2)^{-1}\{(k+1)(2(2k+5)(k(k+1)(g_2B_3)^2 + \tilde{\gamma}A_3)- \\
-(12k^3+42k^2-2k-41)A_3^2)(g_2B_3)^2 + 2(2(k-1)(2k^3+14k^2+13k-23)A_3- \\
-(4k^2+8k-11)\tilde{\gamma})A_3^3\}.
\end{gathered}$$

Решение (22) при условиях (24) действительно, если, например,

$$\Delta_3 > 0, \quad 2(k-1)(2k^2+3k-4)A_3^2 \geq k(k+1)(2k^2+4k-5)(g_2B_3)^2. \tag{25}$$

Зависимость σ от времени находим из (8)

$$\begin{gathered}\dot{\sigma}=(d_1\sigma+d_0)(2A_1)^{-1}\sqrt{c_4\sigma^4+c_3\sigma^3+c_2\sigma^2+c_1\sigma+c_0},\\ d_1=g_2B_3,\quad d_0=-g_2(2k(k+1)f_2A_3)^{-1}\{-2k(k+1)(g_2B_3)^2+\\ +(4(k^2+3k-3)A_3-3\tilde{\gamma})A_3\}.\end{gathered}\tag{26}$$

Приведем численный пример решения (22), (24)–(26) уравнений (4), (5).

Пусть $a>0, b>0$ и

$$A_1=A_3=a,\ A_2=\frac{2}{3}a,\ B_1=B_3=b,\ B_2=-2b,\ C_1=C_3,\ g_2=\frac{a}{b},\ C_3-C_2=-\frac{3b^2}{a}.$$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\lambda}=\frac{1}{2}\frac{a^3}{b^2f^2}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}(82+25\sqrt{11});0\right),\\ \mathbf{s}=\frac{1}{4}\frac{a^2}{bf^2}\left(1;101+30\sqrt{11};0\right),\\ \omega_1=\sigma^2,\ \ \omega_2=Q(\sigma)=\frac{1}{2}\left(-3\sigma^2-\frac{3(3+\sqrt{11})a}{bf}\sigma+\frac{(37+10\sqrt{11})a^2}{4b^2f^2}\right),\\ \omega_3^2=R(\sigma)=-\sigma^4+2\frac{a}{bf}\sigma^3+\frac{(5+2\sqrt{11})}{2}\left(\frac{a}{bf}\right)^2\sigma^2-\\ -(7+2\sqrt{11})\left(\frac{a}{bf}\right)^3\sigma+\frac{139+40\sqrt{11}}{16}\left(\frac{a}{bf}\right)^4,\\ \nu_1=\varphi(\sigma)=f\sigma^3+\\ +\frac{a}{2b}\left((8+3\sqrt{11})\sigma^2-\frac{(29+8\sqrt{11})a}{2bf}\sigma-\frac{3(42+13\sqrt{11})a^2}{4b^2f^2}\right),\\ \nu_2=\psi(\sigma)=\frac{a}{b}\left(\sigma^2+\frac{(5+2\sqrt{11})}{2}\frac{a}{bf}\sigma+\frac{(22+7\sqrt{11})}{4}\left(\frac{a}{bf}\right)^2\right),\\ \nu_3=\left(f\sigma+\frac{10+3\sqrt{11}}{2}\frac{a}{b}\right)\sqrt{R(\sigma)}.\end{gathered}\tag{27}$$

Здесь

$$f=\sqrt[4]{\frac{5(2269+684\sqrt{11})}{8}}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Так как зависимость $\sigma=\sigma(t)$ находится из уравнения

$$\dot{\sigma}=\frac{1}{2}\left(\sigma+\frac{3(4+\sqrt{11})}{2}\frac{a}{bf}\right)\sqrt{R(\sigma)},\tag{28}$$

то действительность решения (27), (28) вытекает из условия, что подкоренная функция $\omega_3=\omega_3(\sigma)$ в точке $\sigma=0$ принимает положительное значение.

Приведенный пример (27), (28) характеризуется двумя произвольными положительными параметрами a и b. Зависимость всех переменных задачи от времени устанавливается подстановкой $\sigma=\sigma(t)$ в равенства (27).

Полученное решение (24), (26) характеризуется одним линейным инвариантным соотношением
$$\left(\frac{b_1 g_2}{g_1} - b_2\right)\omega_1 + \omega_2 - \frac{b_1}{g_1}\nu_2 + \frac{b_1 g_0}{g_1} - b_0 = 0.$$

Производная в силу уравнений (4), (5) на этом соотношении не обращается тождественно в нуль.

Заключение. Найдены два новых частных решения полиномиального вида дифференциальных уравнений задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Первое решение зависит от трех независимых параметров A_1, A_3, B_3, а второе – от четырех независимых параметров g_2, A_3, B_2, B_3. Данные решения выражаются функциями, полученными в результате обращения эллиптических интегралов Лежандра третьего рода.

1. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 3–17.
2. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2010. – 364 с.
3. *Урман Ю.Н.* Динамические эффекты, обусловленные вращательным движением сверхпроводника в магнитном подвесе // Докл. АН СССР. – 1984. – **276**, № 6. – С. 1402–1404.
4. *Самсонов В.А.* О вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 32–34.
5. *Козлов В.В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1985. – № 6. – С. 28–33.
6. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1965. – 231 с.
7. *Докшевич А.И.* Новое частное решение уравнений движения гиростата, имеющего неподвижную точку // Механика твердого тела. – 1970. – Вып. 2. – С.12–15.
8. *Горр Г.В., Зыза А.В.* Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 6. – С. 12–21.
9. *Зыза А.В.* О полиномиальных решениях с квадратичным инвариантным соотношением уравнений движения гиростата // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 29–38.
10. *Зыза А.В.* О полиномиальных решениях уравнений движения гиростатав магнитном поле // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 61–70.
11. *Зыза А.В.* Об одном классе полиномиальных решений уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона // Вісник Донецького университету. Сер. А: Природничі науки. – 2010. – № 1. – С. 52–56.
12. *Зыза А.В.* Случай интегрируемости уравнений движения гиростата в магнитном поле // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – **24**. – С. 116–123.

A. V. Zyza

New solutions to equations of gyrostat movement in a magnetic field.

New existence conditions of polynomial solutions to differential equations of gyrostat movement in a magnetic field with allowance made for Barnett-London effect are under review. Two new solutions to this problem have been produced which are characterized by the functions obtained by inversing elliptical Legendre integrals of the third type.

Keywords: *polynomial solution, gyrostat, Barnett-London effect, elliptical Legendre integrals.*

Донецкий национальный ун-т
`z9125494@mail.ru`

Получено 21.10.14