УДК 517.5

©2014. **В. В. Волчков, Вит. В. Волчков, И. М. Савостьянова**

СВОЙСТВА ЯДРА ОБОБЩЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МИНКОВСКОГО НА СФЕРЕ

Исследуется обобщенное преобразование Минковского, ставящее в соответствие функциям на сфере их интегралы с заданным весом по замкнутым геодезическим. Показано, что нетривиальная часть ядра указанного преобразования содержит непрерывные функции с весьма сложной структурой. В частности, эти функции могут быть не дифференцируемы на всюду плотном множестве области определения.

Ключевые слова: *сферические средние, преобразование Минковского, функции Лежандра.*

1. Введение. Основным объектом изучения в интегральной геометрии являются преобразования, ставящие в соответствие функциям из заданного класса $\mathcal{F}$ на многообразии X их интегралы по подмногообразиям в X из заданного множества Υ. Для всякого такого преобразования I возникают следующие задачи.

1) Выяснить, является ли I инъективным, и если не является, то найти его ядро.

2) Если I инъективно, то найти обратное к I преобразование на его области определения.

Первая из этих задач впервые была рассмотрена Г. Минковским в 1904 году [1] для следующего случая: $X = \mathbb{S}^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi| = 1\}$, $\mathcal{F} = C(\mathbb{S}^2)$, Υ – семейство всех замкнутых геодезических (больших окружностей) на $\mathbb{S}^2$, а

$$(If)(\gamma) = \int_\gamma f(\xi)dl(\xi), \quad \gamma \in \Upsilon, \tag{1}$$

где dl – элемент длины дуги. Г. Минковский установил, что ядро преобразования (1) совпадает с классом нечетных непрерывных функций на $\mathbb{S}^2$ и применил этот результат для решения некоторых проблем в теории выпуклых тел (см., например, [2], [3, часть 3, § 17]). В дальнейшем задачи 1) и 2) для различных случаев исследовались многими авторами (см. [4]–[8] и библиографию к этим работам). Наиболее изученными примерами преобразований I являются преобразование Радона (см. [4]–[6]) и преобразование Помпейю (см. [6]–[8]).

В современных исследованиях особое внимание уделяется различным обобщениям интегрально-геометрических преобразований, в которых рассматривается интегрирование функций с некоторым весом (см. [8]–[11]). Аналоги сформулированных выше задач для таких преобразований имеют важное значение для многочисленных приложений в ряде вопросов анализа (см. [6]–[8]). Как правило, при их исследовании возникают дополнительные трудности, преодоление которых требует новых идей и методов. Например, при изучении преобразования Радона с весом потребовалось, в отличие от классической ситуации, привлечение техники микролокального анализа (см. [9], [10]).

Начиная с середины шестидесятых годов прошлого века, во многих работах изучался вопрос о точных условиях, при выполнении которых функция из ядра преобразования I обязана быть нулевой (см. [4]–[8]). В частности, для преобразования Минковского была получена следующая теорема единственности (см. [5, гл. 3, теорема 1.25], [12], [13]).

Теорема A. *Пусть* $\delta < \frac{\pi}{2}$ *и*

$$K_\delta = \{\xi \in \mathbb{S}^2 : \delta < d(o,\xi) < \pi - \delta\},$$

где $d(\cdot,\cdot)$ *– внутренняя метрика на* $\mathbb{S}^2$, $o = (0,0,1)$. *Пусть также* f *– непрерывная четная функция на* K_δ, *удовлетворяющая следующим условиям:*

(i) f *имеет нулевые интегралы по всем замкнутым геодезическим, лежащим в* K_δ*;*

(ii) $f \in C^\infty$ *в некоторой окрестности экватора*

$$E_o = \left\{\xi \in \mathbb{S}^2 : d(o,\xi) = \frac{\pi}{2}\right\}$$

и все производные от f *равны нулю на* E_o.

Тогда $f = 0$.

Отметим, что при $\delta < 0$ множество K_δ совпадает с $\mathbb{S}^2$ и теорема A вытекает из результата Г. Минковского. В этом случае требование на функцию f из пункта (ii) является лишним. В данной работе построены примеры, показывающие что при $\delta < \frac{\pi}{2}$ условие (ii) в теореме A не может быть опущено (см. теорему 1). Более того, мы покажем, что при $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ нетривиальная часть ядра обобщенного преобразования Минковского содержит непрерывные функции с весьма сложной структурой (см. теорему 2 ниже). В частности, эти функции могут быть не дифференцируемы на всюду плотном в K_δ множестве.

2. Формулировки основных результатов. Как обычно, символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ будем обозначать соответственно множества натуральных, целых и целых неотрицательных чисел.

Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 – декартовы координаты точки $\xi \in \mathbb{S}^2$, $\mathcal{P}_M(\xi) = (\xi_1 + i\xi_2)^M$ $(M \in \mathbb{Z}_+)$, $O(3)$ – ортогональная группа в $\mathbb{R}^3$. Введем следующий класс функций:

$$\mathfrak{M}_M(K_\delta) = \left\{f \in C(K_\delta) : \int_{E_o} f(\tau\xi)\mathcal{P}_M(\xi)dl(\xi) = 0 \qquad \forall \tau \in O(3) : \tau E_o \subset K_\delta\right\}.$$

При $\delta < 0$ имеем

$$\mathfrak{M}_M(K_\delta) = \mathfrak{M}_M(\mathbb{S}^2) = \left\{f \in C(\mathbb{S}^2) : \int_{E_o} f(\tau\xi)\mathcal{P}_M(\xi)dl(\xi) = 0 \qquad \forall \tau \in O(3)\right\}.$$

Кроме того, по теореме Минковского

$$\mathfrak{M}_0(\mathbb{S}^2) = \{f \in C(\mathbb{S}^2) : f(-\xi) = -f(\xi) \qquad \forall \xi \in \mathbb{S}^2\}.$$

Отметим также, что выбор веса $\mathcal{P}_M$ в интегралах мотивирован естественными обобщениями уравнений свертки на $\mathbb{S}^2$ с радиальными распределениями, теория которых активно развивается в последнее время (см. [6]–[8]).

Рассмотрим теперь случай $0 \le \delta < \frac{\pi}{2}$. Введем сферические координаты φ, θ на $\mathbb{S}^2$ следующим образом:

$$\xi_1 = \sin\theta\sin\varphi,\ \xi_2 = \sin\theta\cos\varphi,\ \xi_3 = \cos\theta, \qquad \varphi \in (0, 2\pi),\ \theta \in (0, \pi).$$

Теорема 1. *Пусть $k \ge M+2$, $k+M$ – четно и $0 \le j \le \frac{k-M-2}{2}$. Тогда*

$$\frac{(\cos\theta)^{2j}}{(\sin\theta)^k} e^{ik\varphi} \in \mathfrak{M}_M(K_0). \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть $M \in \mathbb{Z}_+$, M – четно, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$. Пусть также $W \in C[\delta, \pi-\delta]$, $W > 0$ на $[\delta, \pi-\delta]$ и функция $W(\theta - \frac{\pi}{2})$ является четной на $[-\frac{\pi}{2}+\delta, \frac{\pi}{2}-\delta]$. Тогда существует четная в K_δ функция $f = f(\theta, \varphi) \in \mathfrak{M}_M(K_\delta)$ такая, что для любого рационального числа $\alpha \in [0, 1)$ функция $f(\theta, 2\pi\alpha)$ представима в виде*

$$f(\theta, 2\pi\alpha) = W(\theta) + P\Big(\frac{1}{\sin\theta}\Big), \qquad \theta \in [\delta, \pi-\delta], \tag{3}$$

где P – алгебраический многочлен, зависящий от α.

Теорема 3. *Пусть $M \in \mathbb{Z}_+$, M – четно, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$. Тогда существует четная в K_δ функция $f = f(\theta, \varphi) \in \mathfrak{M}_M(K_\delta)$ такая, что для любого рационального числа $\alpha \in [0, 1)$ функция $f(\theta, 2\pi\alpha)$ не дифференцируема по θ ни в одной точке интервала $(\delta, \pi-\delta)$.*

3. Вспомогательные утверждения. Будем использовать следующие стандартные обозначения (см., например, [14]): $\binom{m}{n}$ – биномиальные коэффициенты, Γ – гамма-функция, ψ – логарифмическая производная гамма-функции, $(z)_k = \frac{\Gamma(z+k)}{\Gamma(z)}$ – символ Похгаммера, $F(a, b; c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, ${}_pF_q$ – обобщенная гипергеометрическая функция порядка (p, q).

Лемма 1. *Пусть $m, p \in \mathbb{Z}_+$, $m \ge p+1$, $a \ne p, p-1, p-2, ...$ и $|\arg(1-z)| < \pi$. Тогда*

$$F(a, m-p; a-p; z) = \frac{1}{(1-z)^m} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(-1)^j (a-m)_j (-p)_j}{(1-m)_j (a-p)_j} \binom{m-1}{j} z^j. \tag{4}$$

Доказательство. При $A, B \ne 0, -1, -2, ...$ и $N \in \mathbb{N}$ имеет место следующая формула для аналитического продолжения гипергеометрического ряда (см. [14, гл. 2, п. 2.10 (11)]):

$$\frac{F(A, B; A+B-N; z)}{\Gamma(A+B-N)} = \frac{\Gamma(N)(1-z)^{-N}}{\Gamma(A)\Gamma(B)} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(A-N)_n (B-N)_n}{(1-N)_n n!} (1-z)^n +$$

$$+\frac{(-1)^N}{\Gamma(A-N)\Gamma(B-N)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(A)_n(B)_n}{(n+N)!n!}(1-z)^n\times$$
$$\times\big(\psi(1+n)+\psi(1+n+N)-\psi(A+n)-\psi(B+n)-\ln(1-z)\big),$$
$$|\arg(1-z)|<\pi, |1-z|<1.$$

Полагая здесь $A=a$, $B=m-p$, $N=m$, получаем

$$\frac{F(a,m-p;a-p;z)}{\Gamma(a-p)}=\frac{\Gamma(m)(1-z)^{-m}}{\Gamma(a)\Gamma(m-p)}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{(a-m)_n(-p)_n}{(1-m)_n n!}(1-z)^n=$$
$$=\frac{\Gamma(m)(1-z)^{-m}}{\Gamma(a)\Gamma(m-p)}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\sum_{n=j}^{m-1}\frac{(a-m)_n(-p)_n}{(1-m)_n n!}\binom{n}{j}\right)(-1)^j z^j. \tag{5}$$

Поскольку $(\zeta)_{n+j}=(\zeta)_j(\zeta+j)_n$, внутренняя сумма в (5) преобразуется к виду

$$\sum_{n=j}^{m-1}\frac{(a-m)_n(-p)_n}{(1-m)_n n!}\binom{n}{j}=\sum_{n=0}^{m-j-1}\frac{(a-m)_{n+j}(-p)_{n+j}}{(1-m)_{n+j}j!n!}=$$
$$=\frac{(a-m)_j(-p)_j}{(1-m)_j j!}\sum_{n=0}^{m-j-1}\frac{(a-m+j)_n(-p+j)_n}{(1-m+j)_n n!}. \tag{6}$$

Усеченный гипергеометрический ряд Гаусса выражается через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_3F_2$ по формуле

$$\sum_{n=0}^{N_1}\frac{(A_1)_n(B_1)_n}{(C_1)_n n!}=\frac{\Gamma(A_1+N_1+1)\Gamma(B_1+N_1+1)}{(N_1)!\Gamma(A_1+B_1+N_1+1)}{}_3F_2\left(\begin{matrix}A_1,B_1,C_1+N_1;1\\ C_1,A_1+B_1+N_1+1\end{matrix}\right)$$

(см. [14, гл. 4, п. 4.5]).

В частности,

$$\sum_{n=0}^{N_1}\frac{(A_1)_n(B_1)_n}{(-N_1)_n n!}=\frac{\Gamma(A_1+N_1+1)\Gamma(B_1+N_1+1)}{(N_1)!\Gamma(A_1+B_1+N_1+1)}$$

и

$$\sum_{n=0}^{m-j-1}\frac{(a-m+j)_n(-p+j)_n}{(1-m+j)_n n!}=\frac{\Gamma(a)\Gamma(m-p)}{(m-j-1)!\Gamma(a-p+j)}. \tag{7}$$

Комбинируя (5), (6) и (7), приходим к (4). □

Для $\lambda,\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$, $\alpha\neq-1,-2,\dots$ положим

$$\Phi_{\lambda,\alpha,\beta}(\theta)=F\left(\frac{\alpha+\beta+1+\lambda}{2},\frac{\alpha+\beta+1-\lambda}{2};\alpha+1;\sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{8}$$

При $\beta = \pm\alpha$ функции $\Phi_{\lambda,\alpha,\beta}(\theta)$ выражаются через функции Лежандра первого рода на $(-1,1)$, т. е.

$$P_\lambda^{-\alpha}(\cos\theta) = \frac{(\sin\theta)^\alpha}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}\Phi_{2\lambda+1,\alpha,\alpha}(\theta) = \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\Phi_{2\lambda+1,\alpha,-\alpha}(\theta) \tag{9}$$

(см. [14, гл. 3, п. 3.4 (6), п. 3.5 (8)]). Из [14, гл. 3, п. 3.4 (11)] нетрудно получить равенство

$$P_\nu^\mu(x)\cos(\pi(\nu+\mu)) - P_\nu^\mu(-x) = \frac{2^{\mu+2}\sqrt{\pi}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\nu+\mu}{2}\right)}\times$$
$$\times\frac{xF\left(\frac{1-\nu-\mu}{2},\frac{\nu-\mu}{2}+1;\frac{3}{2};x^2\right)}{(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}} - \frac{2^{\mu+1}\sqrt{\pi}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}(\nu+\mu)\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu-\mu}{2}\right)}\frac{F\left(-\frac{\nu+\mu}{2},\frac{1+\nu-\mu}{2};\frac{1}{2};x^2\right)}{(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}}. \tag{10}$$

Еще один частный случай определения (8) приводит к функциям P^l_{mn}, которые были введены и детально изучены И.М. Гельфандом и З.Я. Шапиро в связи с теорией представлений группы вращений трехмерного пространства (см. [15, гл. 3]). Нас будет интересовать случай, когда $l\in\mathbb{Z}_+$, а m и n пробегают значения $-l,-l+1,\dots l-1,l$. В терминах функций (8) имеем

$$P^l_{mn}(\cos\theta) = \frac{i^{m-n}}{(m-n)!}\sqrt{\frac{(l+m)!(l-n)!}{(l+n)!(l-m)!}}\times$$
$$\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{m-n}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{m+n}\Phi_{2l+1,m-n,m+n}(\theta),\quad m\ge n, \tag{11}$$

$$P^l_{mn} = P^l_{nm},\quad m<n.$$

Если $m=n=0$, то $P^l_{mn}(\cos\theta)$ совпадают с зональными сферическими функциями $P_l(\cos\theta)$ на $\mathbb{S}^2$. Кроме того,

$$P^l_{m0}(x) = \frac{1}{i^m}\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P^m_l(x). \tag{12}$$

При фиксированном l матрица с элементами $P^l_{mn}(\cos\theta)$ унитарна. В частности,

$$|P^l_{mn}(\cos\theta)|\le 1. \tag{13}$$

Имеют место соотношения ортогональности

$$\int_0^\pi P^l_{mn}(\cos\theta)\overline{P^s_{mn}(\cos\theta)}\sin\theta d\theta = \begin{cases}0, & l\ne s\\ \dfrac{2}{2l+1}, & l=s.\end{cases} \tag{14}$$

Далее, для функций P^l_{mn} справедлива следующая формула умножения:

$$P^l_{mk}(\cos\theta_1)P^l_{kn}(\cos\theta_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k\alpha-m\varphi-n\psi)}P^l_{mn}(\cos\theta)d\alpha, \tag{15}$$

где

$$\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\alpha,$$

$$e^{i\varphi}\sin\theta=\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2\cos\alpha+i\sin\theta_2\sin\alpha,$$

$$e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}}\cos\frac{\theta}{2}=\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}e^{\frac{i\alpha}{2}}-\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}e^{\frac{-i\alpha}{2}}.$$

Она позволяет вычислять интегралы по окружностям на $\mathbb{S}^2$ от сферических функций и их обобщений. Мы приведем соответствующие формулы для больших окружностей сферы. Положим

$$S_{\lambda,k}(\xi)=P_\lambda^{-|k|}(\cos\theta)e^{ik\varphi},\quad \lambda\in\mathbb{C},k\in\mathbb{Z}.$$

Обозначим через τ_α, $\varkappa_\beta$, a_t ортогональные преобразования в $\mathbb{R}^3$, определяемые равенствами:

$$\tau_\alpha\xi=(\xi_1\cos\alpha-\xi_2\sin\alpha,\xi_1\sin\alpha+\xi_2\cos\alpha,\xi_3). \tag{16}$$

$$\varkappa_\beta\xi=(\xi_1\cos\beta+\xi_2\sin\beta,\xi_1\sin\beta-\xi_2\cos\beta,\xi_3), \tag{17}$$

$$a_t\xi=(\xi_1,\xi_2\cos t+\xi_3\sin t,-\xi_2\sin t+\xi_3\cos t). \tag{18}$$

Лемма 2. *Пусть $\lambda\in\mathbb{C}$, $k\geq M$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и $|t|<\frac{\pi}{2}$. Тогда*

$$\int_{E_o}S_{\lambda,k}(\tau_\beta a_t\tau_\alpha\xi)\mathcal{P}_M(\xi)dl(\xi)=\frac{2^{1-M}\sqrt{\pi}}{(k-M)!}i^Me^{-iM\alpha}e^{-ik\beta}\cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda-M)\right)\times$$
$$\times\frac{\Gamma(\frac{1+\lambda-M}{2})}{\Gamma(1+\frac{\lambda+M}{2})}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{k-M}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{k+M}\Phi_{2\lambda+1,k-M,k+M}(t), \tag{19}$$

$$\int_{E_o}S_{\lambda,k}(\varkappa_\beta a_t\tau_\alpha\xi)P_M(\xi)dl(\xi)=\frac{2^{1+M}\sqrt{\pi}}{(k+M)!}(-1)^ki^Me^{-iM\alpha}e^{-ik\beta}\cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda+M)\right)\times$$
$$\times\frac{\Gamma(\frac{1+\lambda+M}{2})}{\Gamma(1+\frac{\lambda-M}{2})}\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{k+M}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{k-M}\Phi_{2\lambda+1,k+M,k-M}(t). \tag{20}$$

Доказательство. При $\lambda\in\mathbb{Z}_+$, $\lambda\geq k$ из (15), (12) и (11) имеем

$$\int_{E_o}S_{\lambda,k}(\tau_\beta a_t\tau_\alpha\xi)\mathcal{P}_M(\xi)dl(\xi)=\frac{2\pi}{(k-M)!}i^Me^{-iM\alpha}e^{-ik\beta}P_\lambda^{-M}(0)\times$$
$$\times\left(\sin\frac{t}{2}\right)^{k-M}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{k+M}\Phi_{2\lambda+1,k-M,k+M}(t). \tag{21}$$

Обе части в (21) являются целыми функциями переменной λ экспоненциального типа $|t| + \frac{\pi}{2}$ (см. [14, гл. 3, п. 3.7 (27)] и [7, гл. 7, §4, следствие 7.2]). Поскольку $|t| < \frac{\pi}{2}$, то теорема Карлсона о единственности аналитической функции с заданными значениями в целых точках (см., например, [16, гл. 5]) влечет справедливость (21) для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Учитывая теперь, что

$$P_{\lambda}^{-M}(0) = \frac{2^{-M}}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\lambda - M)\right) \frac{\Gamma(\frac{1+\lambda-M}{2})}{\Gamma(1+\frac{\lambda+M}{2})} \tag{22}$$

(см. [14, гл. 3, п. 3.4 (20)]), получаем (19). Равенство (20) доказывается аналогично. $\square$

Лемма 3. *Пусть* $[a, b] \subset (0, +\infty)$. *Пусть также* $U \in C[a, b]$ *и* $U > 0$ *на* $[a, b]$. *Тогда существует последовательность* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *четных алгебраических многочленов, удовлетворяющих условиям:*

1) $\deg P_n(x) \le n$;

2) $P_n \ge 0$ *на* $[a, b]$;

3) имеет место равенство

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x),$$

в котором ряд сходится равномерно на $[a, b]$.

Доказательство этой леммы легко получается с помощью классической аппроксимационной теоремы Вейерштрасса, примененной к четному продолжению функции U на $[-b, b]$.

4. Доказательство основных результатов.

Доказательство теоремы 1. При $n \in \mathbb{Z}_+$ имеем (см. (10) и лемму 1)

$$\begin{aligned} P_{M+2n+1}^{-k}(\cos\theta) + P_{M+2n+1}^{-k}(-\cos\theta) &= \frac{2^{1-k}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{M+2n+k+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-M-2n}{2}\right)} (\sin\theta)^k \times \\ &\times F\left(\frac{k-M-2n-1}{2}, \frac{k+M+2n+2}{2}; \frac{1}{2}; \cos^2\theta\right) = \\ &= \frac{2^{1-k}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{M+2n+k+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k-M-2n}{2}\right)} (\sin\theta)^{-k} \times \\ &\times \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^j \left(-\frac{k+M+2n+1}{2}\right)_j \left(\frac{M+2n-k+2}{2}\right)_j}{(1-k)_j \left(\frac{1}{2}\right)_j} \binom{k-1}{j} (\cos\theta)^{2j}. \end{aligned} \tag{23}$$

По лемме 2 функция $P_{M+2n+1}^{-k}(\cos\theta)e^{ik\varphi}$, а поэтому и левая часть в (23), умноженная на $e^{ik\varphi}$, принадлежат классу $\mathfrak{M}_M(K_0)$. Полагая в (23)

$$n = \frac{k-M-2}{2}, \frac{k-M-2}{2} - 1, ..., 0,$$

получаем (2). $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть $a = 1$, $b = \frac{1}{\sin\delta}$. По лемме 3 имеем равенство

$$W\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{M+2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x), \tag{24}$$

где P_n – неотрицательный четный алгебраический многочлен степени не выше n и ряд (24) сходится равномерно на $[a, b]$. Полагая $x = \frac{1}{\sin\theta}$, из (24) имеем

$$W(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{1}{(\sin\theta)^{M+2}} \tag{25}$$

при всех $\theta \in [\delta, \pi/2]$. Из четности функции $W(\theta - \frac{\pi}{2})$ следует, что ряд в правой части (25) сходится к $W(\theta)$ равномерно на $[\delta, \pi - \delta]$. Теперь положим

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{\exp(i(n + M + 2)!\varphi)}{(\sin\theta)^{M+2}}. \tag{26}$$

В силу вышесказанного и неотрицательности P_n ряд в (26) сходится равномерно в $\overline{K_\delta}$ (это следует из критерия Коши). Отсюда и из теоремы 1 получаем, что f является четной функцией из $\mathfrak{M}_M(K_\delta)$. Пусть α – рациональное число на $[0, 1)$. Тогда $\alpha = p/q$, где $p \in \mathbb{Z}_+$, $q \in \mathbb{N}$. Учитывая, что $(n+M+2)!/q \in \mathbb{N}$ при $n > q$, из (25) и (26) находим

$$f(\theta, 2\pi\alpha) = f\left(\theta, 2\pi\frac{p}{q}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{\exp\left(i(n + M + 2)!2\pi\frac{p}{q}\right)}{(\sin\theta)^{M+2}} =$$

$$\sum_{n=0}^{q} P_n\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{\exp\left(i(n + M + 2)!2\pi\frac{p}{q}\right)}{(\sin\theta)^{M+2}} + \sum_{n=q+1}^{\infty} P_n\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{\exp\left(i(n + M + 2)!2\pi\frac{p}{q}\right)}{(\sin\theta)^{M+2}} =$$

$$\sum_{n=0}^{q} P_n\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{\exp\left(i(n + M + 2)!2\pi\frac{p}{q}\right)}{(\sin\theta)^{M+2}} + W(\theta) - \sum_{n=0}^{q} P_n\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{1}{(\sin\theta)^{M+2}}.$$

Отсюда следует (3). $\square$

Доказательство теоремы 3. Выберем в качестве W непрерывную функцию, удовлетворяющую условиям теоремы 2, не дифференцируемую ни в одной точке интервала $(\delta, \pi - \delta)$. По теореме 2 существует четная функция $f \in \mathfrak{M}_M(K_\delta)$, удовлетворяющая условию (3). Отсюда и из свойств W следует требуемое утверждение. $\square$

1. *Minkowski H.* Über die Körper konstanter Breite // Mat. Sbornik. – 1904. – V. 25. – P. 505–508.
2. *Паламодов В.П.* Интегральная геометрия и компьютерная томография. – М.: Изд-во МК НМУ, 1997. – 68 с.
3. *Кириллов А.А.* Элементы теории представлений. – М.: Наука, 1978. – 343 с.
4. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.

5. *Helgason S.* Integral geometry and Radon transforms. – New York: Springer, 2010. – 301 p.
6. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
7. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – London: Springer, 2009. – 671 p.
8. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat integral geometry on symmetric spaces. – Basel: Birkhäuser, 2013. – 592p.
9. *Quinto E.T.* Pompeiu transforms on geodesic spheres in real analytic manifolds // Israel J. Math. – 1993. – V. 84. – P. 353–363.
10. *Quinto E.T.* Radon transforms on curves in the plane // Tomography, Impedance Imaging, and Integral Geometry (South Hadley, MA), Lectures in Appl. Math. – 1994. – V. 30. – P. 231–244.
11. *Zhou Y.* Two radius support theorem for the sphere transform // J. Math. Anal. Appl. – 2001. – V. 254. – P. 120–137.
12. *Quinto E.T.* The invertibility of rotation invariant Radon transforms // J. Math. Anal. Appl. – 1983. – V. 91. – P. 510–521; erratum, J. Math. Anal. Appl. – 1983. – V. 94. – P. 602–603.
13. *Kurusa A.* Support theorems for the totally geodesic Radon transform on constant curvature spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1994. – V. 122. – P. 429–435.
14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1. – М.: Наука, 1973. – 296 с.
15. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп. 2-е изд. – М.: Наука, 1991. – 576 с.
16. *Titchmarsh E.C.* The Theory of Functions, 2nd ed. – New York: Oxford University Press, 1939. – 460 p.

V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, I. M. Savostyanova

Properties of the kernel of generalized Minkowski transform on a sphere.

We investigate the generalized Minkowski transform relating functions on a sphere with their weighted integrals over closed geodesics. It is shown that a non-trivial part of the kernel of this transform contains continuous functions with a very intricate structure. In particular, these functions can be non-differentiable on a dense set.

Keywords: *spherical means, Minkowski transform, Legendre functions.*

Донецкий национальный ун-т
`valeriyvolchkov@gmail.com`
`v.volchkov@mail.donnu.edu.ua`
`cavost@mail.ru`

Получено 15.05.14