

УДК 539.3:534.1

©2015. Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко

## КОЛЕБАНИЯ НЕПРЕРЫВНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ С ПОКРЫТЫМИ ДИАФРАГМОЙ ТОРЦАМИ

Рассмотрена трехмерная задача об установившихся колебаниях непрерывно-неоднородной по толщине упругой пластины, плоские грани которой покрыты диафрагмой. Получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях в виде суммы вихревого и потенциального состояний. Выполнены численные исследования дисперсионного уравнения, описывающего частотный спектр P-SV волн. Исследовано влияние показателя неоднородности материала на изменение собственных значений. Представлены диаграммы спектральных кривых.

**Ключевые слова:** *поперечно-неоднородная изотропная пластина, диафрагма, установившиеся колебания, метод однородных решений, дисперсионные спектры, частоты записания.*

**1. Введение.** Непрерывное изменение упругих свойств материала по одной из координат характерно для многих тел. Поперечно-неоднородные пластины широко применяются в качестве составных элементов многих современных конструкций. Проблемы проектирования, моделирования и исследования в области функционально-градиентных материалов отражены, например, в работах [1, 2]. Решение конкретных краевых задач теории упругости для функционально-градиентных сред сопряжено с необходимостью учета неоднородности материала. Анализ математических теорий поперечно-неоднородных упругих плит отражен в монографии [3], где отмечается, что актуальным является развитие аналитических методов исследования напряженно-деформированного состояния и волновых полей в поперечно-неоднородных плитах на основе уравнений пространственной теории упругости. Одним из эффективных точных аналитических методов решения трехмерных краевых задач о колебаниях неоднородных, в частности, слоистых пластин является метод однородных решений [3–7], который был впервые предложен в работе [8]. В монографии [7] на основе однородных решений изложены аналитические и численно-аналитические методы решения краевых задач трехмерной теории упругости о равновесии и гармонических колебаниях однородных и поперечно-неоднородных изотропных пластин. Для поперечно-неоднородных пластин вихревое и потенциальное решения описаны спектральными задачами для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами. Однородные решения краевых задач об упругом равновесии и колебаниях трехслойных пластин с неоднородными слоями описаны спектральными задачами для дифференциальных операторов с переменными коэффициентами в работе [6].

Целью данной работы является получение однородных решений уравнений упругих гармонических колебаний непрерывно-неоднородной по толщине изотропной пластины с экспоненциальным изменением модуля сдвига и плотности в случае покрытых диафрагмой плоских граней.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим пластину постоянной толщины  $2h$ , отнесенную к размерным прямоугольным декартовым координатам  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ . Координатную плоскость  $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2$  совместим со срединной плоскостью пластины, а ось  $\tilde{x}_3$  направим перпендикулярно торцам пластины. Лицевые грани пластины ( $\tilde{x}_3 = \pm h$ ) покрыты диафрагмой, а на ее боковой поверхности действуют внешние гармонически изменяющиеся во времени с круговой частотой  $\omega$  усилия. Предполагается, что модуль сдвига  $\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{x}_3)$  и плотность  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\tilde{x}_3)$  материала пластины являются функциями поперечной координаты и изменяются по экспоненциальному закону

$$\tilde{G}(\tilde{x}_3) = \tilde{G}_0 e^{\alpha \tilde{x}_3/h}, \quad \tilde{\rho}(\tilde{x}_3) = \tilde{\rho}_0 e^{\alpha \tilde{x}_3/h}, \quad \nu, \tilde{G}_0, \tilde{\rho}_0, \alpha = \text{const}.$$

Введем безразмерные координаты и величины:

$$\begin{aligned} x_1 = \tilde{x}_1/R, \quad x_2 = \tilde{x}_2/R, \quad x_3 = \tilde{x}_3/(\lambda R), \quad \lambda = h/R, \\ u_i(x_1, x_2, x_3) = \tilde{u}_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)/R, \quad \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)/(2\tilde{G}_0) \end{aligned} \quad (1)$$

$$(i, j = \overline{1, 3}),$$

$$G(x_3) = \tilde{G}(\tilde{x}_3)/\tilde{G}_0, \quad \rho(x_3) = \tilde{\rho}(\tilde{x}_3)/\tilde{\rho}_0, \quad \Omega = h\omega/c_S,$$

где  $R$  – характерный линейный размер пластины в плане,  $\Omega$  – приведенная частота упругих колебаний,  $c_S = \sqrt{\tilde{G}_0/\tilde{\rho}_0}$  – скорость сдвиговой объемной волны в материале однородной пластины.

На основании введенных обозначений (1) задача построения однородных решений сводится к интегрированию системы уравнений движения (равновесия при  $\Omega = 0$ ) в перемещениях

$$\begin{aligned} \lambda^2 \nu_0 \partial_1 \theta + (\lambda^2 D^2 + \partial_3^2) u_1 + \alpha (\lambda \partial_1 u_3 + \partial_3 u_1) + \Omega^2 u_1 &= 0, \\ \lambda^2 \nu_0 \partial_2 \theta + (\lambda^2 D^2 + \partial_3^2) u_2 + \alpha (\lambda \partial_2 u_3 + \partial_3 u_2) + \Omega^2 u_2 &= 0, \\ \lambda \nu_0 \partial_3 \theta + (\lambda^2 D^2 + \partial_3^2) u_3 + 2\alpha (\partial_3 u_3 + \lambda \nu_0 \theta) + \Omega^2 u_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

с учетом граничных условий на торцах пластины ( $x_3 = \pm 1$ )

$$u_j(x_1, x_2, \pm 1) = 0 \quad (j = \overline{1, 2}), \quad \sigma_{33}(x_1, x_2, \pm 1) = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i = \overline{1, 3}), \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \theta = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \frac{1}{\lambda} \partial_3 u_3, \quad \nu_0 = \frac{1}{1 - 2\nu}.$$

Компонента тензора напряжений  $\sigma_{33}$  в выражении (3) связана с перемещениями соотношением

$$\sigma_{33} = G(\nu \nu_0 \theta + \lambda^{-1} \partial_3 u_3).$$

Следует отметить, что исходную задачу из-за несимметричного по толщине строения пластины невозможно разделить на симметричную и кососимметричную подзадачи, как в случае однородной пластины [9]. Приведение трехмерной краевой задачи (2), (3) к двумерной осуществим методом однородных решений.

**3. Построение однородных решений задач.** Решение краевой задачи (2), (3) представим суммой вихревого и потенциального состояний

$$\begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} p_k(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2) \\ -p_k(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2) \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{p=1}^{\infty} \begin{pmatrix} n_p(x_3) \partial_1 C_p(x_1, x_2) \\ n_p(x_3) \partial_2 C_p(x_1, x_2) \\ q_p(x_3) C_p(x_1, x_2) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

На основании результатов работы [7] для поперечно-неоднородных пластин неизвестные функции  $p_k(x_3)$ ,  $n_p(x_3)$ ,  $q_p(x_3)$  в выражениях (4) находятся из обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} (Gp')' + (\delta^2 G + \rho \Omega^2) p &= 0; \\ (Gn')' + (\rho \Omega^2 + (1 + \nu_0) \gamma^2 G) n + \lambda (G'q + G\nu_0 q') &= 0, \\ ((1 + \nu_0)Gq')' + (\rho \Omega^2 + \gamma^2 G) q + \frac{\gamma^2}{\lambda} (2(\nu_0 G)'n + G\nu_0 n') &= 0, \end{aligned}$$

а функции  $B_k(x_1, x_2)$  и  $C_p(x_1, x_2)$  являются метагармоническими

$$D^2 B_k(x_1, x_2) - (\delta_k/\lambda)^2 B_k(x_1, x_2) = 0, \quad D^2 C_p(x_1, x_2) - (\gamma_p/\lambda)^2 C_p(x_1, x_2) = 0.$$

В случае изменения величин  $G(x_3)$  и  $\rho(x_3)$  по экспоненциальному закону собственные функции  $p_k(x_3)$  и собственные значения  $\delta_k$  вихревого состояния находятся из спектральной задачи

$$p''(x_3) + \alpha p'(x_3) + (\Omega^2 + \delta^2) p(x_3) = 0, \quad p(\pm 1) = 0$$

и получаются такими

$$\begin{aligned} p_k(x_3) &= e^{-\alpha x_3/2} \sin \frac{\pi k}{2} (1 - x_3), \\ \delta_k &= \sqrt{\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \Omega^2} \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично собственные функции  $n_p(x_3)$ ,  $q_p(x_3)$  потенциального состояния определяются из решения задачи

$$\begin{aligned} n'' + \alpha n' + ((1 + \nu_0) \gamma^2 + \Omega^2) n + \lambda \nu_0 q' + \alpha \lambda q &= 0, \\ q'' + \alpha q' + \frac{\gamma^2 + \Omega^2}{1 + \nu_0} q + \frac{\nu_0 \gamma^2}{\lambda (1 + \nu_0)} n' + \frac{\alpha (\nu_0 - 1) \gamma^2}{\lambda (1 + \nu_0)} n &= 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$n(\pm 1) = 0, \quad q'(\pm 1) = 0, \quad (7)$$

где  $\gamma$  – параметр разделения переменных.

Уравнения (6) для рассматриваемого случая неоднородности материала пластины являются системой обыкновенных линейных однородных дифференциальных

уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение системы (6) имеет вид

$$a_0 s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0, \quad (8)$$

в котором

$$\begin{aligned} a_0 &= 2(1 - \nu), & a_1 &= 4\alpha(1 - \nu), \\ a_2 &= 2(1 - \nu)(\alpha^2 + 2\gamma^2) + (3 - 4\nu)\Omega^2, \\ a_3 &= 4\alpha(1 - \nu)\gamma^2 + \alpha(3 - 4\nu)\Omega^2, \\ a_4 &= (\gamma^2 + \Omega^2) (2(1 - \nu)\gamma^2 + (1 - 2\nu)\Omega^2) - 2\alpha^2\nu\gamma^2. \end{aligned}$$

Корни данного уравнения получаются такими:

$$s_1 = -\frac{\alpha}{2} + i\gamma_1, \quad s_2 = -\frac{\alpha}{2} - i\gamma_1, \quad s_3 = -\frac{\alpha}{2} + i\gamma_2, \quad s_4 = -\frac{\alpha}{2} - i\gamma_2,$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= \gamma^2 + \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}\Omega^2 - \frac{\alpha^2}{4} + d_1, & \gamma_2^2 &= \gamma^2 + \Omega^2 - \frac{\alpha^2}{4} - d_1, \\ d_1 &= \frac{\Omega^2 - d}{4(1 - \nu)}, & d &= \sqrt{\Omega^4 + 16\alpha^2\gamma^2\nu(1 - \nu)}, \quad i^2 = -1. \end{aligned} \quad (9)$$

Следовательно, решением краевой задачи (6), (7) являются функции

$$\begin{aligned} n_p(x_3) &= H_{1p}e^{s_{1p}x_3} + H_{2p}e^{s_{2p}x_3} + H_{3p}e^{s_{3p}x_3} + H_{4p}e^{s_{4p}x_3}, \\ q_p(x_3) &= Q_{1p}e^{s_{1p}x_3} + Q_{2p}e^{s_{2p}x_3} + Q_{3p}e^{s_{3p}x_3} + Q_{4p}e^{s_{4p}x_3}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_1 &= ((a_3s_3 + a_4s_4 - 2a_2s_2) \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - (a_3s_3 - a_4s_4) \sin \gamma_1 \cos \gamma_2) \cos \gamma_2, \\ H_2 &= -((a_3s_3 + a_4s_4 - 2a_1s_1) \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 + (a_3s_3 - a_4s_4) \sin \gamma_1 \cos \gamma_2) \cos \gamma_2, \\ H_3 &= -((a_1s_1 - a_2s_2) \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - (a_1s_1 + a_2s_2 - 2a_4s_4) \sin \gamma_1 \cos \gamma_2) \cos \gamma_1, \\ H_4 &= -((a_1s_1 - a_2s_2) \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 + (a_1s_1 + a_2s_2 - 2a_3s_3) \sin \gamma_1 \cos \gamma_2) \cos \gamma_1; \\ a_1 &= (\alpha_1 + 2i\gamma_1)(\kappa^2 + d), & a_2 &= (\alpha_1 - 2i\gamma_1)(\kappa^2 + d), \\ a_3 &= (\alpha_1 + 2i\gamma_2)(\kappa^2 - d), & a_4 &= (\alpha_1 - 2i\gamma_2)(\kappa^2 - d), \\ \alpha_1 &= -\alpha(1 - 4\nu), & \kappa^2 &= 2\gamma^2 + \Omega^2; \end{aligned} \quad (10)$$

$$Q_j = \frac{a_j H_j}{\Delta} \quad (j = \overline{1, 4}), \quad \Delta = 4\lambda(\Omega^2 + \gamma^2 - 4\alpha^2\nu(1 - \nu)).$$

Собственные значения  $\gamma_p$  находятся из дисперсионного уравнения

$$\begin{aligned} P(\gamma, \Omega; \nu, \alpha) &= d^2 \left( \alpha^2 - \frac{\Omega^2 + \gamma^2}{1 - \nu} \right)^2 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 + \\ &+ \alpha^2 ((\kappa^2 - d)\gamma_2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 - (\kappa^2 + d)\gamma_1 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2) \times \\ &\times ((\kappa^2 - d)\gamma_2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_2 - (\kappa^2 + d)\gamma_1 \cos \gamma_1 \sin \gamma_2) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Частотное уравнение (11), связывающее собственное значение  $\gamma$  и частоту  $\Omega$  при заданных значениях коэффициента Пуассона  $\nu$  и параметра неоднородности  $\alpha$ , описывает частотный спектр P-SV волн. Корни  $\gamma_p$  этого уравнения могут быть действительными, мнимыми или комплексными. Действительные и комплексные корни  $\gamma$  отвечают краевым стоячим (нераспространяющимся) волнам. Мнимые корни  $\gamma$  соответствуют распространяющимся (бегущим) волнам, которые имеют важное значение для исследования процесса переноса энергии.

Описываемый уравнением (11) частотный спектр содержит, в частности, две специфические моды, которые задаются соотношениями  $\gamma_1 = 0$  или  $\gamma_2 = 0$ . Корни характеристического уравнения (8) для этих решений являются кратными. Поэтому им соответствует иная структура собственных функций  $n_p(x_3)$ ,  $q_p(x_3)$  и эти случаи требуют дополнительных исследований. В отличие от однородной пластины ( $\alpha = 0$ ), каждая каждой такой моды состоит из действительной, начинающейся при нулевой частоте  $\Omega$ , и мнимой ветвей.

Полагая в выражениях (5)–(11) частоту  $\Omega = 0$  получаем решение соответствующей задачи о равновесии неоднородной пластины.

Анализ распространения волн в пластине предполагает получение соответствующих асимптотических выражений для уравнения (11) при больших и малых значениях величин  $\gamma$ ,  $\Omega$ .

Для мнимых мод при малых значениях  $\gamma$  имеем длинноволновый диапазон. В этом случае для всех мнимых участков дисперсионных ветвей характерно наличие частот запираания распространяющихся волн [10]. Для их определения полагаем в соотношении (11)  $\gamma = 0$  и получаем две независимые серии частот запираания

$$\Omega_{k1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2-2\nu}{1-2\nu} ((\pi k)^2 + \alpha^2)}, \quad \Omega_{k2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\pi k)^2 + \alpha^2} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (12)$$

Соотношения (12) совпадают с аналогичными для случая жестко заземленных торцов [11]. Как видно, частоты запираания второй серии не зависят от значений коэффициента Пуассона  $\nu$ .

Оценим предельные значения фазовых скоростей  $v_p = \Omega/y$  ( $y = \text{Im}\gamma$ ) распространяющихся мод в высокочастотной области коротковолнового диапазона (большие значения  $\gamma$ ). При  $y \rightarrow \infty$  из дисперсионного соотношения (11) для всех распространяющихся мод получаем выражение

$$v_p = 1.$$

Таким образом, фазовая скорость  $c_p$  получается такой же, как и скорость сдвиговых объемных волн  $c_S = \sqrt{\tilde{G}_0/\tilde{\rho}_0}$  в материале однородной пластины с физико-механическими характеристиками  $\nu$ ,  $\tilde{G}_0$ ,  $\tilde{\rho}_0$ .

Для малых значений частоты  $\Omega$  и параметра неоднородности  $\alpha$  с помощью асимптотического анализа получаем соответствующее предельное выражение для уравнения (11), а именно, при  $\Omega, \alpha \rightarrow 0$  имеем [12]

$$\cos^2 \gamma \sin^2 \gamma = 0.$$

**4. Результаты численных исследований.** Результаты численного решения дисперсионного уравнения (11) представлены на рис. 1 и рис. 2 в виде спектральных кривых – зависимостей собственных значений  $\gamma$  от частоты  $\Omega$  при  $\nu = 0,3$  и  $\alpha = 0,1$  (рис. 1);  $\nu = 0,3$  и  $\alpha = 1$  (рис. 2). На диаграмме дисперсионных кривых сплошные линии соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые – проекциям комплексных ветвей частотного спектра на действительную ( $\text{Re}\gamma, \Omega$ ) и мнимую ( $\text{Im}\gamma, \Omega$ ) плоскости. Видно, что дисперсионные спектры подобны аналогичному для однородной пластины [9], однако имеются количественные и некоторые качественные отличия в поведении мод. Так, в области низких частот  $\Omega \ll 1$  данные уравнения имеют комплексные корни  $\gamma$  (в случае однородной пластины – только действительные ветви).

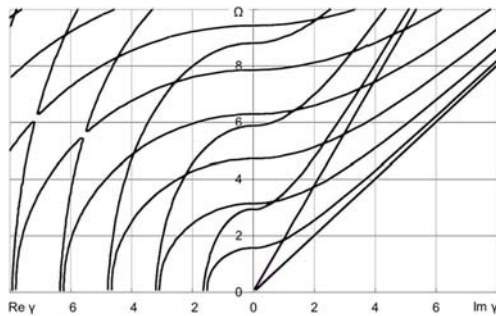


Рис. 1

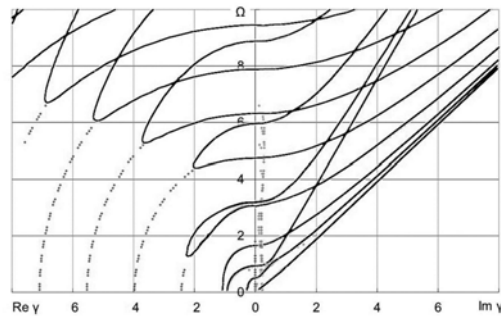


Рис. 2

**5. Выводы.** В данной работе получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях для неоднородной по толщине упругой пластины с экспоненциальным изменением модуля сдвига и плотности в случае покрытых диафрагмой торцов. Как и в случае однородной пластины, однородные решения состоят из вихревого и потенциального состояний.

Собственные значения и собственные функции вихревого решения находятся в явном виде. Собственные функции потенциального решения также находятся в явном виде, а для определения собственных значений получено трансцендентное дисперсионное уравнение, устанавливающее связь между частотой колебаний и собственными значениями при заданных параметрах. Проведены численные исследования дисперсионного соотношения.

В явном виде получены частоты запирания, множество которых состоит из двух серий. На основе численных исследований изучена зависимость собственных значений от изменения показателя неоднородности материала пластины.

1. Birman V., Byrd L.W. Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures // Appl. Mech. Rev. – 2007. – 60, № 5. – P. 195–216.
2. FGM: Design, processing and applications / Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin et al. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.
3. Устинов Ю.А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит. – Ростов н/Д.: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.

4. Алтухов Е.В., Фоменко М.В. Упругие колебания трехслойных пластин с покрытыми диафрагмой торцами // Прикладная механика. – 2014. – 50, № 2. – С. 84–93.
5. Космодамианский А.С., Алтухов Е.В. Трехмерные задачи о вынужденных колебаниях трансформных неоднородных многосвязных плит // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 11. – С. 49–52.
6. Алтухов Е.В. Однородные решения задач о равновесии и колебаниях изотропных слоисто-неоднородных упругих пластин // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2013. – № 1. – С. 18–22.
7. Алтухов Е.В., Фоменко М.В. Равновесие и установившиеся колебания изотропных пластин. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2014. – 436 с.
8. Лурье А.И. К теории толстых плит // Прикладная математика и механика. – 1942. – 6, № 2–3. – С. 151–168.
9. Алтухов Е.В., Панченко Ю.В., Богатчук А.Ю. Колебания изотропных пластин с учетом крайних умов типу плоского торца або диафрагми // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2000. – № 1. – С. 41–45.
10. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наук. думка, 1981. – 284 с.
11. Фоменко М.В. Колебания непрерывно-неоднородной по толщине упругой пластины с жесткими торцами // Вестн. Донец. нац. ун-та. Сер. А: Естеств. науки. – 2013. – № 2. – С. 71–77.
12. Алтухов Е.В. Упругое равновесие слоя с полостью для граничных условий смешанного типа на торцах // Теоретическая и прикладная механика. – 1993. – Вып. 24. – С. 3–7.

**E. V. Altukhov, M. V. Fomenko**

**Vibrations of continuously inhomogeneous in the thickness elastic plate with faces covered by a diaphragm.**

The three-dimensional problem of steady-state vibrations of continuously inhomogeneous in the thickness elastic plate is considered. The flat faces of plate are covered by a diaphragm. The homogeneous solutions of the system of motion equations in displacements are received as the sum of the vortex and potential states. The computational investigations of the dispersive equation describing frequency spectrum of P-SV waves are carried out. Influence of the inhomogeneity parameter of a material on change of eigenvalues is researched. Diagrams of spectral curves are represented.

**Keywords:** *transverse-inhomogeneous isotropic plate, diaphragm, steady-state vibration, homogeneous solutions method, dispersion spectra, cut-off frequencies.*

Донецкий национальный ун-т  
ealtukhov@ukr.net  
maxim\_fom@mail.ru

Получено 21.09.15