УДК 517.95

©2014. **В. П. Бурский, А. А. Мирошникова**

К ТЕОРИИ РАСШИРЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Известная гильбертова схема построения общей теории граничных задач посредством изучения расширений дифференциального оператора в области переносится на случай банаховых пространств типа $L_p, p > 1$.

Ключевые слова: *расширения дифференциальных операторов, банаховы пространства.*

1. Введение. Основные положения общей теории граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными были заложены в работах М.Й. Вишика [4] и Л. Хёрмандера [5]. Важно заметить, что построения Вишика, Хёрмандера и их последователей проводились в гильбертовых пространствах. В книге [2] была предложена функциональная гильбертова схема дальнейшего построения теории и была намечена структура развития теории для случая банаховых пространств. В работе авторов [1] были сделаны некоторые шаги по осуществлению намеченных построений. Настоящая работа содержит доработанную схему построения основ теории расширений в банаховых пространствах. В работе сформулированы теоремы, которые естественно вытекают из предлагаемой схемы, полные доказательства которых, однако, занимают большой объем и будут опубликованы в соответствующей большой работе.

2. Определения и обозначения. В этой статье речь пойдет об изучении граничных задач для дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}(x,D)u = f, \tag{2.1}$$

где $\mathcal{L}(x,D) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha,\ \ D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\cdot\partial^{|\alpha|}/\partial x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\partial x_n^{\alpha_n}$ – общая дифференциальная операция с гладкими комплекснозначными коэффициентами $a_\alpha \in C^\infty(\bar\Omega)$ в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, находящейся с одной стороны от её гладкой $(n-1)$-мерной границы $\partial\Omega$.

Представляется удобным сформулировать абстрактную схему, в рамках которой будут производиться построения.

Пусть $p > 1,\ q = p/(p-1)$ и нам даны:

I_1) два рефлексивных банаховых пространства B_p и B_q, которые будем называть **центральными**. При этом $B_p = (B_q)^*$, где $*$ – обычное банаховское сопряжение;

два рефлексивных банаховых пространства $\overset{\circ}{B}{}^l_p \subset B_p$, $\overset{\circ}{B}{}^l_q \subset B_q$ (с некоторым $l \in \mathbb{N}$), которые будем называть **финитными**, причем выполнено условие:

вложения $\overset{\circ}{B}{}^l_p \subset B_p$, $\overset{\circ}{B}{}^l_q \subset B_q$ – плотны.

I_2) четыре линейных непрерывных операторов $\mathcal{L}_p : \overset{\circ}{B}{}^l_p \to B_p$, $\mathcal{L}^+_p : \overset{\circ}{B}{}^l_p \to B_p$, $\mathcal{L}_q : \overset{\circ}{B}{}^l_q \to B_q$, $\mathcal{L}^+_q : \overset{\circ}{B}{}^l_q \to B_q$, связанных соотношениями

$$< \mathcal{L}_p u, v >=< u, \mathcal{L}^+_q v >, u \in B^l_p\ , v \in B_q,$$

$$< \mathcal{L}_q u, v >=< u, \mathcal{L}^+_p v >, u \in B^l_q\ , v \in B_p,$$

где хотя бы один из элементов u или v финитен.

В изложенной схеме мы подразумеваем, что пространства выбираются как указано ниже, но ничто не мешает любому другому выбору, лишь бы выполнялись описанные предположения. Итак, можно считать, что: $B_p = L_p(\Omega)$, $\overset{\circ}{B}{}^l_p = \overset{\circ}{W}{}^l_p(\Omega)$, $B^l_p = W^l_p(\Omega)$, $B_p = L_p(\Omega)$, $\overset{\circ}{B}{}^l_p = \overset{\circ}{W}{}^l_p(\Omega)$, $B^l_p = W^l_p(\Omega)$. Мы будем понимать пространство $\overset{\circ}{W}{}^l_p(\Omega)$ как замыкание $C^\infty_0(\Omega)$ в соболевской норме, а пространство $W^l_p(\Omega)$, скажем, как замыкание пространства $C^\infty(\bar{\Omega}) = \{u|_\Omega\ \big| u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ в этой же норме. Аналогично вводятся пространства с индексом $q = p/(p-1)$.

Операция $\mathcal{L}$ порождает формально сопряжённую по Лагранжу операцию $\mathcal{L}^+ \cdot = \sum\limits_{|\alpha| \le l} D^\alpha(a^*_\alpha(x)\ \cdot)$, где $a^*_\alpha(x)$ – сопряжённое число. Операция $\mathcal{L}$ порождает операторы $\mathcal{L}_p$ и $\mathcal{L}_q$, а операция $\mathcal{L}^+$ порождает операторы $\mathcal{L}^+_p$ и $\mathcal{L}^+_q$ из пункта I_2). Равенства пункта (I_2) теперь есть формулы Грина, где граничные члены исчезли из-за финитности. Мы видим из этих определений, что предположения пунктов I_1) и I_2) выполнены.

3. Основные положения общей теории граничных задач. Далее будем строить теорию расширений дифференциальных операторов.

Введём две нормы графика:

$$\| u \|^2_{L_p} = \| u \|^2_{B_p} + \| \mathcal{L}u \|^2_{B_p},$$

$$\| u \|^2_{L_q} = \| u \|^2_{B_q} + \| \mathcal{L}u \|^2_{B_q},$$

конечные на элементах из пространств B^l_p и B^l_q. Обозначим пополнение пространства $\overset{\circ}{B}{}^l_p$ по норме $\| \cdot \|^2_{L_p}$ и пополнение пространства $\overset{\circ}{B}{}^l_q$ по норме $\| \cdot \|^2_{L_q}$, соответственно, $D(L_{p0})$, $D(L_{q0})$. Оператор $\mathcal{L}$ при этом допускает продолжения $\mathcal{L}_p$, $\mathcal{L}_q$ по непрерывности, соответственно, на пространства $D(L_{p0})$ и $D(L_{q0})$ в силу оценок $\|\mathcal{L}u\|_{B_p} \le \|u\|_{L_p}$ и $\|\mathcal{L}u\|_{B_q} \le \|u\|_{L_q}$. Так полученные операторы $L_{p0} : D(L_{p0}) \to B_p$ и $L_{q0} : D(L_{q0}) \to B_q$ будем называть минимальными расширениями операторов $\mathcal{L}\big|_{\overset{\circ}{B}{}^l_p}$ и $\mathcal{L}\big|_{\overset{\circ}{B}{}^l_q}$, соответственно, или просто **минимальными операторами** и, соответственно, обозначать L_{p0} и L_{q0}. Так же введём нормы графика:

$$\| u \|^2_{L^+_p} = \| u \|^2_{B_p} + \| \mathcal{L}^+ u \|^2_{B_p},$$

$$\| u \|^2_{L^+_q} = \| u \|^2_{B_q} + \| \mathcal{L}^+ u \|^2_{B_q},$$

пространства $D(L^+_{p0})$, $D(L^+_{q0})$ и операторы L^+_{p0}, L^+_{q0}.

Мы вводим максимальные расширения L_p и L_q или просто **максимальные операторы** формулами $L_p = (L^+_{q0})^*$ и $L_q = (L^+_{p0})^*$. Аналогично определение максимальных операторов $L^+_p = L^*_{q0}$ и $L^+_q = L^*_{p0}$.

Введём теперь **граничные пространства** $C(L_p)$, $C(L_q)$, $C(L^+_p)$, $C(L^+_q)$ операторов L_p, L_q, L^+_p, L^+_q как фактор-пространства $C(L_p) = D(L_p)/D(L_{p0})$, $C(L_q) = D(L_q)/D(L_{q0}), C(L^+_p) = D(L^+_p)/D(L^+_{p0})$, $C(L^+_p) = D(L^+_p)/D(L^+_{p0})$, а также фактор-отображения $\Gamma_p : D(L_p) \to C(L_p)$, $\Gamma_q : D(L_q) \to C(L_q)$, $\Gamma^+_p : D(L^+_p) \to C(L^+_p)$, $\Gamma^+_q : D(L^+_q) \to C(L^+_q)$.

Замечание 3.1. Пусть нам дан замкнутый оператор $T : D(T) \to B_2,\ D(T) \subset B_1$ с плотной областью определения, действующий в банаховых пространствах. Напомним [7], что оператор T называется **корректно разрешимым**, если выполнена априорная оценка

$$\exists C > 0, \forall u \in D(T), \|u\|_{B_1} \le C\|Tu\|_{B_2}.$$

Очевидно, это равносильно тому, что ядро $\ker T$ тривиально, а образ $\operatorname{Im} T$ замкнут, и равносильно тому, что оператор $T^- : \operatorname{Im} T \to D(L)$, заданный как $TT^- = 1_{\operatorname{Im} T}$, является изоморфизмом (в линейном пространстве $\operatorname{Im} T$ вводится индуцированная из B_2 топология). Заметим, что замкнутое подпространство $\operatorname{Im} T \overset{i}{\subset} B_2$ не обязано быть прямым слагаемым, но разложение в прямую сумму $B_2 = \operatorname{Im} T \oplus N$ с некоторым замкнутым подпространством N равносильно существованию непрерывной проекции $B_2 \xrightarrow{\pi} \operatorname{Im} T$ такой, что $\pi i = 1_{\operatorname{Im} T}$ (см. ниже утверждение 4.1). Тогда, если еще оператор T корректно разрешим, то можно построить непрерывный левый обратный $T^{-1} : B_2 \to D(T)$, $T^{-1} = T^-\pi$. Наоборот, если существует непрерывный левый обратный $T^{-1} : B_2 \to D(T)$ к оператору T, то выполнена оценка $\|u\|_{B_1} \le C\|Tu\|_{B_2}$ и оператор TT^{-1} расщепляет последовательность $0 \to \operatorname{Im} T \to B_2 \to N = B_2/\operatorname{Im} T \to 0$, т.е. $\operatorname{Im} T$ является прямым слагаемым в пространстве B_2.

Ниже мы будем рассматривать следующие условия:

$$\text{оператор} \quad L_{p0} : D(L_{p0}) \to B^+_p \text{ корректно разрешим;} \qquad (3.1)_p$$

$$\text{оператор} \quad L_{q0} : D(L_{q0}) \to B^+_q \text{ корректно разрешим;} \qquad (3.1)_q$$

$$\text{оператор } L^+_{p0} : D(L^+_{p0}) \to B_p \text{ корректно разрешим;} \qquad (3.2)_p$$

$$\text{оператор } L^+_{q0} : D(L^+_{q0}) \to B_q \text{ корректно разрешим;} \qquad (3.2)_q$$

$$\text{оператор} \quad L_{p0} : D(L_{p0}) \to B^+_p \text{ имеет непрерывный левый обратный } L^{-1}_{p0}; \qquad (3.3)_p$$

$$\text{оператор} \quad L_{q0} : D(L_{q0}) \to B^+_q \text{ имеет непрерывный левый обратный } L^{-1}_{q0}; \qquad (3.3)_q$$

$$\text{оператор } L^+_{p0} : D(L^+_{p0}) \to B_p \text{ имеет непрерывный левый обратный} (L^+_{p0})^{-1}; \qquad (3.4)_p$$

$$\text{оператор } L^+_{q0} : D(L^+_{q0}) \to B_q \text{ имеет непрерывный левый обратный} (L^+_{q0})^{-1}; \qquad (3.4)_q$$

Введем понятие общей граничной задачи. Рассмотрим подходы М.Й. Вишика и Л. Хёрмандера, одновременно вводя необходимые ниже определения.

Следуя М.Й. Вишику [4], будем считать, что задание граничного условия проявляется посредством указания области определения $D(L_{pB})$ некоторого оператора L_{pB} , который является расширением минимального L_{p0} и сужением максимального L_p операторов: $D(L_{p0}) \subset D(L_{pB}) \subset D(L_p)$. Такие операторы принято называть **расширениями** (оператора L_{p0}), при этом расширение $L_{pB} : D(L_{pB}) \to B_p^+$ называется **разрешимым**, если существует непрерывный двусторонний обратный оператор $L_{pB}^{-1} : B_p^+ \to D(L_{pB})$, $L_{pB}L_{pB}^{-1} = \mathrm{id}_{B_p^+}$, $L_{pB}^{-1}L_{pB} = \mathrm{id}_{D(L_{pB})}$. Очевидно, что такой оператор разрешает граничную задачу $u \in D(L_{pB})$ для уравнения $L_pu = f$ с любой правой частью $f \in B_p^+$. Оператор $U : D(U) \to B_p^+$, являющийся сужением оператора L_p, назовём **разрешимым сужением**, если у него имеется непрерывный двусторонний обратный. Этот обратный оператор является непрерывным правым обратным к оператору L_p и наоборот, каждый непрерывный правый обратный M_p к оператору L_p порождает некоторое разрешимое сужение с областью определения $D(U) = \mathrm{Im}\, M_p$, которое является разрешимым расширением (оператора L_{p0}), если $D(L_{p0}) \subset \mathrm{Im}\, M_p$. Расширение L_{pB} называется **вполне разрешимым**, если оно разрешимо и композиция обратного оператора L_{pB}^{-1} с вложением $i_{D(L_p)} : D(L_p) \subset B_p$ вполне непрерывна, то есть если вполне непрерывен оператор L_{pB}^{-1}, понимаемый как действующий из B_p^+ в B_p. Мы будем также называть расширение $L_{pB} : D(L_{pB}) \to B_p^+$ **нормально разрешимым**, если образ $\mathrm{Im} L_{pB}$ – замкнут. Подобным образом вводим определения разрешимого, вполне разрешимого и нормально разрешимого расширения операторов L_{p0}^+, L_{q0}, L_{q0}^+.

Следуя Л. Хёрмандеру [5], назовём **однородной граничной задачей** соотношения

$$L_pu = f, \quad \Gamma_pu \in B, \tag{3.5$_p$}$$

где $B \subset C(L_p)$ – линейное подпространство в граничном пространстве, определяющее граничную задачу. Нетрудно видеть, что граничное условие типа $u \in D(L_{pB})$ порождает условие $\Gamma_pu \in B$, где $B = D(L_{pB})/D(L_{p0})$, и наоборот, подпространство $B \subset C(L_p)$ порождает некоторый оператор L_{pB} с областью определения $D(L_{pB}) = \Gamma_p^{-1}(B)$, являющийся сужением оператора L_p на пространство $D(L_{pB})$ и расширением оператора L_{p0}, и который замкнут, если и только если пространство B замкнуто в $C(L_p)$, или, что то же, если пространство $D(L_{pB})$ замкнуто в $D(L_p)$. Граничная задача $(3.5)_p$ называется **корректно поставленной** или просто **корректной**, если ею порождённый оператор L_{pB} является разрешимым расширением оператора L_{p0}, т.е. если оператор $L_{pB} : D(L_{pB}) \to B_p$ имеет непрерывный двусторонний обратный. Аналогично с q.

Сформулируем теперь основные утверждения общей теории граничных задач (доказательства утверждений 3.1–3.4 см. в разделе 4).

Теорема 3.1$_p$. *У оператора L_{p0} существует разрешимое расширение и для оператора L_p существует корректная граничная задача тогда и только тогда, когда выполнены условия $(3.3)_p$ и $(3.4)_q$.*

Теорема 3.1$_q$. *У оператора L_{q0} существует разрешимое расширение и для оператора L_q существует корректная граничная задача тогда и только тогда, когда выполнены условия $(3.3)_q$ и $(3.4)_p$.*

Справедливы аналогичные утверждения для операторов с индексом «+».

Строение области определения максимального оператора L_p описывает

Теорема 3.2$_p$. *В условиях $(3.3)_p$ и $(3.4)_q$ имеет место разложение в прямую сумму (здесь и ниже в этом пункте прямая сумма понимается в категории банаховых пространств, т.е. с непрерывными операторами вложения и проекции, с категориями связан и наш выбор обозначения $\oplus$ для прямой суммы банаховых пространств)*

$$D(L_p) = D(L_{p0}) \oplus \ker L_p \oplus W_p, \tag{3.6$_p$}$$

где W_p – некоторое подпространство в $D(L_p)$ такое, что $L_p|_{W_p} : W_p \to (\ker L_q^+)^*$ – изоморфизм.

Верно следующее аналогичное утверждение для максимального оператора L_q:

Теорема 3.2$_q$. *В условиях $(3.3)_q$ и $(3.4)_p$ имеет место разложение в прямую сумму*

$$D(L_q) = D(L_{q0}) \oplus \ker L_q \oplus W_q, \tag{3.6$_q$}$$

где W_q – некоторое подпространство в $D(L_q)$ такое, что $L_q|_{W_q} : W_q \to (\ker L_p^+)^*$ – изоморфизм.

Справедливы аналогичные утверждения с оператором с индексом «+».

Следуя М.Й. Вишику, сформулируем теперь критерий разрешимости расширения.

Теорема 3.3$_p$. *Пусть выполнены условия $(3.3)_p$, $(3.4)_q$. Для того, чтобы расширение L_{pB} было бы разрешимым (а задача $(3.5)_p$ – корректна в пространстве B_p), необходимо и достаточно, чтобы существовал такой непрерывный оператор $V_p : \ker L_{p0}^{-1} \to \ker L_p$, что*

$$D(L_{pB}) = D(L_{p0}) \oplus G(V_p L_p|_{W_p}), \tag{3.7$_p$}$$

где $G(V_p L_p|_{W_p}) = \{w + V_p L_p w \mid w \in W_p\}$ – график оператора $V_p L_p|_{W_p}$, вложенный в $D(L_p)$. При этом $D(L_p) = D(L_{pB}) \oplus \ker L_p$.

Оператор V_p будем называть **оператором Вишика** граничной задачи $(3.5)_p$.

Следуя Л. Хёрмандеру, сформулируем теперь критерий корректности граничной задачи.

Теорема 3.4$_p$. *Пусть выполнены условия $(3.3)_p$, $(3.4)_q$. Для того, чтобы задача $(3.5)_p$ была корректна, необходимо и достаточно, чтобы имело место разложение в прямую сумму $C(L_p) = C(\ker L_p) \oplus B$, где $C(\ker L_p) = \Gamma_p \ker L_p$ – граничное пространство ядра $\ker L_p$.*

Прямое слагаемое B в последнем разложении будем называть **слагаемым Хёрмандера**. Ясно, что в этом случае B – график оператора $\Gamma_{p\,\ker} V_p$, вложенный в $C(L_p)$, где мы обозначили $\Gamma_{p\,\ker} = \Gamma|_{\ker L_p}$.

Теоремы 3.3_p и 3.4_p, очевидно, имеют аналоги с оператором с индексом «+», а также и аналоги с индексом q.

Доказательства утверждений вида 3.1–3.4 будут предоставлены в разделе 4. Наряду с условиями вида (3.1)–(3.4) будут использоваться также следующие условия:

$$\text{оператор } L_p : D(L_p) \to B_p \text{ сюрьективен;} \tag{3.8_p}$$

$$\text{оператор } L_q : D(L_q) \to B_q \text{ сюрьективен;} \tag{3.8_q}$$

$$\text{оператор } L_p^+ : D(L_p^+) \to B_p \text{ сюрьективен;} \tag{3.9_p}$$

$$\text{оператор } L_q^+ : D(L_q^+) \to B_q \text{ сюрьективен;} \tag{3.9_q}$$

$$\text{оператор } L_{p0} \text{ нормально разрешим;} \tag{3.10_p}$$

$$\text{оператор } L_{q0} \text{ нормально разрешим;} \tag{3.10_q}$$

$$\text{оператор } L_{p0}^+ \text{ нормально разрешим;} \tag{3.11_p}$$

$$\text{оператор } L_{q0}^+ \text{ нормально разрешим.} \tag{3.11_q}$$

Замечание 3.2. По определению максимального оператора условие $(3.8)_p$ эквивалентно условию $(3.2)_q$, а условие $(3.8)_q$ эквивалентно условию $(3.2)_p$ ([7], п.3).

Рассматривая основной пример из п.2, отметим, что, например, условие $(3.1)_p$ означает выполнение неравенства

$$\|\mathcal{L}\varphi\|_{L_p(\Omega)} \geq C\|\varphi\|_{L_p(\Omega)} \tag{3.12}$$

для финитных бесконечно дифференцируемых функций. Хорошо известно неравенство Хёрмандера $\|\mathcal{L}\varphi\|_{L_2(\Omega)} \geq C\|\varphi\|_{L_2(\Omega)}$ для функций из $C_0^\infty(\Omega)$ и скалярных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в ограниченной области. Однако в пространстве $L_p(\Omega)$ с $p \neq 2$ такое неравенство не доказано для более или менее широких классов операторов. Тем не менее, можно указать некоторые операторы, где неравенство (3.12) имеет место.

Замечание 3.3. Для скалярной дифференциальной операции $\Box = \partial^2/\partial x_1 \partial x_2$ в плоской ограниченной области Ω неравенство (3.12) выполняется из-за возможности разложения оператора в произведение операторов первого порядка и неравенства такого вида $\|u\|_{L_p(\Omega)} \leq C\|u_{x_k}\|_{L_p(\Omega)}$, $k = 1, 2$, $1 \leq p < \infty$. Действительно, для одномерного x, $p \geq 1$ и финитной гладкой на $(0,1)$ функции по неравенству Гельдера имеем

$$\int_0^1 |u(x)|^p\,dx = \int_0^1 |u(x) - u(0)|^p\,dx = \int_0^1 \left|\int_0^x u'(t)dt\right|^p dx \leq \int_0^1 \int_0^x \left|u'(t)\right|^p dtdx \leq$$
$$\leq \int_0^1 dx \int_0^1 \left|u'(t)\right|^p dt = \int_0^1 \left|u'(t)\right|^p dt.$$

Тот же вывод мы делаем для произвольной операции первого порядка с постоянными вещественными коэффициентами $\mathcal{L} = a_1\partial/\partial x_1 + a_2\partial/\partial x_2$, поскольку линейным преобразованием координат мы можем свести ее к $\partial/\partial y_1$.

4. Коммутативная диаграмма. Приступим к доказательству теорем 3.1–3.4, анонсированных в п.3. Напомним, что в предабелевой категории (то есть аддитивной с ядром и коядром у каждого морфизма) последовательность объектов и морфизмов

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{M} C \to 0 \tag{4.1}$$

называется точной, если образ предыдущего оператора равен ядру последующего, и говорят, что такая последовательность расщепляется, если $B = A \oplus C$. Общеизвестным ([6]) является следующее утверждение.

Утверждение 4.1. *Для расщепления последовательности* (4.1) *достаточно существования правого обратного морфизма к M или существования левого обратного морфизма к i.*

Предабелевой является категория $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ линейных пространств и линейных операторов (которая, сверх того, является абелевой), категория $\mathcal{B}$ банаховых пространств и непрерывных линейных операторов и ее подкатегория $\mathcal{B}_{cl\ im}$ банаховых пространств и непрерывных линейных операторов с замкнутыми образами (т.е. нормально разрешимых). Для этих категорий, в частности, точность в члене A означает инъективность оператора i, а точность в члене C означает сюрьективность оператора M.

Пусть вначале мы находимся в условиях категории $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ линейных пространств. Для максимального оператора L_p тогда мы имеем точную последовательность $0 \to \ker L_p \to D(L_p) \to \operatorname{Im} L_p \to 0$. Имеется похожая последовательность для минимального оператора L_{p0}, а кроме того, точные последовательности факторизации $0 \to \operatorname{Im} L_{p0} \to \operatorname{Im}(L_p) \xrightarrow{\Gamma_{\mathrm{Im}}} \operatorname{Im} L_p / \operatorname{Im} L_{p0} \to 0$, $0 \to D(L_{p0}) \to D(L_p) \xrightarrow{\Gamma_p} C(L_p) \to 0$, где мы использовали определение граничного пространства $C(L_p)$. Введем еще фактор-пространство $C(\ker L_p) := \ker L_p / \ker L_{p0}$ с фактор-отображением $\Gamma_{p\ \ker}$ и будем использовать соответствующую короткую точную последовательность. Собрав это вместе, получим диаграмму, в которой введены обозначения для вложений и для упрощения записи записано $L_0 := L_{p0}$, $L := L_p$, $\Gamma := \Gamma_p$, $\Gamma_{\ker} := \Gamma_{p\ \ker}$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \ker L_0 & \xrightarrow{i_{L_0}} & D(L_0) & \xrightarrow{L_0} & \operatorname{Im} L_0 & \to & 0 \\
 & & \downarrow i_{\ker} & & \downarrow i_0 & & \downarrow i_{\mathrm{Im}} & & \\
0 & \to & \ker L & \xrightarrow{i_L} & D(L) & \xrightarrow{L} & \operatorname{Im} L & \to & 0 \\
 & & \downarrow \Gamma_{\ker} & & \downarrow \Gamma & & \downarrow \Gamma_{\mathrm{Im}} & & \\
0 & \to & C(\ker L) & \xrightarrow{i_C} & C(L) & \xrightarrow{L_C} & \operatorname{Im} L / \operatorname{Im} L_0 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array} \tag{4.2}$$

Здесь операторы i_C и L_C определены формулами $i_C(u + \ker L_0) = u + D(L_0)$, $L_C(u + D(L_0)) = Lu + \operatorname{Im}(L_0)$. Коммутативность всех квадратов очевидна. Таким образом, диаграмма (4.2) коммутативна, все столбцы и две верхние строки точны. Из алгебраической 3×3-леммы (см. [6]) получаем точность нижней строки. Доказано

Утверждение 4.2. *Диаграмма* (4.2) *коммутативна, её строки и столбцы точны.*

Ниже мы также будем использовать следующий частный случай диаграммы (4.2).

Замечание 4.1. Для случая $\ker L_{p0} = 0$, $\mathrm{Im}\ L_p = B_p =: B$ имеем диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & D(L_0) & \xrightarrow{L_0} & \mathrm{Im}\ L_0 & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow i_0 & & \downarrow i_{\mathrm{Im}} & & \\
0 & \rightarrow & \ker L & \xrightarrow{i_L} & D(L) & \xrightarrow{L} & B & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \Gamma_{\ker} & & \downarrow \Gamma & & \downarrow \Gamma_{\mathrm{Im}} & & \\
0 & \rightarrow & C(\ker L) & \xrightarrow{i_C} & C(L) & \xrightarrow{L_C} & B/\ \mathrm{Im}\ L_0 & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array} \tag{4.3}$$

Замечание 4.2. Напомним, что диаграмма (4.2) записана для случая $L_0 = L_{p0}$, $L = L_p$. Но точно такую же диаграмму мы можем построить для случая $L_0 = L_{q0}$ $L = L_q$. Если к тому же $\ker L_{q0} = 0$, $\mathrm{Im}\, L_q = B_q = B$, то имеет место диаграмма (4.3) в этих обозначениях.

Теперь перейдем в категорию банаховых пространств $\mathcal{B}$. Для определенности будем рассматривать случай $L_0 = L_{p0}$, $L = L_p$. Пространство $D(L)$ является банаховым пространством с нормой графика, $D(L)$ – его замкнутое подпространство. Операторы L и L_0 непрерывны по определению, поэтому их ядра замкнуты в топологии $D(L)$. В их образах введем фактор-норму, поэтому объекты, входящие в диаграмму (4.2), кроме $B/\ \mathrm{Im}\ L_0$, являются банаховыми пространствами. Диаграмма (4.2) (как и (4.3)) станет диаграммой категории $\mathcal{B}$, если операторы Γ_{Im} и L_C будут непрерывны, другими словами, если их ядра $\mathrm{Im}\, L_0$ и $C(\ker L)$ замкнуты.

Непрерывность одного из двух операторов Γ_{Im} и L_C влечёт непрерывность другого. В самом деле, пусть, к примеру, непрерывен оператор Γ_{Im} и пусть последовательность классов v_k сходится к нулю в фактор-пространстве $C(L) = D(L)/D(L_0)$. Оператор Γ^{-1} существует в категории $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$, но он не обязательно непрерывен, обозначим $\Gamma^{-1}v_k = y_k \in D(L)$. Тогда то, что $v_k = y_k + D(L_0)$ сходится к нулю в $C(L)$, влечет, что $\exists a_k \in D(L_0), y_k + a_k \to 0$ в $D(L)$, и для оператора $L_C v = \Gamma_{\mathrm{Im}} L \Gamma^{-1} v$ имеем: $L_C v_k = \Gamma_{\mathrm{Im}}\, L y_k = \Gamma_{\mathrm{Im}}\, L(y_k + a_k - a_k) = L(y_k + a_k) +\ \mathrm{Im}\, L_0 \to 0$ в $\mathrm{Im}\, L/\ \mathrm{Im}\, L_0$, что и требовалось. Аналогично доказывается непрерывность оператора Γ_{Im} при данной непрерывности оператора L_C.

Здесь и ниже обозначение A^{-1} для какого-нибудь оператора A из диаграммы (4.2) означает какой-нибудь правый или левый обратный к A линейный оператор, расщепляющий соответствующую последовательность диаграммы в смысле категории $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ комплексных линейных пространств.

Замечание 4.3. Условие $(3.3)_q$ влечет разложения $B_p = \ker L_p^+ \oplus\ \mathrm{Im}^* L_{q0}$ и $B_q =$

$\ker^* L_p^+ \oplus \operatorname{Im} L_{q0}$. Условие $(3.3)_p$ влечет разложения $B_q = \ker L_q^+ \oplus \operatorname{Im}^* L_{p0}$ и $B_p = \ker^* L_q^+ \oplus \operatorname{Im} L_{p0}$.

В работе [2] были доказаны следующие утверждения:

Теорема 4.1$_p$. *В категории $\mathcal{B}$ существование разрешимого расширения L_{pB} равносильно паре: свойству $(3.10)_p$ и разложению в прямую сумму*

$$D(L_p) = D(L_{p0}) \oplus \ker L_p \oplus W_p, \qquad (3.6)'_p$$

где $L_p|_{W_p} : W_p \to B_p/\ Im\, L_{p0}$ – изоморфизм (отметим, что разложение $(3.6)'_p$ – то же, что и $(3.6)_p$, но с другим образом у оператора $L_p|_{W_p}$).

Теорема 4.2$_p$. *В категории $\mathcal{B}$ свойство $(3.3)_p$ и вместе с ним свойство*

оператор $L_p : D(L_p) \to B_p$ имеет непрерывный правый обратный; $\qquad (4.4)_p$

равносильны паре: свойству $(3.10)_p$ и разложению в прямую сумму $(3.6)_p$, где $L_p|_{W_p} : W_p \to \ker^* L_q^+$ – изоморфизм.

Аналогичны утверждения с индексом q.

Доказательства теорем вида 3.1–3.3 получим из теорем вида 4.1, 4.2, принимая во внимание, что равенство $L_p M_p = id_{B_p^+}$ после сопряжения перейдёт в $M_p^* L_{p0}^+ = id_{D(L_{q0}^+)}$, и наоборот. Аналогично с индексом q. Мы здесь пользуемся сопряжением в смысле банаховых пространств для операторов с плотной областью определения [7].

Доказательства теорем вида 3.4 сразу следуют из теорем вида 3.3, причем, не привлекая структуру гильбертова пространства.

5. О проверке корректности граничной задачи. Здесь мы покажем, как может быть использована диаграмма (4.3) при доказательстве корректности граничной задачи (эти теоремы для случая гильбертового пространства получены в [2]).

Теорема 5.1$_p$. *В условиях $(3.3)_p$ и $(3.4)_q$ каждое разрешимое расширение L_{pB} раскладывается в прямую сумму $L_{pB} = L_{p0} \oplus L_{pB}^\partial$, где $L_{pB}^\partial : B \to \ker^* L_q^+$ – некоторый изоморфизм.*

Доказательство. Из коммутативности диаграммы (4.3) с $\operatorname{Im} L_p = B_p$ следует, что $L_p = L_{p0} \oplus L_C$, но $C(L_p) = \ker L_C \oplus B, \ker L_C = C(\ker L_p)$, поэтому оператор $L_{pB}^\partial = L_C|_B$ – изоморфизм. □

Таким же образом доказывается

Теорема 5.1$_q$. *В условиях $(3.3)_q$ и $(3.4)_p$ каждое разрешимое расширение L_{qB} раскладывается в прямую сумму $L_{qB} = L_{q0} \oplus L_{qB}^\partial$, где $L_{qB}^\partial : B \to \ker^* L_q^+$ – некоторый изоморфизм.*

Теорема 5.2$_p$. *В условиях $(3.3)_p$ и $(3.4)_q$ всякое линейное подпространство $B \subset C(L_p)$ такое, что*

1) $\Gamma_p^{-1} B \cap \ker L_p = 0$,

2) существует оператор $M_p : \ker^* L_q^+ \to D(L_p)$ со свойствами:

a) $L_p M_p = \mathrm{id}|_{\ker L_{p0}^{-1}}$, b) $\operatorname{Im} M_p \subset \Gamma_p^{-1} B$, *порождает корректную граничную задачу* $(3.5)_p$.

Доказательство. Отметим сперва, что из свойств 1) и 2a) следует линейность оператора M_p, а также его непрерывность по теореме Банаха. Заметим затем, что сумма $M_p \oplus L_{p0}^{-1} : B_p = \ker L_{p0}^{-1} \oplus \operatorname{Im} L_{p0} \to D(L_p)$ – некоторый непрерывный правый обратный к оператору L_p, а оператор $\Gamma_p M_p$ – непрерывный правый обратный к оператору L_C. Из свойств прямой суммы вытекает разложение в прямую сумму

$$C(L_p) = C(\ker L_p) \oplus B_1, \text{ где } B_1 = \operatorname{Im} \Gamma_p M_p.$$

Ясно, что $B \supset B_1$ и $B \cap C(\ker L_p) = 0$. Но это влечёт равенство $B = B_1$, поскольку, если элемент $b \in B$ такой, что $b \notin B_1$, то после факторизации $\Gamma_{p1} : C(L_p) \to C(\ker L_p)$ вдоль B_1 мы получим элемент $\Gamma_{p1} b \in C(\ker L_p)$, принадлежащий B, приходим к противоречию. □

Справедливо и аналогичное утверждение с индексом q.

1. *Бурский В.П., Мирошникова А.А.* О расширениях общих дифференциальных операторов в банаховых пространствах // Нелинейные граничные задачи. – 2009. – **19**. – С. 1–11.
2. *Бурский В.П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев.: Наукова думка, 2002. – 315 с.
3. *Боярский Б.В.* О задаче Дирихле для системы уравнений эллиптического типа в пространстве. – Бюлл. Польской АН. сер. мат., астр. и физ. наук. – 1960. – 8, № 1. – С. 19–23.
4. *Вишик М.Й.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений. – Тр. Моск. мат. о-ва, 1 (1952). – С. 187–246.
5. *Хёрмандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – М.: ИЛ, 1959.
6. *Маклейн С.* Гомология. – М.: Мир, 1966. – 543 с.
7. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971.

V. P. Burskii, A. A. Miroshnikova

To expansions theory of partial differential operators in Banach spaces.

Well-known scheme of the construction for general theory of boundary value problems by means of studying partial differential operators expansions in Hilbert space is transferred to the case of Banach spaces of L_p-type, $p > 1$.

Keywords: *expansions of PDO, Banach spaces.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`v30@dn.farlep.net`
`nastya.miroshnikova@gmail.com`

Получено 19.06.14