УДК 517.5

©2013. **Д. А. Зарайский**

ТЕОРЕМЫ ТИПА МОРЕРЫ ДЛЯ КОНТУРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО ОКРУЖНОСТЯМ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА

Пусть f – определённая на круге радиуса R в комплексной плоскости функция, имеющая нулевые контурные интегралы по окружностям радиуса $r < R$. В работе исследуется следующий вопрос: при каких дополнительных условиях на функцию f последняя будет голоморфной.

Ключевые слова: *теоремы типа Мореры.*

1. Введение. Классическая теорема Мореры утверждает, что непрерывная функция, имеющая нулевые интегралы по произвольному замкнутому контуру, необходимо является комплексно-аналитической. Естественно спросить, можно ли уменьшить семейство рассматриваемых контуров в такого рода утверждениях. Как доказывается в большинстве курсов комплексного анализа, можно ограничиться интегралами по произвольно малому треугольнику. Более сложным, однако, является соответствующий вопрос для семейств контуров, диаметры которых не могут быть выбраны произвольно малыми. Если контуры являются границами фигур, конгруэнтной данной, лежащих в области определения рассматриваемой функции, то, как впервые замечено в [1], имеется связь с тем, имеет ли фигура свойство Помпейю. Последнее состоит в том, что функция однозначно определяется своими интегралами по фигурам, конгруэнтной данной. По поводу различных работ в этом направлении см. обзоры [2, 3], монографию [4] (§ 5.4), а также статью [5].

Будем обозначать $B_R(x)$ – открытый круг радиуса R с центром в x в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $B_R = B_R(0)$. В работе рассматривается следующий вопрос: при каких дополнительных условиях на функцию f, определённую на круге B_R и голоморфную в круге B_r, из равенства нулю контурного интеграла

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz$$

для всех $z \in B_{R-r}$ следует голоморфность f на всём B_R. Результаты работы являются приложениями теорем единственности для функций с нулевыми интегралами по шарам, полученных в [6, 7].

Отметим, что в требовании голоморфности функции f в круге B_r радиус r является критическим. С одной стороны, существуют не голоморфные в B_R бесконечно дифференцируемые функции f, голоморфные в круге $B_{r-\varepsilon}$. С другой стороны, если функция f голоморфна в $B_{r+\varepsilon}$, по теореме 2, не требуется более никаких условий для голоморфности f во всём B_R.

2. Формулировки основных результатов. Если функция f $SO(2)$-финитна, т. е. $f(\lambda z) = \lambda^k f(z)$ для $|\lambda| = 1$, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(B_R)$, $R > r > 0$, функция f голоморфна в круге B_r, и для почти всех $z_0 \in B_{R-r}$ выполнено равенство*

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz = 0. \tag{1}$$

Пусть, кроме того, для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ выполнено равенство

$$f(\lambda z) = \lambda^k f(z) \quad \text{для } \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| = 1. \tag{2}$$

Тогда:

(1) *Если $f \in C^m(B_R)$, $m \geqslant |k+1| - 2$, то f голоморфна во всём круге B_R.*

(2) *Если $m \leqslant |k+1| - 3$, то существует удовлетворяющая условиям теоремы функция $f \in C^m(B_R)$, не голоморфная в B_R.*

Для функций f общего вида имеет место следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(B_R)$, $R > r > 0$, функция f голоморфна в круге B_r, и для почти всех $z_0 \in B_{R-r}$ выполнено равенство*

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz = 0.$$

Тогда, если ограничение f на $\mathcal{U}$ принадлежит $C^\infty(\mathcal{U})$ для некоторого открытого множества $\mathcal{U} \subset B_R$ такого, что $\mathcal{U} \cup -\mathcal{U} \supset \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = r\}$, то f голоморфна во всём круге B_R.

3. Доказательства результатов. Доказательству теорем предпошлём две леммы

Лемма 1. *Для $f \in L_{\mathrm{loc}}(B_R)$ выполнение равенства*

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz = 0$$

для п. в. z эквивалентно тому, что свёртка распределений $\frac{\partial \chi_{B_r}}{\partial \bar z} * f$ равна нулю на своей области определения B_{R-r}.

Доказательство. Как легко следует из теоремы Фубини, для комплекснозначной меры μ ограниченной вариации с компактным носителем (т.е. распределения $\mu \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ порядка 0) и функции $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathcal{U})$ их свёртка как распределений, $\mu * f$, является локально интегрируемой на открытом множестве

$$\{x \in \mathbb{R}^n \colon x - \operatorname{supp} \mu \subset \mathcal{U}\}$$

функцией, и

$$(\mu * f)(x) = \int_{\operatorname{supp}\mu} f(x-y)\, d\mu(y) \quad \text{для п. в. } x.$$

По формуле Стокса для пробной функции $g \in \mathscr{D}(\mathbb{C})$ имеем

$$\left\langle \frac{\partial \chi_{B_r}}{\partial \bar{z}}, g \right\rangle = -\left\langle \chi_{B_r}, \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right\rangle = -\int_{B_r} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(x+iy)\,dx\,dy =$$
$$= \frac{i}{2}\int_{B_r} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z)\,dz\wedge d\bar{z} = \frac{1}{2i}\int_{B_r} d(g(z)\,dz) = \frac{1}{2i}\int_{\partial B_r} g(z)\,dz.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial \chi_{B_r}}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{z}{2r}\omega_r(z),$$

где ω_r – поверхностная мера евклидова на окружности $|z| = 1$. Поэтому $\frac{\partial \chi_{B_r}}{\partial \bar{z}}$ является мерой ограниченной вариации, что и доказывает лемму. □

Лемма 2. *Распределение $f \in \mathscr{D}'(B_R \setminus \{0\})$ удовлетворяет (2) тогда и только тогда, когда она имеет вид*

$$f(z) = (z/|z|)^k F(|z|), \quad F \in \mathscr{D}'(0,R), \tag{3}$$

где $F(|z|)$ понимается как обратный образ $\rho^* F$ распределения F при отображении $\rho(z) = |z|$, причём F определяется по f однозначно. Отображение

$$f \mapsto \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$$

задаёт взаимно-однозначное линейное отображение пространства распределений $f \in \mathscr{D}'(B_R)$, удовлетворяющих (2) и равных нулю в круге B_r, на пространство распределений $f \in \mathscr{D}'(B_R)$, также равных нулю на B_r и таких, что для $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, $f(\lambda z) = \lambda^{k+1} f(z)$.

Доказательство. Очевидно, $f \in \mathscr{D}'(B_R \setminus \{0\})$ удовлетворяет (2) с $k = l$ тогда и только тогда, когда $(z/|z|)^m$ удовлетворяет (2) с $k = l + m$, поэтому первое утверждение леммы вытекает из частного случая $k = 0$, где оно соответствует общему виду радиальных распределений.

В полярных координатах $z = \rho e^{i\varphi}$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big(F(|z|)(z/|z|)^k\Big) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big(z^k |z|^{-k} F(|z|)\Big) = z^k \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big(|z|^{-k} F(|z|)\Big) =$$
$$= \rho^k e^{ik\varphi} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\Big(\rho^{-k} F(\rho)\Big) = \rho^k e^{ik\varphi}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\rho^{-k} F(\rho)\Big)\right) e^{i\varphi} =$$
$$= \frac{1}{2}\rho^k \Big(\rho^{-k} F(\rho)\Big)' e^{i(k+1)\varphi}. \tag{4}$$

Поэтому второе утверждение леммы вытекает из того факта, что распределение $u \in \mathscr{D}'(0,R)$ имеет определённую однозначно с точностью до аддитивной константы первообразную $U \in \mathscr{D}'(0,R)$, $U' = u$. □

Доказательство теоремы 1. Заметим прежде всего, что из разложения функции f в ряд Тейлора в B_r и его единственности следует, что $f = cz^k$ на B_r при $k \in \mathbb{Z}_+$ и $f = 0$ на B_r при $k < 0$. Заменяя, если нужно, f на $f - cz^k$, что не нарушит выполнимости условий теоремы, будем считать далее, что $f = 0$ на B_r и в случае $k \in \mathbb{Z}_+$.

Рассмотрим распределение $g = \partial f/\partial\overline{z}$.

Имеем
$$\chi_{B_r} * g = \chi_{B_r} * \frac{\partial f}{\partial\overline{z}} = \frac{\partial\chi_{B_r}}{\partial\overline{z}} * f.$$
Таким образом, (1) выполнено для п. в. $z \in B_{R-r}$ тогда и только тогда, когда $\chi_{B_r} * g = 0$ (если $g \in L_{\mathrm{loc}}(B_R)$, это эквивалентно тому, что g имеет нулевые интегралы по кругам радиуса r).

Теорема вытекает теперь из общего вида $SO(2)$-финитных решений уравнения свёртки $\chi_{B_r} * g = 0$, установленного в [6], и тождества (4). □

Аналогичным образом, с учётом леммы 1, теорема 2 получается применением теоремы 1 работы [7] к функции $g = \partial f/\partial\overline{z}$.

1. *Zalcman L.* Analyticity and the Pompeiu problem // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1972. – Vol. 47. – P. 237–254.
2. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // *Fuglede B., et al.* (eds.) Approximation by Solutions of Partial Differential Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1992. – P. 185–194.
3. *Zalcman L.* Supplementary bibliography to “A bibliographic survey of the Pompeiu problem” // Radon Transforms and Tomography. Contemp. Math. – Providence: Am. Math. Soc., 2001. – Vol. 278. – P. 69–74.
4. *Volchkov V.V.* Integral geometry and convolution equations. – Dordrecht: Kluwer Academic, 2003. – 454 p.
5. *Волчков В.В.* Теоремы типа Мореры в областях со слабым условием конуса. // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 10. – С. 15–20.
6. *Зарайский Д.А.* Уточнение теоремы единственности для решений уравнения свёртки // Труды ИПММ НАН Украины. – 2006. – Т. 12. – С. 69–75.
7. *Зарайский Д.А.* Теорема единственности для функций с нулевыми интегралами по шарам // Труды ИПММ НАН Украины. – 2012. – Т. 25. – С.77–83.
8. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 1. – М.: Мир, 1986. – 464 с.

D. A. Zaraisky

Morera type theorems for contour integrals over circles of fixed radius.

Let f be a function on disk of radius R in the complex plane, which has vanishing contour integrals over circles of radius $r < R$. The following question is investigated: under what additional conditions the function f is necessarily holomorphic.

Keywords: *Morea type theorems.*

Д. А. Зарайський

Теореми типу Морери для контурних інтегралів по колах фіксованого радіуса.

Нехай f – визначена на крузі радіуса R у комплексній площині функція, що має нульові контурні інтеграли по колах радіуса $r < R$. У роботі досліджується наступне питання: які додаткові умови на функцію f гарантують її голоморфність.

Ключові слова: *теореми типу Морери.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
d.zaraisky@gmail.com

Получено 17.12.13