УДК 517.5

©2014. **О. А. Очаковская**

АППРОКСИМАЦИЯ В L^p ЛИНЕЙНЫМИ КОМБИНАЦИЯМИ ИНДИКАТОРОВ ШАРОВ

Рассматривается аппроксимация функций на подмножествах $\mathbb{R}^n$ в пространстве L^p, $2 \leqslant p < \infty$ линейными комбинациями индикаторов шаров. Рассмотрен случай, когда радиусы шаров пропорциональны положительным нулям функции Бесселя.

Ключевые слова: *аппроксимационная теорема Винера, аппроксимация сдвигами.*

1. Введение. Классическая теорема Винера о замыкании сдвигов утверждает, что множество всех линейных комбинаций сдвигов функций $f_m \in L^1(\mathbb{R}^1)$, $m = 1, 2, \ldots$, плотно в $L^1(\mathbb{R}^1)$ тогда и только тогда, когда не существует точки $x \in \mathbb{R}^1$, в которой преобразования Фурье всех функций f_m равны нулю (см., например, [1–3]). Винер получил также необходимые и достаточные условия для замкнутости линейной оболочки сдвигов заданных функций из $L^2(\mathbb{R}^1)$. В дальнейшем были получены аналоги этих результатов Винера на некомпактных группах (см. [2]). Изучались также L^p-аналоги теорем Винера при $p \geqslant 1$. В ряде работ (см., например, [4–6] и библиографию в этих работах) изучались случаи, когда заданные функции f_m имеют компактные носители, а их сдвиги сосредоточены на различных подмножествах евклидовых пространств. В данной работе мы рассматриваем аппроксимацию функций из L^p, $2 \leqslant p < +\infty$, линейными комбинациями индикаторов шаров, радиусы которых пропорциональны положительным нулям функции Бесселя. Изучается также возможность подобной аппроксимации сдвигами некоторых финитных радиальных функций.

2. Формулировки основных результатов. Как обычно, обозначим через $\mathcal{E}'(H)$ пространство распределений с компактным носителем на полупространстве $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_n > 0\}$. Пусть также J_ν – функция Бесселя первого рода порядка ν, $N_\lambda = \{t > 0 : \ J_{n/2}(\lambda t) = 0\}$ и Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Пусть $f \in L^p(H)$ при некотором $p \in [2, +\infty)$. Пусть также функция f представима в виде*

$$f = \Delta u + \lambda^2 u \tag{1}$$

для некоторых $u \in \mathcal{E}'(H)$, $\lambda > 0$. Тогда f является пределом сходящейся в $L^p(H)$ последовательности линейных комбинаций индикаторов шаров с радиусами $r \in N_\lambda$, содержащихся в H.

В качестве следствий приведем следующие результаты, показывающие, что класс функций $f \in L^p(H)$, удовлетворяющих условию теоремы 1, является достаточно широким.

Следствие 1. *Пусть $p \in [2, +\infty)$ и функция $f \in L^p(H)$ имеет компактный носитель, содержащийся в H. Пусть также множество нулей преобразования*

Фурье функции f содержит сферу в $\mathbb{R}^n$ радиуса $\lambda > 0$ с центром в нуле. Тогда для этой функции выполнено утверждение теоремы 1.

Далее, положим $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n \ : |x| < R\}$ и $\overline{B_R}$ – замыкание B_R. Символом $u * v$ обозначим свертку функций $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Следствие 2. *Пусть $p \in [2, +\infty)$ и функция $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель. Пусть также вещественнозначная радиальная функция $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) носитель v содержится в шаре $\overline{B_R}$ для некоторого $R > 0$;

2) v непрерывна в нуле;

3) не существует функции $w \in C(\mathbb{R}^n)$, совпадающей с v почти всюду.

Тогда, если носитель функции $f = u * v$ содержится в H, то для этой функции выполнено утверждение теоремы 1.

Следствие 3. *Пусть $p \in [2, +\infty)$ и вещественная радиальная функция $v \in L^p(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условиям 1)-3) из следствия 2. Пусть также $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ и $h_n > R$. Тогда для функции $v(x - h)$ выполнено утверждение теоремы 1.*

Для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через χ_A индикатор этого множества. Если $h \in \mathbb{R}^n$, положим

$$A + h = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x - h \in A\}.$$

Следствие 4. *Пусть A – непустое, измеримое, инвариантное относительно вращений подмножество $\mathbb{R}^n$, содержащееся в шаре $\overline{B_R}$, и функция χ_A непрерывна в нуле. Пусть также $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ и $h_n > R$. Тогда при любом $p \in [2, +\infty)$ существует $\lambda > 0$ такое, что функция χ_{A+h} является пределом последовательности линейных комбинаций индикаторов шаров в H с радиусами $r \in N_\lambda$, сходящейся в $L^p(H)$.*

Далее нам потребуется следующее определение (см. [4, раздел 3.2.3]).

Определение. *Область $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ называется r-областью, если выполнены следующие условия:*

а) каждая точка из $\mathcal{O}$ лежит в некотором замкнутом шаре радиуса r, содержащемся в $\mathcal{O}$;

б) множество центров всех замкнутых шаров радиуса r, содержащихся в $\mathcal{O}$, является связным.

Пусть $\lambda > 0$ и $r \in N_\lambda$. Рассмотрим функцию $g_{\lambda,r} : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, определенную равенством

$$g_{\lambda,r}(x) = \begin{cases} \dfrac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda|x|) r^{(n-2)/2}}{|x|^{(n-2)/2} J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r)} - 1, & |x| < r, \\ 0, & |x| \geqslant r. \end{cases}$$

Можно показать, что $g_{\lambda,r} \in C(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет уравнению

$$\Delta g_{\lambda,r} + \lambda^2 g_{\lambda,r} = \chi_r, \tag{2}$$

где χ_r – индикатор шара B_r и дифференцирование в (2) понимается в смысле распределений.

Теорема 2. *Пусть $\lambda > 0$ фиксировано и множество $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ содержит H и является ζ-областью при некотором $\zeta \in N_\lambda$. Тогда множество всевозможных линейных комбинаций функций вида $g_{\lambda,r}(x-h)$, где $r \in N_\lambda$ и $\operatorname{supp} g_{\lambda,r}(x-h) \subset \mathcal{O}$, является плотным в $L^p(\mathcal{O})$ при любом $p \in [2,+\infty)$.*

3. Вспомогательные утверждения. Сначала напомним некоторые обозначения.

Пусть $\mathcal{Z}_+(J_{n/2}) = \{\nu_1, \nu_2, \dots\}$ – возрастающая последовательность всех нулей функции Бесселя $J_{n/2}$, лежащих на $(0,+\infty)$.

Для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ положим $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|x'| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}$. Пусть также $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n-1}$ и $dx' = dx_1 \cdots dx_{n-1}$ – лебегова мера в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Для $\mu > 0$ рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \varphi(t,r,\mu) = \begin{cases} (r^2-t^2)^{\frac{n-1}{4}} J_{\frac{n-1}{2}}(\mu\sqrt{r^2-t^2}), & |t| < r, \\ 0, & |t| \geqslant r. \end{cases}$$

Положим

$$\varphi_{k,\mu}(t) = \varphi(t, \nu_k, \mu), \ k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1. *Пусть $M_r = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_n| \leqslant r\}$, $u \in L^p(M_r)$ для некоторого $p \in [1,2]$ и*

$$v(t) = \int_{B_r} u(x'+t, x_n)dx, \ t \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{3}$$

Тогда $v \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ и

$$\widehat{v}(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)^{(n-1)/2} \int_{-r}^{r} \widehat{u}(\lambda, x_n)\varphi(x_n, r, |\lambda|)dx_n \tag{4}$$

для почти всех $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$, где $\widehat{u}$ – преобразование Фурье функции $u(x', x_n)$ относительно переменной x'.

Доказательство. Из определения функции v и неравенства Гёльдера имеем оценки

$$|v(t)| \leqslant \int_{B_r} |u(x'+t, x_n)|dx \leqslant c_1 \left(\int_{B_r} |u(x'+t,x_n)|^p dx\right)^{1/p}, \ t \in \mathbb{R}^{n-1},$$

где постоянная $c_1 > 0$ не зависит от t. Из этих неравенств получаем

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v(t)|^p dt \leqslant c_1 \int_{B_r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x'+t,x_n)|^p dt dx =$$

$$= c_1 \int_{B_r} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(t,x_n)|^p dt dx =$$

$$= c_1 \int_{-r}^{r} dx_n \int_{|x'| \leqslant \sqrt{r^2 - x_n^2}} dx' \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(t,x_n)|^p dt \leqslant c_2 \|u\|^p_{L^p(M_r)} \tag{5}$$

для некоторой положительной постоянной c_2, не зависящей от функции u. Таким образом, получили, что $v \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$.

Докажем равенство (4). Прежде всего, установим, что

$$\widehat{v}(\lambda) = \int_{B_r} e^{i(\lambda,x')}\widehat{u}(\lambda, x_n)dx. \tag{6}$$

Сначала рассмотрим случай $p = 1$. Из определения преобразования Фурье и определения v получаем

$$\widehat{v}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda,t)}v(t)dt = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda,t)} \int_{B_r} u(x'+t, x_n)dxdt.$$

Отсюда и из теоремы Фубини следует, что

$$\widehat{v}(\lambda) = \int_{B_r}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda,t)}u(x'+t, x_n)dxdt. \tag{7}$$

Из последнего равенства с помощью замены переменной во внутреннем интеграле получаем (6).

Предположим теперь, что $p = 2$. Для $R > 0$ рассмотрим функцию

$$v_R(t) = \int_{B_r} u_R(x'+t, x_n)dx,\ t \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{8}$$

где

$$u_R(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & |x'| \leqslant R \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из определения u_R имеем

$$\|u_R - u\|_{L^2(M_r)} \to 0 \text{ при } \ R \to +\infty. \tag{9}$$

Кроме того, используя неравенство (5) для функции $u_R - u$ вместо u, получаем

$$\|v_R - v\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant c_2\|u_R - u\|_{L^2(M_r)}. \tag{10}$$

Соотношения (9) и (10) показывают, что $v_R \to v$ при $R \to +\infty$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$.

Поскольку $u_R \in L(M_r)$, по доказанному выше имеем равенство

$$\widehat{v_R}(\lambda) = \int_{B_r} e^{i(\lambda,x')}\widehat{u_R}(\lambda, x_n)dx \tag{11}$$

для почти всех $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$. Далее, пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$. Из (11) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \widehat{v_R}(\lambda)\varphi(\lambda)d\lambda = \int_{B_r}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda,x')}\varphi(\lambda)\widehat{u_R}(\lambda, x_n)dxd\lambda =$$

$$= \int_{B_r}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda,x')}\varphi(\lambda)\widehat{u}(\lambda, x_n)dxd\lambda +$$

$$+\int_{B_r}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(\lambda,x')}\varphi(\lambda)(\widehat{u_R}(\lambda,x_n)-\widehat{u}(\lambda,x_n))dxd\lambda. \tag{12}$$

Обозначим через K носитель функции φ. Тогда модуль последнего слагаемого в правой части равенства (12) не превосходит величины

$$\int_{B_r}\int_K |\varphi(\lambda)||(\widehat{u_R}(\lambda,x_n)-\widehat{u}(\lambda,x_n))|dxd\lambda. \tag{13}$$

Применяя к интегралу в (16) неравенство Коши–Буняковского, получаем, что он не превосходит величины

$$c_3\left(\int_{M_r}|\widehat{u_R}(\lambda,x_n)-\widehat{u}(\lambda,x_n)|^2dx_nd\lambda\right)^{1/2}, \tag{14}$$

где c_3 – положительная постоянная, не зависящая от R. По теореме Планшереля

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|\widehat{u_R}(\lambda,x_n)-\widehat{u}(\lambda,x_n)|^2d\lambda=(2\pi)^n\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|u_R(x',x_n)-u(x',x_n)|^2dx', \tag{15}$$

то есть, выражение в (14) равно

$$c_3\left((2\pi)^n\int_{M_r}|u_R(\lambda,x_n)-u(\lambda,x_n)|^2dx_nd\lambda\right)^{1/2}. \tag{16}$$

Учитывая условие (9) и произвольность функции $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, отсюда и из (12) заключаем, что $\widehat{v_R}$ при $R\to\infty$ сходится в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$ распределений в $\mathbb{R}^{n-1}$ к функции

$$\int_{B_r} e^{i(\lambda,x')}\widehat{u}(\lambda,x_n)dxd\lambda.$$

С другой стороны, по теореме Планшереля имеем

$$\|\widehat{v_R}-\widehat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}=(2\pi)^{n/2}\|v_R-v\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Из этого равенства вытекает, что $\widehat{v_R}$ сходится при $R\to\infty$ к функции $\widehat{v}$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$. Сопоставляя это с тем, что было получено выше, приходим к равенству (6). Пусть теперь $1<p<2$. В этом случае функция u представима в виде $u=u_1+u_2$, где $u_1\in L^1(M_r)$, $u_2\in L^2(M_r)$. При этом

$$\widehat{u}(\lambda,x_n)=\widehat{u_1}(\lambda,x_n)+\widehat{u_2}(\lambda,x_n). \tag{17}$$

Определим функции v_1 и v_2 с помощью равенств (3) при $u=u_1$, u_2, соответственно. Тогда по уже доказанному $v_1\in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$, $v_2\in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ и $\widehat{v}=\widehat{v_1}+\widehat{v_2}$. Отсюда и из соотношения (17) получаем равенство (6) в общем случае. Далее, записывая интеграл в (6) в виде повторного, находим

$$\widehat{v}(\lambda)=\left(\frac{2\pi}{|\lambda|}\right)^{(n-1)/2}\int_{-r}^{r}\widehat{u}(\lambda,x_n)\int e^{i(\lambda,x')}\,dx'\,dx_n, \tag{18}$$

где внутренний интеграл вычисляется по шару

$$\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leqslant r^2 - x_n^2\}.$$

Используя формулу для преобразования Фурье индикатора шара (см. [7, теорема 4.15]), отсюда получаем утверждение леммы. □

Лемма 2. *Пусть $f \in L^p(H)$ для некоторого $p \in [1,2]$ и*

$$\int_{B_r} f(x+w)dx = 0 \tag{19}$$

для всех $r \in \mathcal{Z}_+(J_{n/2})$, $w \in \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > r\}$. Тогда существует функция $u \in C^\infty(H)$ такая, что $\triangle u + u = 0$ и $f = u$ в H почти всюду.

Доказательство. Пусть ψ – произвольная функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителем в шаре B_1. Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_H f(u)\psi(x+u)\,du, \quad x \in H_1 = \{x \in \mathbb{R}^1,\ x_n > 1\}. \tag{20}$$

Пусть $r \in \mathcal{Z}_+(J_{n/2})$, $z = (t_1, \ldots, t_{n-1}, y)$, где $t \in (t_1, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $y > r+1$. Из равенств (19) и (20) имеем

$$\int_H \int_{B_r} f(u)\psi(x+z+u)du\,dx =$$

$$= \int_{B_r} F(x_1+t_1, \ldots, x_{n-1}+t_{n-1}, x_n+y)\,dx = 0 \tag{21}$$

для всех $t \in (t_1, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $y > r+1$. Предположим, что $\mu \geq 0$ и $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$ связаны соотношением $\mu = |\lambda|$. Для краткости будем обозначать через $g_\lambda(x_n)$ преобразование Фурье функции $F(x', x_n)$ по переменной x'. Используя лемму 1, из равенства (21) получаем

$$\int_{-\nu_k}^{\nu_k} g_\lambda(x_n+y)\varphi_{k,\mu}(x_n)\,dx_n = 0 \tag{22}$$

для всех $k \in \mathbb{N}$, $y > \nu_k + 1$ и почти всех $\lambda \in \mathbb{R}^{n-1}$. Повторяя теперь рассуждения из доказательства теоремы 1 в работе [8], приходим к требуемому утверждению. □

4. Доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Поскольку носитель распределения не увеличивается при действии на это распределение дифференциального оператора, из равенства (1) следует, что $\operatorname{supp} f \subset H$. Выберем ненулевую функцию $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, для которой $\operatorname{supp} v \subset H$, где $v = f * \phi$. В силу определения свертки это можно сделать, выбирая функцию ϕ с носителем, содержащимся в шаре достаточно малого радиуса с центром в нуле. Полагая $w = u * \phi$, из равенства (1) делаем вывод, что

$$\Delta w + \lambda^2 w = v. \tag{23}$$

Покажем теперь, что всякий линейный непрерывный функционал Ψ на $L^p(H)$, аннулирующий индикаторы всех шаров в H с радиусами $r \in N_\lambda$, аннулирует v. По теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в пространстве $L^p(H)$ любой такой функционал имеет вид

$$\Psi(g) = \int_H g(x)f(x)dx, \ g \in L^p(H), \tag{24}$$

где $f \in L^q(H)$, $q = p/(p-1)$. Поскольку Ψ аннулирует индикаторы всех шаров в H с радиусами $r \in N_\lambda$, из (24) имеем

$$\int_B f(x)dx = 0 \tag{25}$$

для любого шара B с радиусом $r \in N_\lambda$, содержащегося в H. В силу эллиптичности оператора Δ и леммы 2 из условия (25) следует, что f почти всюду совпадает с вещественно-аналитической функцией на H, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta f + \lambda^2 f = 0 \ \text{ в } H. \tag{26}$$

Используя соотношения (23), (24) и (26), получаем

$$\Psi(v) = \int_H f(x)v(x)dx = \int_H f(x)(\Delta w + \lambda^2 w)(x)dx =$$

$$= \int_H w(x)(\Delta f + \lambda^2 f)(x)dx = 0,$$

как и утверждалось. Таким образом, свертка $\chi_A * \phi$ является пределом последовательности линейных комбинаций индикаторов шаров в H с радиусами $r \in N_\lambda$, сходящейся в пространстве $L^p(H)$. Но функция χ_A является пределом некоторой последовательности сверток $\{\chi_A * \phi_m\}_{m=1}^{\infty}$, сходящейся в $L^p(H)$. Поэтому из произвольности ϕ следует требуемое утверждение. □

Доказательство следствия 1. Докажем, что f представима в виде (1) для некоторого $u \in \mathcal{E}'(H)$. Из [9 , теорема 7.3.2] следует, что при указанном условии уравнение (1) разрешимо в пространстве $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Пусть K – выпуклая оболочка носителя функции f, тогда K содержится в H. Из (1) следует, что $\triangle u + \lambda^2 u = 0$ на открытом множестве $\mathbb{R}^n \setminus K$ для любого решения $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ уравнения (1). Из эллиптичности оператора $\triangle$ получаем, что u вещественно аналитична на $\mathbb{R}^n \setminus K$. Таким образом, носитель u содержится в H и требуемое утверждение доказано. □

Доказательство следствия 2. Из определения функции f следует, что $f \in L^p(H)$ (см. [7, теорема 1.3]). Докажем, что множество нулей преобразования Фурье функции f содержит сферу в $\mathbb{R}^n$ радиуса $\lambda > 0$ с центром в нуле. Из радиальности и интегрируемости функции v следует, что $\widehat{v}$ также радиальная функция, непрерывная на $\mathbb{R}^n$. Отсюда и из определения преобразования Фурье вытекает, что

$$\widehat{v}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} v(y)e^{-i(y,x)}dy = \int_{\mathbb{R}^n} v(-y)e^{-i(y,x)}dy = \overline{\widehat{v}(x)},$$

то есть функция $\widehat{v}$ вещественнозначна. Предположим, что $\widehat{v}$ не обращается в нуль в области $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Тогда $\widehat{v}$ сохраняет знак в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Следовательно, либо $\widehat{v} \geqslant 0$, либо $\widehat{v} \leqslant 0$ в $\mathbb{R}^n$. В силу условия 2) отсюда вытекает (см. [4, теорема 1.6.2]), что $\widehat{v} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Это означает, что для почти всех x имеет место формула обращения

$$v(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{v}(y) e^{i(y,x)} dy$$

(см. [4, теорема 1.6.2]). Из этой формулы следует, что $v = w$ почти всюду для некоторой функции $w \in C(\mathbb{R}^n)$. Это противоречит условию 3), поэтому $\widehat{v}(y) = 0$ для некоторого $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Полагая $\lambda = |y|$, отсюда и из радиальности $\widehat{v}$ заключаем, что $\widehat{v} = 0$ на сфере $|y| = \lambda$ в $\mathbb{R}^n$. В силу равенства $\widehat{f} = \widehat{u}\widehat{v}$ делаем вывод, что функция f удовлетворяет условиям следствия 1 и требуемое утверждение доказано. □

Доказательство следствия 3. Из условия и доказательства следствия 2 вытекает, что функция $f(x) = v(x-h)$ удовлетворяет условиям следствия 1. Отсюда и из следствия 1 имеем требуемое утверждение. □

Доказательство следствия 4. Из условия следует, что функция $v = \chi_A$ удовлетворяет условиям следствия 3 при любом $p \in [2, +\infty)$. Отсюда и из следствия 3 получаем требуемое утверждение. □

Доказательство теоремы 2. Достаточно доказать, что всякий линейный непрерывный функционал Ψ на $L^p(\mathcal{O})$, аннулирующий все функции $g_{\lambda,r}(x-h)$ указанного вида, аннулирует все пространство $L^p(\mathcal{O})$. По теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в пространстве $L^p(H)$ любой такой функционал имеет вид

$$\Psi(g) = \int_{\mathcal{O}} g(x) f(x) dx, \ g \in L^p(\mathcal{O}), \tag{27}$$

где $f \in L^q(\mathcal{O})$, $q = p/(p-1)$. Поскольку Ψ аннулирует указанные выше функции, получаем, что

$$f * g_{\lambda,r} = 0 \tag{28}$$

на области определения. Отсюда и из (2) вытекает, что

$$f * (\Delta g_{\lambda,r} + \lambda^2 g_{\lambda,r}) = f * \chi_r = 0 \tag{29}$$

для всех $r \in N_\lambda$. Из последнего равенства и леммы 2 заключаем, что в полупространстве H функция f совпадает почти всюду с вещественно аналитической функцией, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta f + \lambda^2 f = 0. \tag{30}$$

С другой стороны, из (28) вытекает, что

$$(\Delta f + \lambda^2 f) * g_{\lambda,r} = 0. \tag{31}$$

Тогда из теоремы единственности для решений уравнения свертки (см. [4, теорема 3.2.1]) получаем, что равенство (30) выполнено в смысле распределений на всем $\mathcal{O}$.

В силу эллиптичности оператора Δ отсюда следует, что f совпадает почти всюду в $\mathcal{O}$ с вещественно аналитической функцией. Кроме того, имеет место равенство

$$(f * g_{\lambda,r})(x) = 2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\widetilde{g_{\lambda,r}}(\lambda)f(x), \tag{32}$$

где функция $\widetilde{g_{\lambda,r}}$ задается равенством

$$\widetilde{g_{\lambda,r}}(z) = \int_{B_r} g_{\lambda,r}(x)\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(z|x|)dx \tag{33}$$

и $\mathbf{I}_\nu(z) = J_\nu(z)z^{-\nu}$(см. [4, формула (1.7.9)]). Из определения $\widetilde{g_{\lambda,r}}$ и $\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}$ имеем

$$\widetilde{g_{\lambda,r}}(\lambda) = \frac{1}{\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r)}\int_{B_r}\left(\mathbf{I}\frac{n}{2}-1(\lambda|x|)\right)^2 dx - \int_{B_r}\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)dx. \tag{34}$$

Поскольку функция $\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(\lambda|x|)$ принадлежит классу $V_r(\mathbb{R}^n)$ (см., например, [4, лемма 2.1.1]), второй интеграл в правой части равенства (34) равен нулю. Учитывая, что первый интеграл в (34) положителен, отсюда заключаем, что $\widetilde{g_{\lambda,r}}(\lambda) \neq 0$. Теперь равенства (32) и (28) показывают, что $f = 0$ в $\mathcal{O}$. Таким образом, $\Psi(g) = 0$ для всех $g \in L^p(\mathcal{O})$ и теорема 2 доказана. $\square$

1. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 346 с.
2. *Edwards R.E.* Fourier series a modern introduction. – New York: Springer. – 1982. – 514 p.
3. *Loomis L.H.* An introduction to abstrtact harmonic analysis. – New Jersey.: Princeton. – 1953. – 321 p.
4. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer, 2003. – 454 p.
5. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – London: Springer, 2009. – 671 p.
6. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces, – Basel.: Birkhäuser, 2013. – 592 p.
7. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: – Мир, 1974. – 523 с.
8. *Очаковская О.А.* Теоремы о шаровых средних для решений уравнения Гельмгольца на неограниченных областях // Изв. РАН. Сер. матем. – 2012. – Т. 76. – № 2. – С. 161–170
9. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. – Т. 1. – М.: Мир, 1986. – 462 с.

O. A. Ochakovskaya

Approximation in L^p by linear combinations of indicators of balls.

We investigate an approximation of functions on subsets of $\mathbb{R}^n$ in the space L^p with $2 \leqslant p < \infty$ by linear combinations of indicator of balls. We consider the case where the radii of balls are proportional to positive zeros of the Bessel function.

Keywords: *Wiener's approxomation theorem, approximation by shifts.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
ochakovskaja@yandex.ua

Получено 30.04.14