ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2013. Том 27

УДК 512.579

 А. В. Жучок

ГРУПОВІ КОНГРУЕНЦІЇ НА ТРІОЇДАХ

Описано всі групові конгруенції на довільному тріоїді та представлено найменшу групову конгруенцію на тріоїді з інверсною напівгрупою, найменшу групову конгруенцію на тріоїді з ортодоксальною напівгрупою та найменшу групову конгруенцію на тріоїді з регулярною напівгрупою.

Ключові слова: *тріоїд, дімоноїд, напівгрупа, групова конгруенція.*

1. Вступ. Поняття триалгебри та тріоїда були введені Ж.-Л. Лоде та М.О. Ронко [1] при вивченні тернарних планарних дерев. Тріоїдом називається алгебра з трьома бінарними асоціативними операціями, які задовольняють деякі вісім аксіом (див. нижче). Триалгебра, яка є лінійним аналогом тріоїда, узагальнює поняття діалгебри, введене Ж.-Л. Лоде [2] як універсальну обгортуючу для алгебри Лейбніца. Якщо всі три (відповідно, певні дві) операції тріоїда збігаються, то він перетворюється в напівгрупу (відповідно, дімоноїд [2–4]). З іншого боку, будь-який тріоїд є дімоноїдом з бінарною асоціативною операцією, яка задовольняє деякі додаткові аксіоми. Першим результатом про тріоїди є опис Ж.-Л. Лоде та М.О. Ронко [1] вільного тріоїда, породженого заданою множиною. Тріоїди вивчалися також у [5–7]. Поняття тріоїда в наш час є маловивченим і потребує різноманітних досліджень. При цьому результати, отримані для тріоїдів, можуть бути застосовані й до триалгебр.

У цій роботі описано всі групові конгруенції на довільному тріоїді (теорема 1) та представлено найменшу групову конгруенцію на тріоїді з інверсною напівгрупою, найменшу групову конгруенцію на тріоїді з ортодоксальною напівгрупою та найменшу групову конгруенцію на тріоїді з регулярною напівгрупою (теорема 2). Результати, які при цьому отримано, узагальнюють відповідні описи [8–12]. Крім цього, у роботі встановлено достатні умови, за якими операції довільного тріоїда збігаються (лема 4).

Деякі з отриманих результатів були анонсовані в [13].

2. Попередні відомості. Нагадаємо, що непорожня множина T з трьома бінарними асоціативними операціями $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$, які задовольняють такі аксіоми:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \tag{T1}$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \tag{T2}$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \tag{T3}$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z), \tag{T4}$$

$$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), \tag{T5}$$

$$(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), \tag{T6}$$

$$(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), \tag{$T7$}$$

$$(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) \tag{$T8$}$$

для всіх $x, y, z \in T$, називається тріоїдом.

Наведемо еквівалентне визначення тріоїда. Для цього нагадаємо визначення дімоноїда.

Непорожня множина T з двома бінарними асоціативними операціями $\dashv$ та $\vdash$, які задовольняють аксіоми $(T1)$ – $(T3)$, називається дімоноїдом [2–4]. Дімоноїд $(T, \dashv, \vdash)$ з бінарною асоціативною операцією $\perp$, яка задовольняє аксіоми $(T4)-(T8)$, називається тріоїдом.

Приклади тріоїдів можна знайти в [1], [5–7].

Якщо операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ (відповідно, $\vdash$ та $\perp$ або $\dashv$ та $\perp$) тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ збігаються, то він перетворюється в напівгрупу (відповідно, дімоноїд). Таким чином, кожну напівгрупу та кожний дімоноїд можна розглядати як тріоїд. Приклади дімоноїдів розглядалися в [2–4].

Як зазвичай, символом $\mathbb{N}$ позначаємо множину додатних цілих чисел.

Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ – тріоїд та $a \in T$, $n \in \mathbb{N}$. Через a^n (відповідно, na) позначатимемо n-степінь елемента a відносно операції $\dashv$ (відповідно, $\vdash$).

Лема 1 ([6], лема 3). *Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ – тріоїд з комутативною операцією $\dashv$. Для всіх $b, c \in T$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, маємо*

$$(b \dashv c)^m = b^m \perp c^m = (b \perp c)^m.$$

Лема 2. *Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ – тріоїд з комутативною операцією $\vdash$. Для всіх $b, c \in T$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, маємо*

$$m(b \vdash c) = mb \perp mc = m(b \perp c) = m(b \dashv c).$$

Доведення. Для будь-яких $b, c \in T$ маємо

$$\begin{aligned} m(b \vdash c) &= mb \vdash mc = b \vdash (m-1)b \vdash mc = \\ &= (m-1)b \vdash (mc \vdash b) = ((m-1)b \perp mc) \vdash b = \\ &= b \vdash ((m-1)b \perp mc) = (b \vdash (m-1)b) \perp mc = mb \perp mc \end{aligned}$$

згідно з комутативністю та асоціативністю операції $\vdash$ й аксіомами тріоїда.

Доведемо, що $m(b \vdash c) = m(b \perp c)$ для $m > 1$, використовуючи індукцію за m. Для $m = 2$ маємо

$$\begin{aligned} 2(b \vdash c) &= (b \vdash c) \vdash (b \vdash c) = (b \perp c) \vdash (b \vdash c) = \\ &= (b \vdash c) \vdash (b \perp c) = (b \perp c) \vdash (b \perp c) = 2(b \perp c) \end{aligned}$$

згідно з асоціативністю й комутативністю операції $\vdash$ та аксіомою тріоїда.

Нехай $k(b \vdash c) = k(b \perp c)$ для $m = k$. Тоді для $m = k + 1$ отримуємо

$$\begin{aligned}(k+1)(b \vdash c) = (b \vdash c) \vdash k(b \vdash c) = (b \perp c) \vdash k(b \vdash c) = \\ = (b \perp c) \vdash k(b \perp c) = (k+1)(b \perp c)\end{aligned}$$

згідно з асоціативністю операції $\vdash$, аксіомою тріоїда та припущенням.

Таким чином, $m(b \vdash c) = m(b \perp c)$ для $m > 1$.

Нарешті, доведемо індукцією за m, що $m(b \dashv c) = m(b \perp c)$, $m > 1$.

Для $m = 2$ маємо

$$\begin{aligned}2(b \dashv c) = (b \dashv c) \vdash (b \dashv c) = \\ = b \vdash (c \vdash (b \dashv c)) = (b \perp c) \vdash (b \dashv c) = \\ = (b \dashv c) \vdash (b \perp c) = b \vdash (c \vdash (b \perp c)) = \\ = (b \perp c) \vdash (b \perp c) = 2(b \perp c)\end{aligned}$$

згідно з аксіомами тріоїда та комутативністю операції $\vdash$.

Нехай $k(b \dashv c) = k(b \perp c)$ для $m = k$. Тоді для $m = k + 1$ отримуємо

$$\begin{aligned}(k+1)(b \dashv c) = (b \dashv c) \vdash k(b \dashv c) = b \vdash (c \vdash k(b \dashv c)) = \\ = (b \perp c) \vdash k(b \dashv c) = (b \perp c) \vdash k(b \perp c) = (k+1)(b \perp c)\end{aligned}$$

згідно з аксіомами тріоїда та припущенням.

Таким чином, $m(b \dashv c) = m(b \perp c)$ для $m > 1$.

Лему доведено.

Комутативна напівгрупа ідемпотентів називається напівструктурою. Комутативна напівгрупа S є сепаративною, якщо для будь-яких $s, t \in S$ з $s^2 = st = t^2$ випливає $s = t$. Напівгрупа S називається глобально ідемпотентною, якщо $S^2 = S$.

Лема 3 ([4], лема 3). *Операції дімоноїда $(D, \dashv, \vdash)$ збігаються, якщо виконується одна з наступних умов:*

(i) $(D, \dashv)$ *– напівструктура;*

(ii) $(D, \dashv)$ *– напівгрупа з лівим (двобічним) скороченням;*

(iii) $(D, \dashv)$ *– комутативна сепаративна напівгрупа;*

(iv) $(D, \dashv)$ *– комутативна глобально ідемпотентна напівгрупа.*

Напівгрупа, яка задовольняє дві тотожності:

$$x^2 = xy, \;\; y^2 = yx \Rightarrow x = y,$$

$$x^2 = yx, \;\; y^2 = xy \Rightarrow x = y,$$

називається слабко скороченою.

Наступна лема встановлює достатні умови, за якими операції тріоїда збігаються.

Лема 4. *Операції тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ збігаються, якщо виконується одна з наступних умов:*

(i) $(T, \dashv)$ *– слабко скорочена напівгрупа;*

(ii) $(T, \vdash)$ *– слабко скорочена напівгрупа;*

(iii) $(T, \dashv)$ – *напівгрупа з лівим (двобічним) скороченням;*
(iv) $(T, \vdash)$ – *напівгрупа з правим (двобічним) скороченням;*
(v) $(T, \dashv)$ – *комутативна сепаративна напівгрупа;*
(vi) $(T, \vdash)$ – *комутативна сепаративна напівгрупа;*
(vii) $(T, \dashv)$ – *комутативна глобально ідемпотентна напівгрупа;*
(viii) $(T, \vdash)$ – *комутативна глобально ідемпотентна напівгрупа;*
(ix) $(T, \dashv)$ – *моноїд;*
(x) $(T, \vdash)$ – *моноїд;*
(xi) $(T, \vdash)$ – *напівструктура.*

Доведення. Для довільних елементів $x, y \in T$ покладемо

$$a = x \dashv y, \ \ b = x \vdash y, \ \ c = x \perp y.$$

Елементи a, b та c будемо використовувати при доведенні тверджень (i), (ii), (v) та (vi).

(i) Для елементів $a, b, c \in T$ маємо

$$a^2 = (x \dashv y) \dashv (x \dashv y) = (x \dashv y)^2 ,$$

$$a \dashv b = (x \dashv y) \dashv (x \vdash y) = (x \dashv y) \dashv (x \dashv y) = (x \dashv y)^2 ,$$
$$b \dashv a = (x \vdash y) \dashv (x \dashv y) = (x \vdash y) \dashv (x \vdash y) = (x \vdash y)^2 ,$$
$$b^2 = (x \vdash y) \dashv (x \vdash y) = (x \vdash y)^2 ,$$
$$a \dashv c = (x \dashv y) \dashv (x \perp y) = (x \dashv y) \dashv (x \dashv y) = (x \dashv y)^2 ,$$
$$c \dashv a = (x \perp y) \dashv (x \dashv y) = (x \perp y) \dashv (x \perp y) = (x \perp y)^2 ,$$
$$c^2 = (x \perp y) \dashv (x \perp y) = (x \perp y)^2$$

згідно з аксіомами тріоїда та асоціативністю операції $\dashv$. У силу слабкої скороченості напівгрупи $(T, \dashv)$ з $a^2 = a \dashv b$, $b^2 = b \dashv a$ випливає $a = b$ та з $a^2 = a \dashv c$, $c^2 = c \dashv a$ випливає $a = c$.

Отже, $a = b = c$, тобто $\dashv = \vdash = \perp$.

(ii) Для елементів $a, b, c \in T$ маємо

$$2a = (x \dashv y) \vdash (x \dashv y) = 2 (x \dashv y) ,$$

$$a \vdash b = (x \dashv y) \vdash (x \vdash y) = (x \vdash y) \vdash (x \vdash y) = 2 (x \vdash y) ,$$
$$b \vdash a = (x \vdash y) \vdash (x \dashv y) = (x \dashv y) \vdash (x \dashv y) = 2 (x \dashv y) ,$$
$$2b = (x \vdash y) \vdash (x \vdash y) = 2 (x \vdash y) ,$$
$$a \vdash c = (x \dashv y) \vdash (x \perp y) = x \vdash (y \vdash (x \perp y)) = (x \perp y) \vdash (x \perp y) = 2 (x \perp y) ,$$
$$c \vdash a = (x \perp y) \vdash (x \dashv y) = x \vdash (y \vdash (x \dashv y)) = (x \dashv y) \vdash (x \dashv y) = 2 (x \dashv y) ,$$
$$2c = (x \perp y) \vdash (x \perp y) = 2 (x \perp y)$$

згідно з аксіомами тріоїда та асоціативністю операції $\vdash$. У силу слабкої скороченості напівгрупи $(T,\vdash)$ з $2a = b{\vdash}a$, $2b = a{\vdash}b$ випливає $a = b$ та з $2a = c{\vdash}a$, $2c = a{\vdash}c$ випливає $a = c$.

Отже, $a = b = c$, тобто $\dashv = \vdash = \perp$.

(iii) За твердженням (ii) леми 3 $\dashv=\vdash$. Для всіх $x, y, z \in T$ згідно з асоціативністю операції $\dashv$ та аксіомою тріоїда маємо

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z) = x \dashv (y \perp z),$$

звідки завдяки лівій скороченості отримуємо $y \dashv z = y \perp z$ для всіх $y, z \in T$. Таким чином, $\dashv=\vdash=\perp$. Аналогічно можна довести випадок двобічної скороченості.

(iv) Для всіх $x, y, z \in T$ згідно з асоціативністю операції $\vdash$ та аксіомами тріоїда маємо

$$x \vdash (y \vdash z) = (x \vdash y) \vdash z = (x \dashv y) \vdash z = (x \perp y) \vdash z,$$

звідки завдяки правій скороченості отримуємо $x \vdash y = x \dashv y = x \perp y$ для всіх $x, y \in T$. Таким чином, $\vdash=\dashv=\perp$. Аналогічно можна довести випадок двобічної скороченості.

(v) За твердженням (iii) леми 3 $\dashv=\vdash$. Для елементів $a, b, c \in T$ маємо

$$a^2 = (x \dashv y) \dashv (x \dashv y) = (x \dashv y)^2,$$

$$a \dashv c = (x \dashv y) \dashv (x \perp y) = (x \dashv y) \dashv (x \dashv y) = (x \dashv y)^2,$$
$$c^2 = (x \perp y) \dashv (x \perp y) = (x \perp y)^2 = (x \dashv y)^2$$

згідно з аксіомою тріоїда, асоціативністю операції $\dashv$ та лемою 1. У силу сепаративності комутативної напівгрупи $(T,\dashv)$ з $a^2 = a \dashv c = c^2$ випливає $a = c$. Отже, $\dashv=\vdash=\perp$.

(vi) Візьмемо елементи $a, b, c \in T$. За лемою 2 маємо

$$2a = (x{\dashv}y){\vdash}(x{\dashv}y) = 2(x \dashv y) = 2(x{\vdash}y) = 2(x \perp y).$$

Згідно з викладками, зробленими в (ii), отримуємо

$$a{\vdash}b = 2\,(x{\vdash}y)\,, \quad 2b = 2\,(x{\vdash}y)\,,$$

$$a{\vdash}c = 2\,(x{\perp}y)\,, \quad 2c = 2\,(x{\perp}y)\,.$$

У силу сепаративності комутативної напівгрупи $(T,\vdash)$ з $2a = a{\vdash}b = 2b$ випливає $a = b$ та з $2a = a{\vdash}c = 2c$ випливає $a = c$.

Отже, $a = b = c$, тобто $\dashv = \vdash = \perp$.

(vii) За твердженням (iv) леми 3 $\dashv=\vdash$. Нехай $x, y \in T$ та $y = y_1 \dashv y_2$, $y_1, y_2 \in T$. Тоді

$$x \dashv y = x \dashv (y_1 \dashv y_2) = (y_2 \dashv x) \dashv y_1 =$$
$$= y_2 \dashv (x \perp y_1) = (x \perp y_1) \dashv y_2 = x \perp (y_1 \dashv y_2) = x \perp y$$

згідно з комутативністю та асоціативністю операції $\dashv$ й аксіомами тріоїда. Отже, $\dashv=\vdash=\perp$.

(viii) Нехай x, y – довільні елементи T та $x = x_1 \vdash x_2$, $x_1, x_2 \in T$. Тоді

$$x \vdash y = (x_1 \vdash x_2) \vdash y = x_2 \vdash (y \vdash x_1) = (x_2 \dashv y) \vdash x_1 =$$

$$= x_1 \vdash (x_2 \dashv y) = (x_1 \vdash x_2) \dashv y = x \dashv y,$$

$$x \vdash y = x_2 \vdash (y \vdash x_1) = (x_2 \perp y) \vdash x_1 =$$

$$= x_1 \vdash (x_2 \perp y) = (x_1 \vdash x_2) \perp y = x \perp y$$

згідно з комутативністю та асоціативністю операції $\vdash$ й аксіомами тріоїда. Отже, $\vdash = \dashv = \perp$.

(ix) Нехай e – одиниця моноїда $(T, \dashv)$. Для всіх $x, y, z \in T$ маємо

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z) = x \dashv (y \vdash z) = x \dashv (y \perp z)$$

згідно з асоціативністю операції $\dashv$ та аксіомами тріоїда. Підставляючи $x = e$ в останній вираз, отримуємо $y \dashv z = y \vdash z = y \perp z$ для всіх $y, z \in T$.

(x) Нехай e – одиниця моноїда $(T, \vdash)$. Для всіх $x, y, z \in T$ маємо

$$x \vdash (y \vdash z) = (x \vdash y) \vdash z = (x \dashv y) \vdash z = (x \perp y) \vdash z$$

згідно з асоціативністю операції $\vdash$ та аксіомами тріоїда. Підставляючи $z = e$ в останній вираз, отримуємо $x \vdash y = x \dashv y = x \perp y$ для всіх $x, y \in T$.

(xi) Для всіх $x, y, z \in T$ маємо

$$x \vdash (y \dashv z) = (y \dashv z) \vdash x =$$

$$= y \vdash (z \vdash x) = (x \vdash y) \vdash z = (x \vdash y) \dashv z,$$

$$x \vdash (y \perp z) = (y \perp z) \vdash x =$$

$$= y \vdash (z \vdash x) = (x \vdash y) \vdash z = (x \vdash y) \perp z$$

згідно з комутативністю й асоціативністю операції $\vdash$ та аксіомами тріоїда. Підставляючи $y = x$ в останні вирази і використовуючи ідемпотентність операції $\vdash$, отримуємо $x \vdash z = x \dashv z = x \perp z$.

Лему доведено.

Відзначимо, що згідно з лемою 1 [6] операції тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ збігаються, якщо $(T, \dashv)$ – напівструктура.

3. Групові конгруенції на довільному тріоїді. У [8] описано всі групові конгруенції на довільній напівгрупі за допомогою деяких піднапівгруп цієї напівгрупи. У цьому пункті ми поширимо цей результат на тріоїди.

Якщо ρ – така конгруенція на тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$, що операції фактор-тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)/_{\rho}$ збігаються та він є групою, то будемо говорити, що ρ є груповою конгруенцією.

Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ – довільний тріоїд. Для кожної піднапівгрупи H напівгрупи $(T, \dashv)$ і будь-якого $a \in T$ розглянемо множину пар

$$a : H_{\dashv} = \{(x, y) \in T \times T \mid x \dashv a \dashv y \in H\}.$$

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ *– довільний тріоїд та* $H \subseteq (T, \dashv)$ *– піднапівгрупа така, що*

(i) $a : H_\dashv \neq \varnothing$ *для всіх* $a \in T$*;*

(ii) $a : H_\dashv \bigcap b : H_\dashv \neq \varnothing$ $(a, b \in T) \Rightarrow a : H_\dashv = b : H_\dashv$.

Тоді відношення $\rho_{H_\dashv}$*, визначене на* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ *за правилом:*

$$a\rho_{H_\dashv} b \Leftrightarrow a : H_\dashv = b : H_\dashv,$$

є груповою конгруенцією. Навпаки, якщо ρ *– довільна групова конгруенція на тріоїді* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$*, то одиничний клас* E *групи* ${(T, \dashv)}/{\rho}$ *є піднапівгрупою напівгрупи* $(T, \dashv)$*, яка задовольняє умови (i), (ii), та* $\rho = \rho_{E_\dashv}$.

Доведення. Той факт, що відношення $\rho_{H_\dashv}$ є груповою конгруенцією на напівгрупі $(T, \dashv)$, доведено в [8]. Покажемо, що $\rho_{H_\dashv}$ є стабільним відносно операцій $\vdash$ та $\perp$.

Нехай $a\rho_{H_\dashv} b$, $a, b, c \in T$. Оскільки $a \dashv c\rho_{H_\dashv} b \dashv c$, то

$$(a \dashv c) : H_\dashv = \{(x, y) \,|\, x \dashv (a \dashv c) \dashv y \in H\} =$$

$$= \{(x, y) \,|\, x \dashv (b \dashv c) \dashv y \in H\} = (b \dashv c) : H_\dashv.$$

Згідно з асоціативністю операції $\dashv$ та аксіомами тріоїда отримуємо

$$x \dashv (a \dashv c) \dashv y = ((x \dashv a) \dashv c) \dashv y =$$

$$= (x \dashv (a \vdash c)) \dashv y = x \dashv (a \vdash c) \dashv y =$$

$$= (x \dashv (a \perp c)) \dashv y = x \dashv (a \perp c) \dashv y,$$

$$x \dashv (b \dashv c) \dashv y = ((x \dashv b) \dashv c) \dashv y =$$

$$= (x \dashv (b \vdash c)) \dashv y = x \dashv (b \vdash c) \dashv y =$$

$$= (x \dashv (b \perp c)) \dashv y = x \dashv (b \perp c) \dashv y.$$

Отже, з $(a \dashv c) : H_\dashv = (b \dashv c) : H_\dashv$ випливає, що

$$(a \vdash c) : H_\dashv = (b \vdash c) : H_\dashv = (a \perp c) : H_\dashv = (b \perp c) : H_\dashv,$$

і таким чином, $a \vdash c\rho_{H_\dashv} b \vdash c$, $a \perp c\rho_{H_\dashv} b \perp c$. Аналогічно можна показати, що $c \vdash a\rho_{H_\dashv} c \vdash b$, $c \perp a\rho_{H_\dashv} c \perp b$. Отже, $\rho_{H_\dashv}$ є конгруенцією на $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Оскільки ${(T, \dashv)}/{\rho_{H_\dashv}}$ є групою, то згідно з твердженням (ix) леми 4 операції фактор-тріоїда ${(T, \dashv, \vdash, \perp)}/{\rho_{H_\dashv}}$ збігаються і, таким чином, він є групою.

Обернене твердження випливає з [8].

Теорему доведено.

Остання теорема узагальнює теорему [8] про будову всіх групових конгруенцій на довільній напівгрупі.

З теореми 1 для дімоноїдів отримуємо такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай* $(T, \dashv, \vdash)$ *– довільний дімоноїд та* $H \subseteq (T, \dashv)$ *– піднапівгрупа така, що*

(i) $a : H_{\dashv} \neq \varnothing$ *для всіх* $a \in T$;

(ii) $a : H_{\dashv} \bigcap b : H_{\dashv} \neq \varnothing \ (a, b \in T) \Rightarrow a : H_{\dashv} = b : H_{\dashv}$.

Тоді відношення $\rho_{H_{\dashv}}$, *визначене на* $(T, \dashv, \vdash)$ *за правилом:*

$$a\rho_{H_{\dashv}}b \Leftrightarrow a : H_{\dashv} = b : H_{\dashv},$$

є груповою конгруенцією. Навпаки, якщо ρ *– довільна групова конгруенція на дімоноїді* $(T, \dashv, \vdash)$, *то одиничний клас* E *групи* ${(T, \dashv)}/{\rho}$ *є піднапівгрупою напівгрупи* $(T, \dashv)$, *яка задовольняє умови (i), (ii), та* $\rho = \rho_{E_{\dashv}}$.

4. Найменші групові конгруенції на деяких тріоїдах. У цьому пункті представлено найменшу групову конгруенцію на тріоїді з інверсною напівгрупою, найменшу групову конгруенцію на тріоїді з ортодоксальною напівгрупою та найменшу групову конгруенцію на тріоїді з регулярною напівгрупою.

Інверсною напівгрупою S є напівгрупа, у якій кожний елемент $x \in S$ має єдиний інверсний $y \in S$ у тому сенсі, що $x = xyx$ і $y = yxy$. Напівгрупа S називається регулярною, якщо для кожного $x \in S$ існує деякий елемент $a \in S$ такий, що $xax = x$. Регулярна напівгрупа S називається ортодоксальною, якщо в S множина ідемпотентів утворює піднапівгрупу.

На тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ з інверсною напівгрупою $(T, \dashv)$ визначимо відношення $\sigma_{\dashv}$, поклавши

$a\sigma_{\dashv}b$ тоді й тільки тоді, коли існує ідемпотент
e напівгрупи $(T, \dashv)$ такий, що $e \dashv a = e \dashv b$,

та на тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ з ортодоксальною напівгрупою $(T, \dashv)$ визначимо відношення $\delta_{\dashv}$ за правилом:

$a\delta_{\dashv}b$ тоді й тільки тоді, коли $e \dashv a \dashv e = e \dashv b \dashv e$

для деякого ідемпотента e напівгрупи $(T, \dashv)$.

Через E_S позначатимемо множину ідемпотентів напівгрупи S. Підмножина P напівгрупи S називається рефлексивною, якщо для будь-яких $a, b \in S$ з того, що $ab \in P$ випливає, що $ba \in P$.

Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ – довільний тріоїд з регулярною напівгрупою $(T, \dashv)$, $H \subseteq (T, \dashv)$ – рефлексивна піднапівгрупа, яка породжена множиною $E_{(T,\dashv)}$, та

$$H(\dashv) = \{x \in T \mid h \dashv x \in H \text{ для деякого } h \in H\}.$$

Визначимо відношення $\mu_{H(\dashv)}$ на $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ за правилом:

$$a\mu_{H(\dashv)}b \Leftrightarrow x \dashv a,\ x \dashv b \in H(\dashv) \text{ для деякого } x \in T.$$

Має місце теорема.

Теорема 2. *Нехай* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ *– довільний тріоїд. Тоді*

(i) $\sigma_{\dashv}$ *на* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ *з інверсною напівгрупою* $(T, \dashv)$ *є найменшою груповою конгруенцією;*

(ii) $\delta_{\dashv}$ *на* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ *з ортодоксальною напівгрупою* $(T, \dashv)$ *є найменшою груповою конгруенцією;*

(iii) $\mu_{H(\dashv)}$ *на* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ *з регулярною напівгрупою* $(T, \dashv)$ *є найменшою груповою конгруенцією.*

Доведення. (i) Той факт, що відношення $\sigma_{\dashv}$ є найменшою груповою конгруенцією на дімоноїді $(T, \dashv, \vdash)$, доведено в [10]. Покажемо, що $\sigma_{\dashv}$ є стабільним відносно операції $\perp$.

Нехай $a\, \sigma_{\dashv}\, b$, $a, b, c \in T$. Тоді $a \dashv c\sigma_{\dashv} b \dashv c$. Це означає, що існує ідемпотент ε напівгрупи $(T, \dashv)$ такий, що $\varepsilon \dashv (a \dashv c) = \varepsilon \dashv (b \dashv c)$. Звідси

$$\varepsilon \dashv (a \dashv c) = (\varepsilon \dashv a) \dashv c = \varepsilon \dashv (a \perp c) =$$

$$= \varepsilon \dashv (b \dashv c) = (\varepsilon \dashv b) \dashv c = \varepsilon \dashv (b \perp c)$$

згідно з асоціативністю операції $\dashv$ та аксіомою тріоїда. Таким чином, $a \perp c \sigma_{\dashv} b \perp c$.

Двоїстим чином можна довести ліву стабільність відношення $\sigma_{\dashv}$ відносно операції $\perp$. Таким чином, $\sigma_{\dashv}$ є конгруенцією на $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Оскільки $(T, \dashv)/_{\sigma_{\dashv}}$ є групою, то згідно з твердженням (ix) леми 4 операції фактортріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)/_{\sigma_{\dashv}}$ збігаються і, таким чином, він є групою.

З [9] (див. також [10]) випливає, що $\sigma_{\dashv}$ є найменшою груповою конгруенцією.

(ii) Той факт, що відношення $\delta_{\dashv}$ є найменшою груповою конгруенцією на дімоноїді $(T, \dashv, \vdash)$, доведено в [10]. Покажемо, що $\delta_{\dashv}$ є стабільним відносно операції $\perp$.

Нехай $a \delta_{\dashv} b$, $a, b, c \in T$. Тоді $a \dashv c \delta_{\dashv} b \dashv c$. Це означає, що існує ідемпотент ε напівгрупи $(T, \dashv)$ такий, що $\varepsilon \dashv (a \dashv c) \dashv \varepsilon = \varepsilon \dashv (b \dashv c) \dashv \varepsilon$. Звідси

$$\varepsilon \dashv (a \dashv c) \dashv \varepsilon = ((\varepsilon \dashv a) \dashv c) \dashv \varepsilon =$$

$$= \varepsilon \dashv (a \perp c) \dashv \varepsilon = \varepsilon \dashv (b \dashv c) \dashv \varepsilon =$$

$$= ((\varepsilon \dashv b) \dashv c) \dashv \varepsilon = \varepsilon \dashv (b \perp c) \dashv \varepsilon$$

згідно з асоціативністю операції $\dashv$ та аксіомою тріоїда. Таким чином, $a \perp c \delta_{\dashv} b \perp c$.

Двоїстим чином можна довести ліву стабільність відношення $\delta_{\dashv}$ відносно операції $\perp$. Таким чином, $\delta_{\dashv}$ є конгруенцією на $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Оскільки $(T, \dashv)/_{\delta_{\dashv}}$ є групою, то згідно з твердженням (ix) леми 4 операції фактортріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)/_{\delta_{\dashv}}$ збігаються та він є групою.

З [11] (див. також [10]) випливає, що $\delta_{\dashv}$ є найменшою груповою конгруенцією.

(iii) Той факт, що відношення $\mu_{H(\dashv)}$ є найменшою груповою конгруенцією на напівгрупі $(T, \dashv)$, доведено в [12]. Покажемо, що $\mu_{H(\dashv)}$ є стабільним відносно операцій $\vdash$ та $\perp$.

Нехай $a \mu_{H(\dashv)} b$, $a, b, c \in T$. Оскільки $a \dashv c \mu_{H(\dashv)} b \dashv c$, то

$$y \dashv (a \dashv c),\ y \dashv (b \dashv c) \in H(\dashv) \text{ для деякого } y \in T.$$

Згідно з асоціативністю операції $\dashv$ та аксіомами тріоїда отримуємо

$$y \dashv (a \dashv c) = (y \dashv a) \dashv c = y \dashv (a \vdash c) = y \dashv (a \perp c),$$

$$y \dashv (b \dashv c) = (y \dashv b) \dashv c = y \dashv (b \vdash c) = y \dashv (b \perp c).$$

Отже,

$$y \dashv (a \vdash c),\ y \dashv (b \vdash c),\ y \dashv (a \perp c),\ y \dashv (b \perp c) \in H(\dashv)$$

для деякого $y \in T$, і таким чином, $a \vdash c\mu_{H(\dashv)} b \vdash c$, $a \perp c\mu_{H(\dashv)} b \perp c$. Аналогічно можна показати, що $c \vdash a\mu_{H(\dashv)} c \vdash b$, $c \perp a\mu_{H(\dashv)} c \perp b$. Отже, $\mu_{H(\dashv)}$ є конгруенцією на $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Оскільки $(T, \dashv)/_{\mu_{H(\dashv)}}$ є групою, то згідно з твердженням (ix) леми 4 операції фактор-тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)/_{\mu_{H(\dashv)}}$ збігаються і, таким чином, він є групою.

З [12] випливає, що $\mu_{H(\dashv)}$ є найменшою груповою конгруенцією.

Теорему доведено.

Твердження (i) останньої теореми узагальнює опис [9] найменшої групової конгруенції на інверсній напівгрупі та результат [10] про будову найменшої групової конгруенції на дімоноїді з інверсною напівгрупою. Твердження (ii) узагальнює опис [11] найменшої групової конгруенції на ортодоксальній напівгрупі та результат [10] про будову найменшої групової конгруенції на дімоноїді з ортодоксальною напівгрупою. Твердження (iii) узагальнює опис [12] найменшої групової конгруенції на регулярній напівгрупі.

З твердження (iii) теореми 2 для дімоноїдів отримуємо такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай* $(T, \dashv, \vdash)$ *– довільний дімоноїд з регулярною напівгрупою* $(T, \dashv)$, $H \subseteq (T, \dashv)$ *– рефлексивна піднапівгрупа, яка породжена множиною* $E_{(T,\dashv)}$, *та* $H(\dashv) = \{x \in T \mid h \dashv x \in H$ *для деякого* $h \in H\}$. *Тоді відношення* $\mu_{H(\dashv)}$, *визначене на* $(T, \dashv, \vdash)$ *за правилом:*

$$a\mu_{H(\dashv)} b \Leftrightarrow x \dashv a,\ x \dashv b \in H(\dashv) \text{ для деякого } x \in T,$$

є найменшою груповою конгруенцією.

1. *Loday J.-L., Ronco V.O.* Trialgebras and families of polytopes // Contemp. Math. – 2004. – **346**. – P. 369–398.
2. *Loday J.-L.* Dialgebras // Dialgebras and related operads: Lect. Notes Math. – Springer-Verlag, Berlin. – 2001. – **1763**. – P. 7–66.
3. *Жучок А.В.* Діалгебри – К. : Ін-т математики, 2011. – 256 с. – (Математика та її застосування) (Праці / Ін-т математики НАН України; т. 87).
4. *Жучок А.В.* Димоноиды // Алгебра и логика. – 2011. – Т. 50, № **4**. – С. 471–496.
5. *Жучок А.В.* Вільні тріоїди // Вісник Київ. нац. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 4. – С. 23–26.
6. *Zhuchok A.V.* Tribands of subtrioids // Proc. Inst. Applied Math. and Mech. – 2010. – Vol. 21. – P. 98–106.
7. *Жучок А.В.* Некоторые конгруэнции на триоидах // Фундаментальная и прикладная математика. – 2011/2012. – Т. 17, № **3**. – С. 39–49.
8. *Croisot R.* Équivalences principales bilatères definies dans un demiroupe // J. Math. Pures Appl. – 1957. – **36**. – P. 373–417.

9. *Munn W.D.* A class of irreducible matrix representations of an arbitrary inverse semigroup // Proc. Glasgow Math. Assoc. – 1961. – **5**. – P. 41–48.
10. *Zhuchok A.V.* Some least congruences on dimonoids // Bulletin of University of Kyiv, Series: Physics and Mathematics. – 2011. – Vol. 4. – P. 7–10.
11. *Meakin J.* Congruences on orthodox semigroups II // J. Austral. Math. Soc. – 1972. – **13**. – P. 259–266.
12. *Masat F.* Right group and group congruences on a regular semigroup // Duke Math. J. – 1973. – **40**. – P. 393–402.
13. *Zhuchok A.V.* Congruences on trioids // Intern. Conf. on Algebra devoted to the centenary of S. Chernikov: Abstracts. – Kiev, 2012. – P. 160.

A. V. Zhuchok

Group congruences on trioids.

We describe all group congruences on an arbitrary trioid and present the least group congruence on a trioid with an inverse semigroup, the least group congruence on a trioid with an orthodox semigroup and the least group congruence on a trioid with a regular semigroup.

Keywords: *trioid, dimonoid, semigroup, group congruence.*

А. В. Жучок

Групповые конгруэнции на триоидах.

Описаны все групповые конгруэнции на произвольном триоиде и представлены наименьшая групповая конгруэнция на триоиде с инверсной полугруппой, наименьшая групповая конгруэнция на триоиде с ортодоксальной полугруппой и наименьшая групповая конгруэнция на триоиде с регулярной полугруппой.

Ключевые слова: *триоид, димоноид, полугруппа, групповая конгруэнция.*

Луганський національний ун-т ім. Тараса Шевченка
zhuchok_a@mail.ru

Получено 28.03.13