УДК 517.55

©2014. **Ю. С. Коломойцев, Т. В. Ломако**

О ПРИБЛИЖЕНИИ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ В L_p, $0<p<1$

В настоящей работе получены обобщения на случай дробных производных известных результатов о приближении производных функций целого порядка в пространствах L_p, $0<p<1$.

Ключевые слова: *дробная производная, тригонометрический полином, пространства* L_p, $0<p<1$.

1. Введение. Пусть A – вещественная ось $\mathbb{R}$, единичная окружность $\mathbb{T}$, реализованная как отрезок $[0,2\pi]$ с отождествленными концами, или конечный отрезок. Через $L_p=L_p(A)$, $0<p<\infty$, обозначим пространство измеримых функций f таких, что

$$\|f\|_{L_p(A)}=\left(\int_A|f(x)|^pdx\right)^{\frac1p}<\infty,$$

а при $p=\infty$ полагаем $L_\infty(A)=C(A)$ с нормой $\|f\|_{L_\infty(A)}=\sup_{x\in A}|f(x)|$.

В пространствах L_p при $p\ge 1$ хорошо известен следующий факт: *если последовательность функций* $\{\varphi_N\}_{N=1}^\infty\subset L_p$ *такова, что* $\varphi_N^{(r-1)}\in AC_{loc}$, $N\in\mathbb{N}$, *и для двух функций* $f,g\in L_p$

$$\|f-\varphi_N\|_{L_p(A)}+\|g-\varphi_N^{(r)}\|_{L_p(A)}\to 0 \quad \textit{при} \quad N\to\infty,$$

то (в обобщенном смысле) $g=f^{(r)}$ (см. [1, гл. 4]).

При $0<p<1$ данное свойство уже не выполняется. В частности, в [2] было показано, что для функции $f_0(x)=x$ найдется последовательность функций $\varphi_N\in AC[0,1]$ таких, что φ_N сходятся к f_0 в $L_p[0,1]$, но $\|\varphi_N'\|_{L_p[0,1]}\to 0$ при $N\to\infty$.

Однако при некоторых дополнительных условиях на скорость сходимости мы можем утверждать, что $g=f'$ (см. [2]).

Теорема A. *Пусть* $f\in L_p(\mathbb{T})$ *и* T_N *– такая последовательность тригонометрических полиномов порядка не выше* N, *что*

$$\|f-T_N\|_{L_p(\mathbb{T})}=o\left(\frac1N\right) \quad \textit{и} \quad \|g-T_N'\|_{L_p(\mathbb{T})}=o(1) \quad \textit{при} \qquad N\to\infty.$$

Тогда

$$\left\|\frac1h(f(\cdot+h)-f(\cdot))-g(\cdot)\right\|_{L_p(\mathbb{T})}\to 0 \quad \textit{при} \quad h\to 0,$$

т.е. g *совпадает с* L_p*-производной функции* f.

Аналогичный результат имеет место также для производных любого целого порядка (см. следствие 2.4 в [2]).

Цель настоящей работы – получить аналог теоремы A в случае производных дробного порядка.

2. Основные определения и предварительные замечания. Далее, если f измеримая 2π-периодическая функция, то $\|f\|_p = \|f\|_{L_p(\mathbb{T})}$.

Модулем гладкости функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p \le \infty$, порядка $\beta > 0$ и шага $h > 0$ называют величину

$$\omega_\beta(f,h)_p = \sup_{|\delta|<h} \|\Delta_\delta^\beta f\|_p,$$

где

$$\Delta_\delta^\beta f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\beta}{\nu} (-1)^\nu f(x+\nu),$$

$\binom{\beta}{\nu} = \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-\nu+1)}{\nu!}$, $\quad \binom{\beta}{0} = 1$.

Далее $\mathcal{T}_N$ – множество тригонометрических полиномов порядка не выше N. Как обычно, величину наилучшего приближения функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше N в метрике пространства L_p обозначим через

$$E_N(f)_p = \inf_{T \in \mathcal{T}_N} \|f - T\|_p.$$

Будем говорить, что полином $T_N \in \mathcal{T}_N$ является полиномом наилучшего приближения функции f в пространстве $L_p(\mathbb{T})$, если $\|f - T_N\|_p = E_N(f)_p$.

Напомним, что для каждой функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p \le \infty$, и $r, N \in \mathbb{N}$ имеет место следующая оценка для величины наилучшего приближения функции $f \in L_p(\mathbb{T})$

$$E_N(f)_p \le C\omega_r\left(f, \frac{1}{N}\right)_p, \tag{1}$$

где C – некоторая положительная константа, не зависящая от f и N. Неравенство (1) называют неравенством типа Джексона. При $0 < p < 1$ данное неравенство было получено в [3] (см. также [4] и [5]), а по поводу случая $p \ge 1$ см. [6, гл. 7].

Напомним еще, что если $T_N \in \mathcal{T}_N$ является полиномом наилучшего приближения функции f в пространстве $L_p(\mathbb{T})$, то

$$\|T_N^{(r)}\|_p \le CN^r\omega_r\left(f, \frac{1}{N}\right)_p, \tag{2}$$

где C – некоторая положительная константа, не зависящая от f и T_N (см., напр., [7]).

Основным объектом настоящей работы является производная дробного порядка в смысле пространства L_p. Будем говорить, что для функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, определена производная порядка $\alpha > 0$ в смысле L_p, если найдется функция $g \in L_p(\mathbb{T})$ такая, что

$$\left\| \frac{\Delta_h^\alpha f}{h^\alpha} - g \right\|_p \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0. \tag{3}$$

В этом случае мы пишем $g = f^{(\alpha)}$.

Отметим, что если $f \in L_1(\mathbb{T})$, то $f^{(\alpha)}$ по сути совпадает с дробной производной Вейля, которая определяется следующим образом:

$$f^{(\alpha)}(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik)^\alpha \widehat{f}_k e^{ikx}, \quad (ik)^\alpha = |k| e^{\frac{i\pi\alpha}{2}\mathrm{sign} k},$$

где $\widehat{f}_k$ – коэффициенты Фурье функции f (см. [8]).

Далее всюду C – положительные константы, не зависящие от функции f и полинома T_N.

3. Формулировка результатов. Следующая теорема является основным результатом.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, $\alpha \in \mathbb{N} \cup (\frac{1}{p} - 1, \infty)$ и T_N – такая последовательность тригонометрических полиномов порядка не выше N, что*

$$\|f - T_N\|_p = o\left(\frac{1}{N^\alpha}\right) \quad \text{и} \quad \|g - T_N^{(\alpha)}\|_p = o(1) \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Тогда $f^{(\alpha)} = g$, т.е. g удовлетворяет соотношению (3).

В следующем предложении показана точность условий теоремы 1.

Предложение 1. *Пусть $0 < p < 1$. Тогда для каждого $\alpha \in \mathbb{N} \cup (1/p - 1, \infty)$ найдутся функция $f_\alpha \in L_p(\mathbb{T})$ и последовательность полиномов $T_{N,\alpha} \in \mathcal{T}_N$ такие, что $f_\alpha^{(\alpha)}(x) \equiv 1$ на $[0, 2\pi)$,*

$$\|f_\alpha - T_{N,\alpha}\|_p \asymp \frac{1}{N^\alpha}, \quad \text{но} \quad \|T_{N,\alpha}^{(\alpha)}\|_p \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Используя теорему 1, мы получаем следующий результат, который является обобщением теоремы 5 работы [4] на случай дробных производных.

Теорема 2. *Пусть $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, $T_N \in \mathcal{T}_N$ – полином наилучшего приближения функции f в L_p и при некотором $\alpha \in \mathbb{N} \cup (\frac{1}{p} - 1, \infty)$ выполняется условие*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha p - 1} E_k(f)_p^p < \infty.$$

Тогда функция f имеет производную $f^{(\alpha)}$ в смысле L_p и для каждого $N \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\|f^{(\alpha)} - T_N^{(\alpha)}\|_p \le C \left\{ N^\alpha E_N(f)_p + \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} k^{\alpha p - 1} E_k(f)_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\},$$

где C – некоторая абсолютная константа, не зависящая от f и T_N.

Из теоремы 1 и неравенства типа Джексона (1) стандартным образом вытекают следующие оценки приближения дробных производных функции $f \in L_p(\mathbb{T})$ через модуль гладкости произвольного порядка.

Следствие 1. *Пусть $f \in L_p(\mathbb{T})$, $0 < p < 1$, $T_N \in \mathcal{T}_N$ – полином наилучшего приближения функции f в L_p и при некотором $\alpha \in \mathbb{N} \cup (\frac{1}{p} - 1, \infty)$ и $r \in \mathbb{N}$ выполняется условие*

$$\int_0^1 \left(\frac{\omega_r(f,t)}{t^\alpha} \right)^p \frac{dt}{t} < \infty.$$

Тогда функция f имеет производную $f^{(\alpha)}$ в смысле L_p и для каждого $N \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\|f^{(\alpha)} - T_N^{(\alpha)}\|_p \le C \left(\int_0^{1/N} \left(\frac{\omega_r(f,t)}{t^\alpha} \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}},$$

где C – некоторая абсолютная константа, не зависящая от f и T_N.

4. Вспомогательные утверждения. Отметим, что вопросы, связанные с исследованием производных (особенно дробных производных) в пространствах L_p, $0 < p < 1$, по существу отличается от исследования аналогичных вопросов в пространствах L_p, $p \ge 1$. Приведем здесь один из характерных результатов в данном направлении (см. [9]).

Лемма 1. *Пусть $0 < p < 1$. Тогда*

$$\sup_{\|T_n\|_p \le 1} \|T_n^{(\beta)}\|_p \asymp \begin{cases} n^\beta, & \beta \in \mathbb{Z}_+ \text{ или } \beta \notin \mathbb{Z}_+ \text{ и } \beta > \frac{1}{p} - 1; \\ n^{\frac{1}{p}-1}, & \beta \notin \mathbb{Z}_+ \text{ и } \beta < \frac{1}{p} - 1; \\ n^{\frac{1}{p}-1} \log^{\frac{1}{p}} n, & \beta = \frac{1}{p} - 1 \notin \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

($\asymp$ – двусторонние неравенства с положительными константами, зависящими только от p и β).

Для формулировки следующих двух лемм нам понадобится понятие преобразования Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$, которое обычно определяют следующим образом:

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-iyx} dx.$$

Лемма 2. (См. [10, 4.1.1]). *Пусть $0 < p \le 1$, функция $\phi \in C(\mathbb{R})$ имеет компактный носитель и $\widehat{\phi} \in L_p(\mathbb{R})$. Тогда*

$$\sup_{h>0} h^{1-\frac{1}{p}} \|\Phi_h\|_{L_p(\mathbb{T})} = \sqrt{2\pi} \|\widehat{\phi}\|_{L_p(\mathbb{R})},$$

где

$$\Phi_h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi(hk)\, e^{ikx}.$$

Доказательство следующей леммы при $p = 1$ см. в [11], а общий случай в [12].

Лемма 3. *Пусть* $0 < p < 2$, $1 < q, r \le \infty$, $s > \frac{1}{p} - 1 + \frac{1}{r}$, $s \in \mathbb{N}$, *а функция* f *непрерывна и такова, что* $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, $f \in L_1(\mathbb{R})$, $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$. *Предположим, что*

$$\frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{r} > \frac{1}{2}, \quad \theta = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right).$$

Тогда

$$\|\widehat{f}\|_{L_p(\mathbb{R})} \le C\|f\|^{1-\theta}_{L_q(\mathbb{R})}\|f^{(s)}\|^{\theta}_{L_r(\mathbb{R})}.$$

Приведенную ниже вспомогательную лемму можно доказать стандартным образом (см., напр., [13]), а также доказательство теоремы 2.

Лемма 4. *Пусть* $f \in L_1(\mathbb{T})$, $\gamma > \alpha > 0$ *и* T_N *– такая последовательность полиномов, что*

$$\|f - T_{2^N}\|_1 = O(2^{-\gamma N}) \quad \textit{при} \quad N \to \infty.$$

Тогда $f^{(\alpha)} \in L_1(\mathbb{T})$ *и*

$$\|f^{(\alpha)} - T^{(\alpha)}_{2^N}\|_1 = O(2^{-(\gamma-\alpha)N}) \quad \textit{при} \quad N \to \infty.$$

5. Доказательство теоремы 1. Для произвольного достаточно малого $\varepsilon > 0$ выберем $n_0 = n_0(\varepsilon)$ так, чтобы при $n \ge n_0$

$$\|f - T_n\|_p \le \frac{\varepsilon}{n^\alpha} \quad \text{и} \quad \|g - T^{(\alpha)}_n\|_p \le \varepsilon \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Тогда для h, удовлетворяющего неравенствам $\frac{\varepsilon^\lambda}{n} \le h \le \frac{2\varepsilon^\lambda}{n}$, где $0 < \lambda < \frac{1}{\alpha}$, имеем

$$\left\|\frac{\Delta^\alpha_h f}{h^\alpha} - \frac{\Delta^\alpha_h T_n}{h^\alpha}\right\|_p = \left\|\frac{\Delta^\alpha_h (f - T_n)}{h^\alpha}\right\|_p \le C\left(\frac{n}{\varepsilon^\lambda}\right)^\alpha \|f - T_n\|_p \le C\varepsilon^{1-\lambda\alpha}. \tag{5}$$

При выводе данного неравенства мы воспользовались тем фактом, что

$$\binom{\alpha}{k} = O\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}}\right), \quad k \to \infty,$$

(см., напр., [14, гл.1, §1]).

Обозначим

$$T_{n,h,\alpha}(t) = \frac{\Delta^\alpha_h T_n(t)}{h^\alpha} - T^{(\alpha)}_n(t). \tag{6}$$

Легко видеть (далее всюду мы используем главную ветвь логарифма), что

$$T_{n,h,\alpha}(t) = \sum_{k=-n}^{n} (ik)^\alpha \left(\left(\frac{1 - e^{ikh}}{ikh}\right)^\alpha - 1\right) c_k e^{ikt},$$

где $\{c_k\}$ – коэффициенты полинома T_n.

Заметим также, что
$$T_{n,h,\alpha}(t) = (K_{h,\alpha} * T_n^{(\alpha)})(t),$$
где
$$K_{h,\alpha}(t) = \sum_k g_{\alpha,\varepsilon}(hk)e^{ikt},$$
$$g_{\alpha,\varepsilon}(x) = \left(\left(\frac{1-e^{ix}}{ix}\right)^\alpha - 1\right)\varphi\left(\frac{x}{2\varepsilon^\lambda}\right),$$
а функция φ принадлежит $C^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(x) = 1$ при $|x| \le 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $|x| \ge 2$.

Рассматривая $K_{n,\alpha}(x)T_n^{(\alpha)}(t-x)$ как тригонометрический полином порядка не выше $5n$ от переменной x и применяя неравенство Никольского разных метрик
$$\|T_N\|_1 \le CN^{\frac1p - 1}\|T_N\|_p, \quad T_N \in \mathcal{T}_N,$$
(см., напр., [6, гл. 4, §2]), находим
$$|T_{n,h,\alpha}(t)|^p \le Cn^{1-p}\int_{\mathbb{T}} |K_{h,\alpha}(x)T_n^{(\alpha)}(t-x)|^p dx.$$
Интегрируя верхнее неравенство по t и применяя теорему Фубини, имеем
$$\|T_{n,h,\alpha}\|_p \le Cn^{\frac1p - 1}\|K_{h,\alpha}\|_p\|T_n^{(\alpha)}\|_p.$$
Далее, используя лемму 2, получаем, что
$$n^{\frac1p - 1}\|K_{h,\alpha}\|_p \le C\varepsilon^{\lambda(\frac1p - 1)}h^{1-\frac1p}\|K_{h,\alpha}\|_p \le C\varepsilon^{\lambda(\frac1p-1)}\|\widehat{g}_{\alpha,\varepsilon}\|_{L_p(\mathbb{R})}. \tag{7}$$

Выполняя простые вычисления, получаем, что
$$\|g_{\alpha,\varepsilon}\|_{L_q(\mathbb{R})} \le C\varepsilon^{\frac{\lambda}{q}} \quad \text{и} \quad \|g_{\alpha,\varepsilon}^{(s)}\|_{L_r(\mathbb{R})} \le C\varepsilon^{\frac{\lambda}{r} - \lambda s}.$$
Таким образом, используя лемму 3, находим
$$\|\widehat{g}_{\alpha,\varepsilon}\|_{L_p(\mathbb{R})} \le C\varepsilon^{\lambda((1-\theta)\frac1q + \theta\frac1r - (\frac1p - \frac12))}. \tag{8}$$
Следовательно, из (7) и (8) имеем
$$n^{\frac1p - 1}\|K_{h,\varepsilon}\|_p \le C\varepsilon^{\lambda((1-\theta)\frac1q + \theta\frac1r - \frac12)} = C\varepsilon^\gamma, \tag{9}$$
где $\gamma > 0$.

Откуда, в силу (6) и (9) получаем, что
$$\left\|\frac{\Delta_h^\alpha T_n}{h^\alpha} - T_n^{(\alpha)}\right\|_p \le C\varepsilon^\gamma\|T_n^{(\alpha)}\|_p. \tag{10}$$

Объединяя неравенства (4), (5) и (10) и учитывая, что $\|T_n^{(\alpha)}\|_p \le 2\|g\|_p$ при достаточно больших n, получаем, что

$$\left\|\frac{\Delta_h^\alpha f}{h^\alpha} - g\right\|_p \le C(\varepsilon^{1-\lambda\alpha} + \varepsilon^{\lambda\gamma}\|g\|_p + \varepsilon).$$

Из последнего соотношения сразу следует, что $f^{(\alpha)} = g$ в смысле (3).

6. Доказательство предложения 1. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Положим $f_r(x) = x^r$ на $[0, 2\pi)$ и $f_r(x + 2\pi) = f_r(x)$ для остальных значений переменной x.

Пусть

$$g_{n,r}(x) = \begin{cases} \frac{k}{n}x^{r-1}, & \frac{1}{n} \le x < \frac{k+1}{n} - \frac{1}{n^{r+1}}; \\ \frac{k}{n}x^{r-1} + x^{r-1}\left(x - \frac{k+1}{n} + \frac{1}{n^{r+1}}\right)n, & \frac{k+1}{n} - \frac{1}{n^{r+1}} \le x < \frac{k+1}{n}. \end{cases}$$

Положим также $\varphi_{n,r}(x) = g_{n,r}(\frac{x}{2\pi})$ при $x \in [0, 2\pi)$ и $\varphi_{n,r}(x) = \varphi_{n,r}(x+2\pi)$ для других значений переменной x.

В дальнейшем нам понадобится тот факт, что для любого $0 < p < \infty$

$$\omega_r(\varphi_{n,r}, 1/n)_p \le Cn^{-r}\|\varphi_{n,r}^{(r)}\|_p \le Cn^{-r-\frac{1}{p}+1}. \tag{11}$$

По поводу первого неравенства см. работу [15], а второе неравенство можно проверить простыми вычислениями. Заметим также, что

$$\|f_r - \varphi_{n,r}\|_1 = O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Обозначим через $T_{n,r}$ полином наилучшего приближения функции $\varphi_{n,r}$ в метрике пространства L_p, $0 < p < 1$.

Используя неравенство Гельдера, (1) и (11), находим

$$\begin{aligned} \|f_r - T_{n,r}\|_p \le C\|f_r - T_{n,r}\|_1 \le C(\|f_r - \varphi_{n,r}\|_1 + \|\varphi_{n,r} - T_{n,r}\|_1) \le \\ \le C(n^{-r} + \omega_r(\varphi_{n,r}, 1/n)_1) \le Cn^{-r}. \end{aligned} \tag{12}$$

В то же время, учитывая (2) и (11), имеем

$$\|T_{n,r}^{(r)}\|_p \le Cn^r\omega_r(\varphi_{n,r}, 1/n)_p \le Cn^{1-\frac{1}{p}}. \tag{13}$$

Таким образом, мы доказали предложение 1 при $\alpha = r \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь $\alpha \notin \mathbb{N}$. Выберем $r \in \mathbb{N}$ так, чтобы $r > \alpha$ и положим $f_\alpha = f_r^{(r-\alpha)}$, а $T_{n,\alpha} = T_{n,r}^{(r-\alpha)}$.

Тогда, используя неравенство Гельдера, лемму 4, а также неравенства (12) и (13), мы получаем, что

$$\|f_\alpha - T_{2^k,\alpha}\|_p \le C\|f_\alpha - T_{2^k,\alpha}\|_1 \le 2^{-\alpha k} \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

и

$$\|T_{2^k,\alpha}^{(\alpha)}\|_p = C\|T_{2^k,r}^{(r)}\|_p \le C2^{k(1-\frac{1}{p})}.$$

Из последнего неравенства сразу вытекает доказательство предложения 1.

7. Доказательство теоремы 2. Используя лемму 1, получаем, что для произвольного $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ имеют место следующие неравенства:

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \|T_{2^k}^{(\alpha)} - T_{2^{k-1}}^{(\alpha)}\|_p^p \le C \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{\alpha p k} \|T_{2^k} - T_{2^{k-1}}\|_p^p \le$$

$$\le C \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{\alpha p k} E_{2^{k-1}}(f)_p^p \le C \sum_{k=2^m}^{\infty} k^{\alpha p - 1} E_k(f)_p^p. \tag{14}$$

Следовательно, последовательность $\{T_N^{(\alpha)}\}$ является фундаментальной в L_p. Таким образом, найдется функция $g \in L_p$ такая, что $T_N^{(\alpha)} \to g$. Учитывая еще, что $E_{2^k}(f)_p = o(2^{-\alpha k})$, а также применяя теорему 1, мы получаем, что $g = f^{(\alpha)}$ в смысле пространства L_p.

Далее, пусть m таково, что $2^{m-1} \le N < 2^m$. В силу представления в L_p

$$f^{(\alpha)} = T_{2^m}^{(\alpha)} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \left(T_{2^k}^{(\alpha)} - T_{2^{k-1}}^{(\alpha)} \right),$$

а также в силу леммы 1 и (14), получаем

$$\|f^{(\alpha)} - T_N^{(\alpha)}\|_p^p \le \|T_{2^m}^{(\alpha)} - T_N^{(\alpha)}\|_p^p + \sum_{k=m+1}^{\infty} \|T_{2^k}^{(\alpha)} - T_{2^{k-1}}^{(\alpha)}\|_p^p \le$$

$$\le C \left\{ N^{\alpha p} E_N(f)_p^p + \sum_{k=N+1}^{\infty} k^{\alpha p - 1} E_k(f)_p^p \right\}.$$

Теорема 2 доказана.

1. *Никольский С.М.* Приближения функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука. – 1969.
2. *Ditzian Z., Tikhonov S.* Moduli of smoothness of functions and their derivatives // Studia Math. – 2007. – Vol. 180, no. 2. – P. 143–160.
3. *Стороженко Э.А., Освальд П.* Теорема Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^k)$, $0 < p < 1$ // Сиб. матем. журн. – 1978. – Т. 19, № 4. – С. 888–90.
4. *Иванов В.И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Матем. заметки. – 1975. – Т. 18, № 5. – С. 641–658.
5. *Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Матем. сб. – 1975. – Т. 98, № 3. – С. 395–415.
6. *DeVore R.A., Lorentz G.G.* Constructive Approximation. – Springer-Verlag. New York. – 1993. – 449 p.
7. *Ditzian Z., Hristov V., Ivanov K.* Moduli of smoothness and K-functional in L_p, $0 < p < 1$ // Constr. Approx. – 1995. – Vol. 11. – P. 67–83.
8. *Butzer P.L., Westphal U.* An Access to Fractional Differentiation via Fractional Difference Quotients. – P. 116–145, Lecture Notes in Math 457. – Berlin: Springer. – 1975.
9. *Belinsky E., Liflyand E.* Approximation properties in L_p, $0 < p < 1$ // Funct. et Approx. – 1993. – Vol. 22. – P. 189–199.

10. *Trigub R.M., Belinsky E.S.* Fourier Analysis and Approximation of Functions. – Kluwer–Springer. – 2004.
11. *Коломойцев Ю.С.* Мультипликативные достаточные условия для мультипликаторов Фурье // Изв. РАН. Сер. матем. – 2014. – Т. 78, № 2. – С. 145–166.
12. *Коломойцев Ю.С.* О классе функций представимых в виде интеграла Фурье // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – Т. 25. – С. 125–132.
13. *Butzer P.L., Dyckhoff H., Gorlich E., Stens R.L.* Best trigonometric approximation, fractional order derivatives and Lipschitz classes // Canad. J. Math. – 1977. – Vol. 29, no. 4. – P. 781–793.
14. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника. – 1987.
15. *Kopotun K.A.* On equivalence of moduli of smoothness of splines in L_p, $0 < p < 1$ // J. Approx. Theory. – 2006. – Vol. 143, no. 1. – P. 36–43.

Yu. S. Kolomoitsev, T. V. Lomako

On approximation of fractional derivatives of functions by trigonometric polynomials in L_p, $0 < p < 1$.

In this paper we obtain a generalization to the case of fractional derivatives of known results on the approximation of the integer order derivatives for functions in the spaces L_p, $0 < p < 1$.

Keywords: *fractional derivative, trigonometric polynomial, spaces L_p, $0 < p < 1$.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`kolomus1@mail.ru`
`tlomako@yandex.ru`
Получено 25.05.14