УДК 531.39, 517.977

©2014. **А. Л. Зуев, Ю. В. Новикова**

СТАБИЛИЗАЦИЯ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ КИРХГОФА С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО СОСТОЯНИЮ

Рассмотрена бесконечная система дифференциальных уравнений, которая описывает колебания пластины Кирхгофа. Для данной системы построены функционалы управления с обратной связью, зависящие от обобщенных скоростей. Доказана теорема о частичной асимптотической устойчивости положения равновесия системы с обратной связью.

Ключевые слова: *асимптотическая устойчивость, пластина Кирхгофа, управление с обратной связью.*

1. Введение. В современной теории управления системами с распределенными параметрами важное место занимают задачи стабилизации движения упругих механических объектов [1]. Прикладной интерес к этой проблеме вызван необходимостью синтеза законов управления для космических систем с деформируемыми элементами [2, 3] и роботов-манипуляторов с упругими звеньями [4].

Целью данной работы является синтез управления с обратной связью для модели колебаний упругой пластины, а также доказательство асимптотической устойчивости тривиального решения соответствующей линейной системы с использованием построенного управления.

2. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений, которая описывает колебания упругой пластины Кирхгофа, прикрепленной к вращающемуся твердому телу [5, 6]:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{kj} = \beta_{kj}\eta_{kj}, \\ \dot{\eta}_{kj} = -\beta_{kj}\xi_{kj} + \varphi_{kj}u_1 + g_{kj}u_2, \end{cases} \qquad (k,j) \in \mathbb{N}^2, \tag{1}$$

где $\xi_{kj}(t)$ и $\eta_{kj}(t)$ – модальная координата и скорость, соответствующие моде колебаний с индексами (k,j), $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – управления, соответствующие угловому ускорению тела-носителя. Коэффициенты уравнений (1) связаны с параметрами механической системы посредством соотношений:

$$\beta_{kj} = \alpha\left(\left(\frac{\pi k}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi j}{l_2}\right)^2\right), \tag{2}$$

$$\varphi_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{для четного } k, \\ \dfrac{2l_2\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 kj}, & \text{для нечетного } k, \text{ четного } j, \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}(2a_2 - l_2)}{\pi^2 kj}, & \text{для нечетного } k, \text{ нечетного } j, \end{cases}$$

$$g_{kj} = \begin{cases} \dfrac{-2l_1\sqrt{l_1 l_2}}{\pi^2 kj}, & \text{для четного } k, \text{ нечетного } j, \\ 0, & \text{для четного } j, \\ \dfrac{2\sqrt{l_1 l_2}(l_1 - 2a_1)}{\pi^2 kj}, & \text{для нечетного } k, \text{ нечетного } j. \end{cases}$$

Физический смысл фазовых переменных и положительных параметров α, l_1, l_2, a_1, a_2 поясняется в статьях [5, 6]. Предположим, что $2a_1 \neq l_1$ и $2a_2 \neq l_2$.

Пусть задано взаимно-однозначное соответствие $(k, j) \longmapsto n(k, j)$ между множествами $\mathbb{N}^2$ и $\mathbb{N}$. Всюду в дальнейшем будем отождествлять обозначения величин с двойным индексом (k, j) и соответствующим одинарным индексом n, т.е. $\xi_n = \xi_{kj}$, $\eta_n = \eta_{kj}$, $\beta_n = \beta_{kj}$, $\varphi_n = \varphi_{kj}$, $g_n = g_{kj}$ при $n = n(k, j)$.

Запишем систему (1) в операторном виде:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \ell^2, \quad u \in \mathbb{R}^2, \tag{3}$$

где

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \xi_2 \\ \eta_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots \\ 0 & A_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \; u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix},$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & \beta_n \\ -\beta_n & 0 \end{pmatrix}, \; B_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi_n & g_n \end{pmatrix}, \; n = 1, 2, \dots .$$

В гильбертовом пространстве ℓ^2 для векторов $x = \begin{pmatrix} \xi_1, & \eta_1, & \xi_2, & \eta_2, & \dots \end{pmatrix}^T$ и $\overline{x} = \begin{pmatrix} \overline{\xi}_1, & \overline{\eta}_1, & \overline{\xi}_2, & \overline{\eta}_2, & \dots \end{pmatrix}^T$ вводится скалярное произведение стандартным образом:

$$\langle x, \overline{x} \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_n \overline{\xi}_n + \eta_n \overline{\eta}_n \right).$$

Построим для системы (3) управление с обратной связью $u = v(x)$, которое обеспечивает частичную асимптотическую устойчивость ее тривиального решения. Для этого рассмотрим функционал $V : \ell^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$V(x) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \left(\xi_n^2 + \eta_n^2 \right), \tag{4}$$

где $S = \{ n \mid \varphi_n^2 + g_n^2 = 0 \}$.

Запишем производную функционала V в силу системы (3):

$$\dot{V} = 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \left(\xi_n \dot{\xi}_n + \eta_n \dot{\eta}_n \right) = 2u_1 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \eta_n \varphi_n \right) + 2u_2 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \eta_n g_n \right).$$

Определим функции управления с обратной связью следующим образом:

$$v_1(x) = -\frac{k_1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\varphi_n\eta_n, \qquad v_2(x) = -\frac{k_2}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty} g_n\eta_n, \qquad (k_1 \geq 0,\ k_2 \geq 0). \tag{5}$$

Тогда производная V в силу системы (3) с $u_1 = v_1(x), u_2 = v_2(x)$ запишется в виде

$$\dot{V} = -k_1\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\varphi_n\eta_n\right)^2 - k_2\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty} g_n\eta_n\right)^2 \leq 0.$$

3. Теорема об асимптотической устойчивости. Запишем систему (3) с управлением $u = v(x)$ в виде

$$\dot{x} = Fx, \quad x(0) = x_0 \in \ell^2, \tag{6}$$

где $F = A + BK$ с $K = -\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & k_1\varphi_1 & 0 & k_1\varphi_2 & \dots \\ 0 & k_2 g_1 & 0 & k_2 g_2 & \dots \end{pmatrix}$.

Оператор F является инфинитезимальным генератором C_0-полугруппы линейных ограниченных операторов $\{e^{tF}\}_{t\geq 0}$ в ℓ^2 на основании теоремы Люмера–Филлипса [7].

Рассмотрим непрерывный функционал

$$y(x) = \left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\left(\xi_n^2 + \eta_n^2\right)\right)^{1/2} \tag{7}$$

в пространстве ℓ^2.

Приведем определение об асимптотической устойчивости особой точки по отношению к функционалу y из [8].

Определение. Решение $x = 0$ уравнения (6) называется асимптотически устойчивым по отношению к функционалу y, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всякого решения $x(t)$ задачи (6) с $\|x_0\| < \delta$ выполнены свойства:

$$y(x(t)) < \varepsilon \text{ при всех } t \geq 0, \tag{8}$$

$$\lim_{t\to+\infty} y(x(t)) = 0. \tag{9}$$

Сформулируем теорему 2 из [8] для случая частичной асимптотической устойчивости C_0-полугруппы линейных операторов следующим образом.

Теорема 1. *[8] Пусть F – инфинитезимальный генератор непрерывной C_0-полугруппы $\{e^{tF}\}_{t\geq 0}$ линейных ограниченных операторов в ℓ^2 и пусть $y: \ell^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ – непрерывный функционал. Предположим, что существует дифференцируемый по Фреше функционал $V: \ell^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим*

условиям:
1) для некоторых функций $\alpha_1(\cdot)$, $\alpha_2(\cdot) \in \mathcal{K}$ выполнено неравенство

$$\alpha_1(y(x)) \le V(x) \le \alpha_2(\|x\|) \quad \text{для всех} \quad x \in \ell^2,$$

где класс $\mathcal{K}$ состоит из всех непрерывных строго возрастающих функций $\alpha : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, обладающих свойством $\alpha(0) = 0$;
2) $\dot{V}(x) \le 0$ при всех $x \in D(F)$;
3) существует такое $\delta > 0$, что при любом $\|x_0\| < \delta$ соответствующее множество

$$\bigcup_{t\ge 0}\{e^{tF}x_0\}$$

предкомпактно в ℓ^2;
4) множество $\operatorname{Ker}\, y = \{x \in \ell^2 \mid y(x) = 0\}$ инвариантно для (6), т.е. если $y(e^{\tau F}x_0) = 0$, $\tau \ge 0$, то $y(e^{tF}x_0) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$;
5) множество

$$M = \overline{\{x \in D(F) \mid \dot{V}(x) = 0\}} \backslash \operatorname{Ker}\, y$$

не содержит целых полутраекторий системы (6), определенных для $t \in \mathbb{R}^+$.
Тогда особая точка $x = 0$ дифференциального уравнения (6) асимптотически устойчива по отношению к y.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$. Тогда управления с обратной связью $u_1 = v_1(x)$ и $u_2 = v_2(x)$, представленные в виде (5), обеспечивают асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (3) по отношению к функционалу y вида (7).*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся Теоремой 1.

Условие 1) выполнено, поскольку

$$y(x) \le V(x) = \|x\|^2, \qquad \forall x \in \ell^2.$$

Условие 2) следует из того, что $\dot{V} = -k_1\left(\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\varphi_n\eta_n\right)^2 - k_2\left(\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}g_n\eta_n\right)^2 \le 0$ при $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$, для всех $x \in D(A)$, где $D(A) = \{x \in \ell^2 \mid \sum\limits_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\beta_n^2\left(\xi_n^2 + \eta_n^2\right) < \infty\}$.

Для проверки условия 3) Теоремы 1 докажем предкомпактность полутраекторий линейного дифференциального уравнения (6) с помощью теоремы из работы [9]. Для этого докажем компактность оператора $(\lambda F + I)^{-1} : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ при некотором $\lambda > 0$.

Рассмотрим уравнение $Ix + \lambda Ax + \lambda Bu = \bar{x}$ относительно x, где $\lambda = \text{const}$. В покомпонентном виде оно примет вид:

$$(I + \lambda A)\begin{pmatrix}\xi_n\\ \eta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{\xi}_n\\ \overline{\eta}_n - \lambda\varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2\end{pmatrix}.$$

Решая уравнение методом обратной матрицы, получим

$$\begin{pmatrix}\xi_n\\ \eta_n\end{pmatrix} = \frac{1}{1+(\lambda\beta_n)^2}\begin{pmatrix}1 & -\lambda\beta_n\\ \lambda\beta_n & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\xi}_n\\ \overline{\eta}_n - \lambda\varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Подставим выражение (10) в выражение для $u = v(x)$ вида (5):

$$\begin{pmatrix}v_1(\overline{x})\\ v_2(\overline{x})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{-k_1}{2}\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\dfrac{\varphi_n}{1+(\lambda\beta_n)^2}\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n + \overline{\eta}_n - \lambda\varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2\right)\\ \dfrac{-k_2}{2}\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\dfrac{g_n}{1+(\lambda\beta_n)^2}\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n + \overline{\eta}_n - \lambda\varphi_n u_1 - \lambda g_n u_2\right)\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Преобразуем (11) следующим образом:

$$\begin{cases} v_1\left(1 - \dfrac{k_1}{2}\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\dfrac{\lambda\varphi_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}\right) - v_2\left(\dfrac{k_1}{2}\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\dfrac{\lambda\varphi_n g_n}{1+(\lambda\beta_n)^2}\right) = -\dfrac{k_1}{2}\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\dfrac{\varphi_n\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n + \overline{\eta}_n\right)}{1+(\lambda\beta_n)^2},\\ v_1\left(-\dfrac{k_2}{2}\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\dfrac{\lambda\varphi_n g_n}{1+(\lambda\beta_n)^2}\right) + v_2\left(1 - \dfrac{k_2}{2}\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\dfrac{\lambda g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}\right) = -\dfrac{k_2}{2}\displaystyle\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\dfrac{g_n\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n + \overline{\eta}_n\right)}{1+(\lambda\beta_n)^2}. \end{cases} \tag{12}$$

Из (12) с помощью метода Крамера найдем представление функций $v_1(\overline{x})$ и $v_2(\overline{x})$:

$$v_1(\overline{x}) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad v_2(\overline{x}) = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{13}$$

где

$$\Delta = 1 - \frac{k_2}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} - \frac{k_1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda\varphi_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} + \\ + \frac{k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda\varphi_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} - \frac{k_1k_2}{4}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda\varphi_n g_n}{1+(\lambda\beta_n)^2}\right)^2,$$

$$\Delta_1 = -\frac{k_1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_n\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n + \overline{\eta}_n\right)}{1+(\lambda\beta_n)^2} + \frac{k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_n\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n + \overline{\eta}_n\right)}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} - \\ - \frac{k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{g_n\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n + \overline{\eta}_n\right)}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda\varphi_n g_n}{1+(\lambda\beta_n)^2},$$

$$\Delta_2 = -\frac{k_2}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{g_n\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n+\overline{\eta}_n\right)}{1+(\lambda\beta_n)^2}+\frac{k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{g_n\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n+\overline{\eta}_n\right)}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda\varphi_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}-$$
$$-\frac{k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_n\left(\lambda\beta_n\overline{\xi}_n+\overline{\eta}_n\right)}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda\varphi_n g_n}{1+(\lambda\beta_n)^2}.$$

Формулы (13) определяют линейный функционал $v(\overline{x})$ в ℓ^2. Покажем, что $v(\overline{x})$ ограничен для произвольного $\lambda > 0$, для этого оценим $v_1(\overline{x})$ и $v_2(\overline{x})$. Так как $|v_1(\overline{x})| = \left|\frac{\Delta_1}{\Delta}\right| = \frac{|\Delta_1|}{|\Delta|}$, а $|v_2(\overline{x})| = \left|\frac{\Delta_2}{\Delta}\right| = \frac{|\Delta_2|}{|\Delta|}$, то оценим отдельно числитель и знаменатель

$$|\Delta_1| \le \frac{k_1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{|\varphi_n||\lambda\beta_n\overline{\xi}_n|}{1+(\lambda\beta_n)^2}+\frac{k_1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{|\varphi_n||\overline{\eta}_n|}{1+(\lambda\beta_n)^2}+\frac{k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{|\varphi_n||\lambda\beta_n\overline{\xi}_n|}{1+(\lambda\beta_n)^2}+$$
$$+\frac{k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{|\varphi_n||\overline{\eta}_n|}{1+(\lambda\beta_n)^2}+\frac{k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda|\varphi_n g_n|}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{|g_n||\lambda\beta_n\overline{\xi}_n|}{1+(\lambda\beta_n)^2}+$$
$$+\frac{k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\lambda|\varphi_n g_n|}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{|g_n||\overline{\eta}_n|}{1+(\lambda\beta_n)^2}. \quad (14)$$

Для произвольного $\beta_0 > 0$ запишем суммы в (14) отдельно при $\beta_n < \beta_0$ и $\beta_n \ge \beta_0$:

$$|\Delta_1| \le \frac{\lambda k_1}{2}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S\\ \beta_n<\beta_0}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2\beta_n^2}{(1+(\lambda\beta_n)^2)^2}+\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S\\ \beta_n\ge\beta_0}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2\beta_n^2}{(1+(\lambda\beta_n)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}|\overline{\xi}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\frac{k_1}{2}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{|\varphi_n|^2}{(1+(\lambda\beta_n)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}|\overline{\eta}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{\lambda^2k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S\\ \beta_n<\beta_0}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2\beta_n^2}{(1+(\lambda\beta_n)^2)^2}+\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S\\ \beta_n\ge\beta_0}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2\beta_n^2}{(1+(\lambda\beta_n)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}|\overline{\xi}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{\lambda k_1k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2}{(1+(\lambda\beta_n)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}|\overline{\eta}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$
+\frac{\lambda^2 k_1 k_2}{4}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{g_n^2}{(1+(\lambda\beta_n)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\varphi_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\times
$$

$$
\times\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S\\ \beta_n<\beta_0}}^{\infty}\frac{g_n^2\beta_n^2}{(1+(\lambda\beta_n)^2)^2}+\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S\\ \beta_n\geq\beta_0}}^{\infty}\frac{g_n^2\beta_n^2}{(1+(\lambda\beta_n)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}|\bar{\xi}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}+
$$

$$
+\frac{\lambda k_1 k_2}{4}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{g_n^2}{(1+(\lambda\beta_n)^2)^2}\right)\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\varphi_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}|\overline{\eta}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (15)
$$

В выражении (15) использовано неравенство Гельдера. С учетом неравенств

$$
\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}|\bar{\xi}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|\bar{\xi}\|_{\ell^2}\leq\|\overline{x}\|,\qquad \left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}|\overline{\eta}_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|\overline{\eta}\|_{\ell^2}\leq\|\overline{x}\|,
$$

$$
\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S\\ \beta_n<\beta_0}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2\beta_n^2}{(1+(\lambda\beta_n)^2)^2}+\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S\\ \beta_n\geq\beta_0}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2\beta_n^2}{(1+(\lambda\beta_n)^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\leq\|\varphi\|\left(\beta_0+\frac{1}{\lambda^4\beta_0^2}\right)^{\frac{1}{2}},
$$

выражение (15) примет вид:

$$
|\Delta_1|\leq\|\overline{x}\|\left(\|\varphi\|\left(\left(\frac{\lambda k_1}{2}+\frac{\lambda^2 k_1 k_2}{2}\|g\|^2\right)\left(\beta_0+\frac{1}{\lambda^4\beta_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{k_1}{2}+\frac{\lambda k_1 k_2}{2}\|g\|^2\right)\right)=
$$
$$
=M_1(\lambda)\|\overline{x}\|. \quad (16)
$$

Применяя аналогичные рассуждения, получим, что

$$
|\Delta_2|\leq\|\overline{x}\|\left(\|g\|\left(\left(\frac{\lambda k_2}{2}+\frac{\lambda^2 k_1 k_2}{2}\|\varphi\|^2\right)\left(\beta_0+\frac{1}{\lambda^4\beta_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{k_2}{2}+\frac{\lambda k_1 k_2}{2}\|\varphi\|^2\right)\right)=
$$
$$
=M_2(\lambda)\|\overline{x}\|. \quad (17)
$$

Оценим определитель Δ снизу, для чего воспользуемся представлением

$$
\Delta=1+\lambda r(\lambda), \quad (18)
$$

где

$$r(\lambda) = -\frac{k_2}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} - \frac{k_1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} + \\ + \frac{\lambda k_1 k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2}{1+(\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} - \frac{\lambda k_1 k_2}{4}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_n g_n}{1+(\lambda\beta_n)^2}\right)^2.$$

Пусть $|r(\lambda)| \le M$ при $M > 0$ для любого $\lambda \in [0, \lambda_0]$. Выберем $\lambda = \min\left\{\lambda_0, \dfrac{1}{M}\right\}$. Тогда из (18) следует, что $\triangle > 0$. Для оценки $|r(\lambda)|$ применим неравенство треугольника и неравенство Гельдера:

$$|r(\lambda)| \le \frac{k_2}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} + \frac{k_1}{2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} + \\ + \frac{\lambda k_1 k_2}{4}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_n^2}{1+(\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{g_n^2}{1+(\lambda\beta_n)^2} + \frac{\lambda k_1 k_2}{4}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{\varphi_n g_n}{1+(\lambda\beta_n)^2}\right)^2 \le \\ \le \frac{k_2}{2}\|g\|^2 + \frac{k_1}{2}\|\varphi\|^2 + \frac{\lambda k_1 k_2}{2}\|g\|^2\|\varphi\|^2.$$

Выберем $\lambda_0 = 1$, тогда

$$|r(\lambda_0)| \le \frac{k_2}{2}\|g\|^2 + \frac{k_1}{2}\|\varphi\|^2 + \frac{k_1 k_2}{2}\|g\|^2\|\varphi\|^2 = M,$$

а $\Delta \ge 1 - \lambda\left(\dfrac{k_2}{2}\|g\|^2 + \dfrac{k_1}{2}\|\varphi\|^2 + \dfrac{k_1 k_2}{2}\|g\|^2\|\varphi\|^2\right) = M_3(\lambda)$.

Таким образом показано, что для всякого $\lambda \in (0,1)$ найдутся такие числа $M_4(\lambda) > 0$ и $M_5(\lambda) > 0$, что

$$|v_1(\overline{x})| \le \frac{M_1(\lambda)}{M_3(\lambda)}\|\overline{x}\| = M_4(\lambda)\|\overline{x}\|, \qquad |v_2(\overline{x})| \le \frac{M_2(\lambda)}{M_3(\lambda)}\|\overline{x}\| = M_5(\lambda)\|\overline{x}\|$$

в формуле (13) при всех $\overline{x} \in \ell^2$. Формулы (10) и (13) определяют $x = (\lambda F + I)^{-1}\overline{x}$ при всех $\overline{x} \in \ell^2$ для $\lambda > 0$. Отсюда следует, что

$$\|(\lambda F + I)^{-1}\overline{x}\|^2 \le 2\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{1}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\left(\overline{\xi}_n^2 + (\overline{\eta}_n - \lambda\varphi_n v_1(\overline{x}) - \lambda g_n v_2(\overline{x}))^2\right) \le \\ \le 2\|\overline{x}\|^2\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{1}{1+(\lambda\beta_n)^2}\left(1 + \lambda^2 M_4^2\|\varphi\|^2 + \lambda^2 M_5^2\|g\|^2 + 2\lambda^2 M_4 M_5^2\|\varphi\|\|g\| - \right. \\ \left. -2\lambda M_4\|\varphi\| - 2\lambda M_5\|g\|\right). \quad (19)$$

Покажем, что ряд $\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty} \dfrac{1}{1+(\lambda\beta_n)^2}$ в (19) сходится. Для этого перейдем к суммированию по двум индексам с учетом представления (2):

$$\sum_{\substack{n=1\\ n\notin S}}^{\infty} \frac{1}{1+(\lambda\beta_n)^2} \le \sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{1}{1+(\lambda\beta_{kj})^2} \le \frac{(l_1l_2)^4}{\lambda^2\alpha^2} \sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{1}{\left((\pi k l_2)^2+(\pi j l_1)^2\right)^2}.$$

Для оценки суммы ряда применим интегральный признак сходимости:

$$\frac{(l_1l_2)^4}{\lambda^2\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\left((\pi k l_2)^2+(\pi j l_1)^2\right)^2} \le \frac{(l_1l_2)^4}{\lambda^2\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} \frac{dj}{\left((\pi k l_2)^2+(\pi j l_1)^2\right)^2} =$$

$$= \frac{(l_1l_2)^4}{\lambda^2\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4\pi^3 l_2 k^3 l_1^3}\right) \le \frac{(l_1l_2)^4}{\lambda^2\alpha^2} \left(\frac{1}{4\pi^3 l_2 l_1^3} + \int\limits_1^{\infty} \left(\frac{1}{4\pi^3 l_2 k^3 l_1^3}\right)\right) = \frac{3 l_1 l_2^3}{8\pi^3\lambda^2\alpha^2}. \quad (20)$$

Из (19) и (20) следует, что

$$\|(\lambda F+I)^{-1}\overline{x}\|^2 \le M_6(\lambda)\|\overline{x}\|^2.$$

Таким образом, определен линейный ограниченный оператор

$$(\lambda F+I)^{-1}: \quad \ell^2 \longrightarrow \ell^2$$

при каждом $\lambda > 0$. Для доказательства его компактности рассмотрим оператор проектирования $P_N : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$, который переводит элементы $x \in \ell^2$ в конечномерное подпространство с $\xi_n = \eta_n = 0$ при $n < N$:

$$P_N : \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \eta_{N-1} \\ \xi_N \\ \eta_N \\ \xi_{N+1} \\ \eta_{N+1} \\ \vdots \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \xi_N \\ \eta_N \\ \xi_{N+1} \\ \eta_{N+1} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим линейный ограниченный оператор в ℓ^2:

$$U_N = (I-P_N)(\lambda F+I)^{-1}.$$

Каждый оператор U_N компактен (вполне непрерывен), поскольку его образ имеет конечную размерность. Покажем, что оператор $(\lambda F+I)^{-1}$ является пределом по норме компактных операторов:

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \|(\lambda F+I)^{-1} - U_N\| = \lim_{N\longrightarrow\infty} \|P_N(\lambda F+I)^{-1}\| = 0. \quad (21)$$

Имеем

$$\|P_N(\lambda F+I)^{-1}\overline{x}\| \le 2\sum_{\substack{n=N\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{1}{1+(\lambda\beta_n)^2}\sum_{\substack{n=N\\ n\notin S}}^{\infty}\left(\overline{\xi}_n^2+(\overline{\eta}_n-\lambda\varphi_n v_1(\overline{x})-\lambda g_n v_2(\overline{x}))^2\right)\le$$

$$\le 2\|\overline{x}\|^2\sum_{\substack{n=N\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{1}{1+(\lambda\beta_n)^2}\left(1+\lambda^2M_4^2\|\varphi\|^2+\lambda^2M_5^2\|g\|^2+2\lambda^2M_4M_5\|\varphi\|\|g\|-\right.$$

$$\left.-2\lambda M_4\|\varphi\|-2\lambda M_5\|g\|\right). \quad (22)$$

Из формулы (20) следует, что

$$\sum_{\substack{n=N\\ n\notin S}}^{\infty}\frac{1}{1+(\lambda\beta_n)^2}\longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad N\longrightarrow\infty.$$

Таким образом, из оценки (22) вытекает свойство (21). Следовательно, оператор $(\lambda F+\ I)^{-1}:\ell^2\longrightarrow\ell^2$ компактен, поскольку он является пределом конечномерных операторов.

Из компактности линейного оператора $(\lambda F+I)^{-1}$ следует предкомпактность всех положительных полутраекторий линейного дифференциального уравнения (6) в ℓ^2 по теореме из [9].

Проверим условие 4) Теоремы 1. Пусть $x(t)$, $t\ge 0$ – решение системы (3) с управлением $u=v(x(t))$ вида (5), и пусть $y(x(\tau))=0$ при некотором $\tau\ge 0$.

Обозначим $\tilde{x}^0=x(\tau)\in\ell^2$ и определим $\tilde{x}(t)=(\tilde{\xi}_1(t),\tilde{\eta}_1(t),\tilde{\xi}_2(t),\tilde{\eta}_2(t),...)^T$ как решение задачи Коши:

$$\begin{cases}\dot{\tilde{\xi}}_n(t)=\beta_n\tilde{\eta}_n(t),\\ \dot{\tilde{\eta}}_n(t)=-\beta_n\tilde{\xi}_n(t),\end{cases}\qquad \tilde{x}(0)=\tilde{x}^0. \quad (23)$$

Поскольку $y(\tilde{x}^0)=0$, то $\tilde{\xi}_n(0)=\tilde{\eta}_n(0)=0$ при всех $n\in\mathbb{N}\backslash S$. Тогда

$$\tilde{\xi}_n(t)=\tilde{\eta}_n(t)=0,\quad \forall n\in\mathbb{N}\backslash S,\quad \forall t\ge 0. \quad (24)$$

Это означает, что

$$y(\tilde{x}(t))\equiv 0. \quad (25)$$

Покажем, что $\tilde{x}(t)$ является решением системы (3) с обратной связью (5).

Непосредственной подстановкой соотношений (24) в функционал обратной связи (5) приходим к выводу, что $u=v(\tilde{x}(t))\equiv 0$, т.е. подстановка $\tilde{x}(t)$ обращает дифференциальные уравнения (3) с управлением (5) в тождество на основании системы (23).

Таким образом, $\tilde{x}(t)$ – решение системы (3), (5), и с использованием свойства единственности решений задачи Коши получаем, что

$$x(t)=\tilde{x}(t+\tau),\qquad \forall\ t\ge 0.$$

Отсюда, с учетом тождества (24), следует, что $y(x(t)) \equiv 0$. Следовательно, условие 4) выполнено.

Осталось проверить условие 5). Для этого покажем, что всякая полутраектория $\{x(t)\}_{t\geq 0}$ системы (3) с управлением (5) на множестве

$$M = \{x \in \ell^2 | \, \dot{V}(x) = 0\}$$

обладает свойством $y(x(t)) \equiv 0$.

Пусть $x(t) \in M$ при всех $t \geq 0$, т.е.

$$\dot{V}(x(t)) = -k_1 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} \varphi_n \eta_n(t) \right)^2 - k_2 \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} g_n \eta_n(t) \right)^2 \equiv 0.$$

Отсюда с учетом неравенств $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ следует, что

$$v_1(x(t)) = v_2(x(t)) = 0. \tag{26}$$

Подстановка управления $u = v(x(t))$ вида (26) в (3) приводит к системе:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_n(t) = \beta_n \eta_n(t), \\ \dot{\eta}_n(t) = -\beta_n \xi_n(t), \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Запишем решение системы дифференциальных уравнений (27):

$$\begin{cases} \xi_n(t) = \xi_n(0)\cos(\beta_n t) + \eta_n(0)\sin(\beta_n t), \\ \eta_n(t) = -\xi_n(0)\sin(\beta_n t) + \eta_n(0)\cos(\beta_n t), \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

Подставляя (28) в (26), получим:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} (\varphi_n \eta_n(0)\cos(\beta_n t) - \varphi_n \xi_n(0)\sin(\beta_n t)) \equiv 0, \\ \displaystyle\sum_{\substack{n=1 \\ n \notin S}}^{\infty} (g_n \eta_n(0)\cos(\beta_n t) - g_n \xi_n(0)\sin(\beta_n t)) \equiv 0, \end{cases} \qquad \forall t \geq 0. \tag{29}$$

Отметим, что если система функций

$$\{\cos(\beta_n t), \ \sin(\beta_n t) \mid n \in \mathbb{N} \setminus S\} \tag{30}$$

линейно-независима на полуоси $t \in [0, \infty)$, то тождества (29) выполнены только при

$$\xi_n(0) = \eta_n(0) = 0, \qquad \forall \, n \in \mathbb{N} \setminus S. \tag{31}$$

Из соотношений (31) в силу формул (28) следует свойство $y(x(t)) \equiv 0$, что обеспечивает выполнение условия 5) Теоремы 1.

Итак, остается доказать линейную независимость системы (30). Для этого покажем, что система функций

$$\{\cos(\beta_n t),\ \sin(\beta_n t) \mid n \in \mathbb{N}\} \tag{32}$$

линейно-независима на полуоси $t \in [0, \infty)$.

Для доказательства линейной независимости функций (32) воспользуемся Теоремой 1.2.17 из [10], которая формулируется следующим образом: если

$$\overline{\lim_{a\to\infty}}\ \overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{m[a, a+z)}{z} < \frac{\tau}{2\pi}, \tag{33}$$

то система (32) минимальна в $L^2(0;\tau)$. В (33) выражение $m[a,b)$ обозначает мощность множества $[a,b) \cap K$, где

$$K = \{\beta_n | \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Для доказательства (33) заметим, что

$$\beta_n = \beta_{kj} = \alpha\pi^2 \left(\frac{k^2}{l_1^2} + \frac{j^2}{l_2^2}\right) = \frac{\alpha\pi^2}{l_2^2}\left(j^2 + k^2\chi\right), \quad \text{где} \quad \chi = \frac{l_2^2}{l_1^2} > 0.$$

Обозначим $\widetilde{\beta}_{kj} = j^2 + k^2\chi$. Рассмотрим сначала случай $\chi \geq 1$.

Пусть $\Gamma_+ : j^2 + k^2\chi = b$ и $\Gamma_- : j^2 + k^2\chi = a$ – границы области Ω, в которую попадают целочисленные точки вида (j,k), для которых $\beta_{kj} \in [a,b)$. Область Ω определена следующим образом:

$$\Omega = \{(j,k) \mid a \leq j^2 + k^2\chi < b, \quad k \geq 1,\ j \geq 1\}.$$

Таким образом, оценка числа $m[a,b)$ сводится к нахождению мощности множества $\Omega \cap \mathbb{N}^2$. Рассмотрим два квадрата, один из которых (B_+) содержит область Ω, а второй (B_-) имеет не более одной общей точки с Ω, как показано на рис. 1.

Найдем количество целочисленных точек в квадратах B_+ и B_-. Определим координаты вершин, которые лежат на границе Ω:

$$b_+ :\ b_+^2 + \chi 1^2 = b, \qquad b_- :\ b_-^2 + \chi b_-^2 = a. \tag{34}$$

Из равенств (34) следует, что $b_+ = \sqrt{b-\chi}$, а $b_- = \sqrt{\dfrac{a}{1+\chi}}$.

Таким образом, оценка количества целочисленных точек в Ω будет иметь вид:

$$m[a;b) \leq |B_+ \cap \mathbb{N}^2| - |B_- \cap \mathbb{N}^2| + 1 = b_+^2 - b_-^2 + 1 = b - \chi - \frac{a}{1+\chi} + 1. \tag{35}$$

Пусть $b = a + z$, тогда

$$\overline{\lim_{a\to\infty}}\ \overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{m[a, a+z)}{z} \leq \overline{\lim_{a\to\infty}}\ \overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{a\left(1 - \dfrac{1}{1+\chi}\right) + z - \chi + 1}{z} = 1. \tag{36}$$

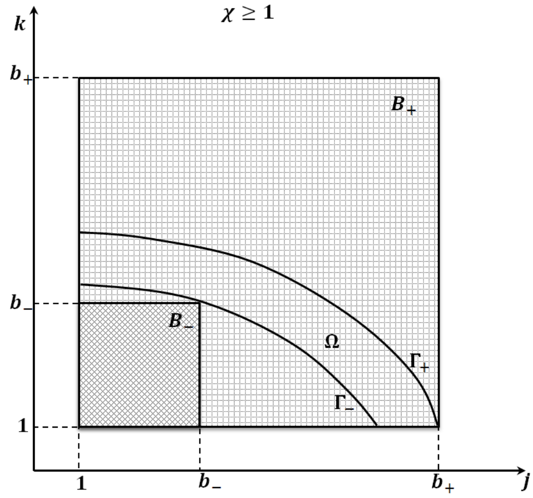

Рис. 1. Множества Ω, B_+, B_-.

Случай $\chi < 1$ рассматривается аналогично, при этом

$$\overline{\lim_{a\to\infty}}\,\overline{\lim_{z\to\infty}}\frac{m[a,a+z)}{z} \leq \overline{\lim_{a\to\infty}}\,\overline{\lim_{z\to\infty}}\frac{a\left(\dfrac{1}{\chi}-\dfrac{1}{1+\chi}\right)+\dfrac{z-1}{\chi}+1}{z} = \frac{1}{\chi}. \qquad (37)$$

Из оценок (36), (37) следует, что система функций (32) – линейно-независима на $[0;\tau)$ при $\tau > 2\pi \max\left\{1, \dfrac{1}{\chi}\right\}$.

Таким образом, особая точка $x = 0$ системы (3) с управлением $u = v(x)$ асимптотически устойчива по Теореме 2. □

4. Заключение. В работе рассмотрена бесконечномерная система дифференциальных уравнений, которая описывает колебания упругой пластины Кирхгофа. Для данной системы построено управление с обратной связью $u = v(x)$, а также доказана теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (3) по отношению к функционалу y вида (5). Представляет дальнейший интерес исследование задачи стабилизации с использованием обратной связи по выходу для системы с неполными измерениями фазового вектора.

1. *Luo Z.-H., Guo B.-Z., Morgül O.* Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications. – London: Springer-Verlag, 1999. – 403 p.
2. *Гуляев В.И.* Динамика упругих систем при сложном движении// Прикладная механика. – 2003. – Т. 39, № 5. – С. 28–51.
3. *Дегтярев Г.Л., Сиразетдинов Т.К.* Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами – М.: Машиностроение, 1986. – 214 с.
4. *Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г.* Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация – М.: Наука, 1989. – 368 с. – (Научные основы робототехники).
5. *Зуев А.Л., Новикова Ю.В.* Малые колебания пластины Кирхгофа с двумерным управлением // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 187–198.

6. *Зуев А.Л., Новикова Ю.В.* Оптимальное управление моделью пластины Кирхгофа // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 163–176.
7. *Phillips R.S.* Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – Vol. 90. – P. 193–254.
8. *Зуев А.Л.* Частичная асимптотическая устойчивость абстрактных дифференциальных уравнений// Український математичний журнал. – 2006. – Т. 58, № 5. – С. 629–637.
9. *Dafermos C.M., Slemrod M.* Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups// Journal of Functional Analysis. – 1973. – Vol. 13. – P. 97–106.
10. *Krabs W.* On moment theory and controllability of one-dimensional vibrating systems and heating processes // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Vol. 173. – Berlin: Springer-Verlag, 1992. – 174 p.

A. L. Zuyev, Yu. V. Novikova

Stabilization of vibrations of the Kirchhoff plate by using a state feedback.

An infinite system of differential equations that describes the vibrations of the Kirchhoff plate is considered. Feedback control functionals, depending on the generalized velocities, are constructed for the system considered. A theorem on the partial asymptotic stability of the equilibrium of the closed-loop system is proved.

Keywords: *asymptotic stability, Kirchhoff plate, feedback control.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Получено 03.04.14
al_zv@mail.ru
yuliya.novikova.88@mail.ru