УДК 517.5

©2013. **А. С. Ефимушкин, В. И. Рязанов**

О ПСЕВДОРЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ

При отрицательном индексе для невырожденных уравнений Бельтрами в единичном круге, доказано существование псевдорегулярных решений с общим числом полюсов, не превышающем модуля индекса, задачи Римана–Гильберта с коэффициентами ограниченной вариации и почти непрерывными граничными данными.

Ключевые слова: *уравнение Бельтрами, задача Римана–Гильберта, функции ограниченной вариации, почти непрерывные функции, индекс, псевдорегулярные решения, изолированные полюса, логарифмическая ёмкость.*

1. Введение. Обозначим через $\mathbb{D}$ единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и пусть $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в. *Уравнением Бельтрами* с коэффициентом μ называется уравнение вида

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) \cdot f_z, \tag{1}$$

где $f_{\bar{z}} = \bar{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y – частные производные функции $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ по x и y, соответственно. Уравнение (1) называется *невырожденным*, если $||\mu||_\infty < 1$.

Краевые задачи для аналитических функций f, когда $\mu(z) \equiv 0$, восходят к знаменитой диссертации Римана (1851), а также известным работам Гильберта (1904, 1924), и Пуанкаре (1910), смотри историю вопроса в монографии [11], где также рассматривается случай обобщенных аналитических функций.

В 1904 году Гильберт поставил следующую проблему, которую теперь принято называть проблемой Гильберта, или *проблемой Римана–Гильберта.* Она состояла в доказательстве существования и нахождении аналитической функции f в области $D \subset \mathbb{C}$, ограниченной спрямляемой жордановой кривой K, с граничным условием

$$\lim_{z \to \zeta} \ \mathrm{Re}\ \overline{\lambda(\zeta)} \cdot f(z) \ = \ \varphi(\zeta) \qquad\qquad \forall\ \zeta \in K, \tag{2}$$

где им предполагалось, что функции λ и φ непрерывно дифференцируемы относительно натурального параметра длины на кривой K, и что $|\lambda| \neq 0$ на K. Поэтому, без ограничения общности, можно считать, что $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$.

Первый способ решения этой проблемы, основанный на теории сингулярных интегральных уравнений, был предложен самим Гильбертом в работе [4]. Эта попытка оказалась не совсем удачной, поскольку теория сингулярных интегральных уравнений была еще недостаточно развита в то время. Однако, как раз этот способ стал основным подходом в этом направлении исследований, см., например, [11], [12], [15]. В частности, на этом пути было доказано существование решений этой задачи для функций λ и φ, непрерывных по Гёльдеру, см. [12].

Другой способ решения задачи, основанный на редукции к решению соответствующих двух задач Дирихле, был также предложен Гильбертом, см. [5]. Весьма общее решение задачи Римана–Гильберта этим способом совсем недавно было дано в статье [8] для жордановых областей при произвольных измеримых функциях φ и непрерывных, или ограниченной вариации, функциях λ.

Мы следуем вторую из упомянутых схем Гильберта при решении обобщенной задачи Римана–Гильберта для невырожденных уравнений Бельтрами в единичном круге.

2. Определения и предварительные замечания. Наиболее важным для нашего исследования является понятие логарифмической ёмкости, см., например, [18]. Пусть E – произвольное ограниченное борелевское множество плоскости $\mathbb{C}$. *Положительным распределением массы* на множестве E называют произвольную неотрицательную вполне аддитивную функцию множества ν, определенную на борелевских подмножествах множества E, с $\nu(E) = 1$. Функцию

$$U^{\nu}(z) := \int\limits_{E} \log \left| \frac{1}{z-\zeta} \right| \, d\nu(\zeta) \tag{3}$$

называют *логарифмическим потенциалом* распределения ν. Соответственно, *логарифмической ёмкостью* $C(E)$ множества E называется величина

$$C(E) = e^{-V}, \tag{4}$$

где

$$V \;=\; \inf_{\nu} \; V_{\nu}(E), \qquad V_{\nu}(E) \;=\; \sup_{z} \; U^{\nu}(z). \tag{5}$$

Заметим, что здесь супремум достаточно вычислять по множеству E. Если $V = \infty$, то полагают $C(E) = 0$. Известно, что $0 \le C(E) < \infty$, $C(E_1) \le C(E_2)$, если $E_1 \subseteq E_2$, $C(E) = 0$, если $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ с $C(E_n) = 0$. Кроме того, множество E имеет нулевую (хаусдорфову) длину, если $C(E) = 0$, см., например, [17, с. 155].

Хорошо известна также следующая геометрическая характеристика логарифмической ёмкости, см. [17, с. 138]:

$$C(E) \;=\; \tau(E) \;:=\; \lim_{n\to\infty} \; V_n^{\frac{2}{n(n-1)}}, \tag{6}$$

где V_n обозначает максимум величины

$$V(z_1, \ldots, z_n) \;=\; \prod_{k<l}^{l=1,\ldots,n} |z_k - z_l|, \tag{7}$$

когда наборы точек $z_1, \ldots, z_n$ пробегают множество E. Следуя Фекете [3], величину $\tau(E)$ называют *трансфинитным диаметром* множества E. Из указанной геометрической интерпретации логарифмической ёмкости через трансфинитный диаметр, сразу же видим, что если $C(E) = 0$, то $C(f(E)) = 0$ для любого отображения f, непрерывного по Гёльдеру и, в частности, для конформных и квазиконформных отображений на компактах, см., например, теорему II.4.3 в [6].

Обозначим через $A(\zeta_0, \delta)$ дугу единичной окружности $\partial\mathbb{D}$ с центром в точке $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ длины 2δ, где $\delta \in (0, \pi)$. Назовём множество $E \subset \partial\mathbb{D}$ *логарифмически тонким в точке* $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$, если при $\delta \to 0$

$$C(E \cap A(\zeta_0, \delta)) \ = \ o\left(\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{-1}\right). \tag{8}$$

Заметим, что $C(A(\zeta_0, \delta)) \simeq 1/(\log\frac{1}{\delta})$ при $\delta \to 0$, где запись $u \simeq v$ означает, что для достаточно малых δ найдется постоянная $c \in (0, \infty)$ такая, что $v/c \leq u \leq c \cdot v$, см., например, [1], с. 131. Таким образом, (8) означает, что

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{C(E \cap A(\zeta_0, \delta))}{C(A(\zeta_0, \delta))} \ = \ 0, \tag{9}$$

т.е. ζ_0 является *точкой разрежения для множества* E относительно логарифмической ёмкости. Условие (8) влечет также, что ζ_0 является точкой разрежения для множества E относительно меры длины на окружности $\partial\mathbb{D}$ как это следует, например, из леммы 1 в [10].

Будем говорить, что функция $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *почти непрерывна* в точке $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$, если найдется некоторое логарифмически тонкое множество $E \subseteq \partial\mathbb{D}$ такое, что $\varphi(\zeta) \to \varphi(\zeta_0)$ при $\zeta \to \zeta_0$ вдоль множества $\partial\mathbb{D} \setminus E$. Будем также говорить, что φ *почти непрерывна на* $\partial\mathbb{D}$, если она почти непрерывна в каждой точке $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$, за исключением быть может множества логарифмической ёмкости нуль. Другими словами, φ *аппроксимативно непрерывна п.в. на* $\partial\mathbb{D}$ относительно логарифмической ёмкости. Заметим, что логарифмически тонкие множества, а также множества логарифмической ёмкости нуль и, следовательно, почти непрерывные функции инвариантны относительно квазиконформных отображений комплексной плоскости на себя, сохраняющих единичную окружность, поскольку такие отображения непрерывны по Гёльдеру на $\partial\mathbb{D}$.

Под *псевдорегулярным решением задачи Римана–Гильберта* (2) для уравнения Бельтрами (1) будем понимать непрерывное в $\overline{\mathbb{C}}$, дискретное и открытое отображение $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{C}}$ класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ вне изолированных полюсов, которое удовлетворяет уравнению (1) п.в. и граничному условию (2) вдоль некасательных путей для всех $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, за исключением быть может некоторого множества логарифмической ёмкости нуль.

Напомним, что отображение $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{C}}$ *дискретно*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \overline{\mathbb{C}}$ состоит из изолированных точек, и *открыто*, если образ любого открытого множества $U \subseteq \mathbb{D}$ является открытым множеством в $\overline{\mathbb{C}}$.

Мы называем $\lambda : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *функцией ограниченной вариации*, пишем $\lambda \in \mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$, если

$$V_\lambda(\partial\mathbb{D}) \ := \ \sup \sum_{j=1}^{k} \ |\lambda(\zeta_{j+1}) - \lambda(\zeta_j)| < \infty, \tag{10}$$

где супремум берётся над всеми конечными наборами точек $\zeta_j \in \partial\mathbb{D}$, $j = 1, \ldots, k$, с циклическим порядком, означающим, что ζ_j лежит между ζ_{j+1} и ζ_{j-1} для каждого $j = 1, \ldots, k$. Здесь мы предполагаем, что $\zeta_{k+1} = \zeta_1 = \zeta_0$. Величина $V_\lambda(\partial\mathbb{D})$ называется *вариацией функции* λ.

Как это явствует из неравенства треугольника, если мы добавляем новые промежуточные точки в набор ζ_j, $j = 1, \ldots, k$, то сумма в (10) не убывает. Таким образом, супремум в (10) достигается при $\delta = \sup\limits_{j=1,\ldots,k} |\zeta_{j+1} - \zeta_j| \to 0$. Отметим также, что по определению $V_\lambda(\partial\mathbb{D}) = V_{\lambda\circ h}(\partial\mathbb{D})$, т.е. *вариация является инвариантом* при гомеоморфизмах $h : \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ и, таким образом, определение может быть распространено естественным образом на произвольную жорданову кривую в $\mathbb{C}$.

Для функции ограниченной вариации $\lambda : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ с $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$, $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, ее *индекс* есть целое число $I_\lambda = \Delta/2\pi$, где $\Delta = \Delta_{\partial\mathbb{D}} arg\lambda$ – приращение аргумента функции $\lambda(\zeta)$, когда точка ζ обходит окружность $\partial\mathbb{D}$ один раз против часовой стрелки, т.е. так, что при этом круг $\mathbb{D}$ остается слева.

Приращение Δ может быть корректно определено следующим образом. Рассмотрим функцию $\Lambda(\vartheta) = \lambda(e^{i(\beta_0+\vartheta)})$, $\beta_0, \vartheta \in [0, 2\pi]$. Ясно, что $V_\Lambda = V_\lambda$ и, таким образом, Λ имеет не более чем счетный набор скачков j_n, где ряд $\sum j_n$ является абсолютно сходящимся, $\sum |j_n| \leq V_\lambda$, и $\Lambda(\vartheta) = J(\vartheta) + C(\vartheta)$, где $C(\vartheta)$ – непрерывная функция, а $J(\vartheta)$ – функция скачков Λ, которая равна сумме всех ее скачков на отрезке $[0, \vartheta]$, см., например, следствие VIII.3.2 и теорему VIII.3.7 в [16]. Мы имеем, что $V_j \leq V_\lambda$ и $V_C \leq 2V_\lambda$, см., например, теорему 6.4 в [19]. Ассоциируем с комплексной величиной j_n вещественную величину

$$\alpha_n \ = \ -2 \ \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Re}\, j_n}{\operatorname{Im}\, j_n} \in \ [-\pi, \pi].$$

В силу геометрической интерпретации этих величин ($|j_n|$ равна длине хорды для дуги единичной окружности длины $|\alpha_n|$) и элементарных вычислений, мы имеем, что $|j_n| \leq |\alpha_n| \leq j_n \cdot \pi/2$.

Теперь, ассоциируем с функцией $J(\vartheta)$ функцию $j(\vartheta)$, которая равна сумме всех α_n, соответствующих скачкам Λ на отрезке $[0, \vartheta]$. Заметим, что $V_j \leq V_J \cdot \pi/2$. Далее, ассоциируем с комплекснозначной функцией $C(\vartheta)$ вещественнозначную функцию $c(\vartheta)$ следующим образом. Так как $C(\vartheta)$ равномерно непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$, последний можно поделить на отрезки $S_k = [\theta_{k-1}, \theta_k]$, $\theta_k = 2\pi k/m$, $k = 1, \ldots, m$, с достаточно большим $m \in \mathbb{N}$ таким, что $|C(\vartheta) - C(\vartheta')| < 2$ для всех ϑ и $\vartheta' \in S_k$. Положим по индукции

$$c(\vartheta) = c(\theta_{k-1}) - 2 \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Re}[C(\vartheta) - C(\theta_{k-1})]}{\operatorname{Im}[C(\vartheta) - C(\theta_{k-1})]} \qquad \forall \vartheta \in S_k,\ k = 1, \ldots, m,$$

где

$$c(0) := \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Re}[C(0) - 1]}{\operatorname{Im}[C(0) - 1]}.$$

Кроме того, пусть $\gamma_\lambda(\vartheta) = j(\vartheta) + c(\vartheta)$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$. По построению $\Lambda(\vartheta) = e^{i\gamma_\lambda(\vartheta)}$, $\vartheta \in [0, 2\pi]$, $V_{\gamma_\lambda} \leq V_\lambda \cdot 3\pi/2$, и $(\gamma_\lambda(2\pi) - \gamma_\lambda(0))/2\pi$ – целое число. Наконец, мы полагаем

$\alpha_\lambda(\zeta) = \gamma_\lambda(\vartheta)$, если $\zeta = e^{i(\beta_0+\vartheta)}$, $\vartheta \in [0, 2\pi)$, и называем функцию α_λ *функцией аргумента* λ, которая будет применяться впоследствии. Заметим, что $\alpha_\lambda \in \mathcal{BV}([0, 2\pi))$ и не зависит от β_0.

3. Основной результат.

Теорема 1. *Пусть $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $||\mu||_\infty < 1$, $\lambda : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $|\lambda(\zeta)| \equiv 1$, – функция ограниченной вариации и $\varphi : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ – почти непрерывная функция. Если индекс $I_\lambda \le 0$, то существует псевдорегулярное решение задачи Римана–Гильберта (2) для уравнения Бельтрами (1), самое большое с $|I_\lambda|$ полюсами в предписанных точках $\mathbb{D}$.*

Как обычно, здесь число полюсов подсчитывается с учетом их кратности.

Доказательство. Действительно, продолжая μ нулем всюду вне $\mathbb{D}$, получаем существование квазиконформного отображения $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с нормировками $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(\infty) = \infty$, удовлетворяющего уравнению Бельтрами (1). Жорданова область $f(\mathbb{D})$ по теореме Римана может быть отображена с помощью конформного отображения g на $\mathbb{D}$ с нормировками $g(0) = 0$ и $g(1) = 1$. Ясно, что $h := g \circ f$ – квазиконформный гомеоморфизм с нормировками $h(0) = 0$ и $h(1) = 1$, удовлетворяющий тому же самому уравнению Бельтрами (1).

По принципу отражения для квазиконформных отображений, см., например, I.8.4 в [6], привлекая инверсию относительно единичной окружности в образе и прообразе, мы можем продолжить h до квазиконформного отображения $H : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с нормировками $H(0) = 0$, $H(1) = 1$ и $H(\infty) = \infty$. Так как H и H^{-1} являются непрерывными по Гёльдеру на $\partial\mathbb{D}$, см., например, теорему II.4.3 в [6], имеем, что функция $\Phi = \varphi \circ H^{-1}$ является почти непрерывной. Ясно также, что $\Lambda = \lambda \circ H^{-1}$ – ограниченной вариации. Наконец, напомним, что при квазиконформных отображениях H и H^{-1} некасательные пути к $\partial\mathbb{D}$ переходят в некасательные пути к $\partial\mathbb{D}$, см., например, [2] и [9].

Таким образом, исходная задача Римана–Гильберта для уравнения Бельтрами (1) сводится к задаче Римана–Гильберта для аналитических функций F:

$$\lim_{z\to\zeta} \overline{\Lambda(\zeta)} \cdot F(z) \ = \ \Phi(\zeta), \tag{11}$$

где предельное граничное соотношение должно выполняться вдоль некасательных путей везде на $\partial\mathbb{D}$, за исключением быть может некоторого множества логарифмической ёмкости нуль.

Прежде всего, рассмотрим случай, когда $I_\Lambda = 0 = I_\lambda$. Тогда $\lambda(\zeta) = e^{i\alpha(\zeta)}$, где функция аргумента $\alpha = \alpha_\Lambda : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$ является однозначной функцией ограниченной вариации, и

$$G(z) \ = \ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \alpha(\zeta)\, \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\, \frac{d\zeta}{\zeta}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

является аналитической функцией в $\mathbb{D}$ с $u(z) = \mathrm{Re}\, G(z) \to \alpha(\zeta)$ при $z \to \zeta$ вдоль любых путей в $\mathbb{D}$ для всех $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, за исключением (счетного числа) точек разрыва функции α, см., например, теоремы I.D.2.2 в [14]. В силу ограниченности α, $u \in h^p$

для всех $p \geq 1$ по теореме IX.2.3 в [13], и, следовательно, $v = \mathrm{Im}\ G \in h^p$ для всех $p \geq 1$ по теореме М. Риса, см. [7]. Поэтому найдется функция $\beta : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\beta \in L^p$ такая, что $v(z) \to \beta(\zeta)$ при $z \to \zeta$ для п.в. $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ вдоль некасательных путей. Более того, поскольку $\alpha \in \mathcal{BV}(\partial\mathbb{D})$, функция β является почти непрерывной функцией на $\partial\mathbb{D}$ и найдется множество $E \subseteq \partial\mathbb{D}$ логарифмической ёмкости нуль такое, что $v(z) \to \beta(\zeta)$ при $z \to \zeta$ вдоль любых некасательных путей для всех $\zeta \in \partial\mathbb{D} \setminus E$, см. теорему 1 в [10], см. также теоремы I.E.3.2 и I.E.4.1 в [14] и теорему IX.1.3 в [13]. Таким образом, $G(z) \to \alpha(\zeta) + i\beta(\zeta)$ при $z \to \zeta$ вдоль любых некасательных путей для всех $\zeta \in \partial\mathbb{D} \setminus \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ – подмножество $\partial\mathbb{D}$ логарифмической ёмкости нуль.

Далее, поскольку функции Φ и β почти непрерывны на $\partial\mathbb{D}$, то функция $\Psi = \Phi e^{\beta}$ также почти непрерывна. Но тогда

$$\mathcal{A}(z) \ = \ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\mathbb{D}} \Psi(\zeta)\, \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\, \frac{d\zeta}{\zeta}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

является аналитической функцией в $\mathbb{D}$ с $U(z) = \mathrm{Re}\ \mathcal{A}(z) \to \Psi(\zeta)$ при $z \to \zeta$ вдоль любых некасательных путей для всех $\zeta \in \partial\mathbb{D} \setminus \mathcal{E}_*$, где $\mathcal{E}_* \subseteq \partial\mathbb{D}$ – некоторое множество логарифмической ёмкости нуль, см. снова теорему IX.1.3 в [13]. Таким образом, элементарные вычисления показывают, что функция $F = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$, где $\mathcal{B} = e^{iG}$, является искомым решением задачи Римана–Гильберта (11) в случае $I_\lambda = 0$.

Теперь, рассмотрим случай, когда $I_\lambda < 0$. Для произвольных $z_j \in \mathbb{D}$, $j = 1, \ldots, I_\lambda$, положим

$$\lambda_*(\zeta) \ = \ \lambda(\zeta) \prod_{j=1}^{I_\lambda} \frac{\zeta - z_j}{|\zeta - z_j|}, \qquad \varphi_*(\zeta) \ = \ \varphi(\zeta) \prod_{j=1}^{I_\lambda} |\zeta - z_j|, \qquad \zeta \in \partial\mathbb{D}.$$

Так как $I_{\lambda_1\lambda_2} = I_{\lambda_1} + I_{\lambda_2}$, получаем, что $I_{\lambda^*} = 0$ и искомое решение имеет вид

$$F(z) \ = \ F_*(z) \prod_{j=1}^{I_\lambda} \frac{1}{(z - z_j)}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

где F_* – решение задачи Римана–Гильберта из предыдущего абзаца с λ_* и φ_* вместо λ и φ в граничном условии (11).

Наконец, решение исходной задачи Римана–Гильберта (2) для уравнения Бельтрами (1) представимо в виде $f = F \circ H$. $\Box$

1. *Adams D.R., Hedberg L.I.* Function spaces and potential theory. – Springer-Verlag, Berlin, 1996.
2. *Agard S. B., Gehring F.W.* Angles and quasiconformal mappings // Proc. London Math. Soc. (3) – 1965. – **14a**. – P. 1–21.
3. *Fékete M.* Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten // Math. Z. – 1923. – **17**. – P. 228–249.
4. *Hilbert D.* Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf eine Problem der Funktionentheorie. – Verhandl. des III Int. Math. Kongr., Heidelberg, 1904.
5. *Hilbert D.* Grundzüge einer algemeinen Theorie der Integralgleichungen. – Leipzig, Berlin, 1912.
6. *Lehto O., Virtanen K.J.* Quasiconformal mappings in the plane. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1973.

7. *Riesz M.* Sur les fonctions conjuguees // Math. Z. – 1927. – **27**. – P. 218–244.
8. *Ryazanov V.I.* On the Riemann-Hilbert problem // arXiv: 1308.2486v6 [math.CV] 12 Oct. 2013, 1–11.
9. *Taari O.* Charakterisierung der QuasikonformitËat mit Hilfe derWinkelverzerrung (German)// Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. – 1966. – **390**. – P. 1–43.
10. *Twomey J.B.* The Hilbert transformation and fine continuity // Irish Math. Soc. Bulletin. – 2006. – **58**. – P. 81–91.
11. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959.
12. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977.
13. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966.
14. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – М.: Мир, 1984.
15. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968.
16. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974.
17. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. – ОГИЗ, Москва, 1941.
18. *Носиро К.* Предельные множества. – М.: ИЛ, 1963.
19. *Рудин У.* Основы математического анализа. – М.: Мир, 1966.

A. S. Yefimushkin, V. I. Ryazanov

On the pseudoregular solutions of the Riemann–Hilbert problem for the Beltrami equations.

Under the negative index, for the non-degenerate Beltrami equations in the unit disk, it is proved the existence of pseudoregular solutions with the total number of poles, not exceeding module of the index, of the Riemann–Hilbert problem with coefficients of bounded variation and almost continuous boundary dates.

Keywords: *the Beltrami equation, the Riemann–Hilbert problem, functions of bounded variation, almost continuous functions, index, pseudoregular solutions, isolated poles, logarithmic capacity.*

А. С. Єфімушкін, В. І. Рязанов

Про псевдорегулярні розв'язки задачі Рімана–Гільберта для рівнянь Бельтрамі.

За умови від'ємного індекса для невироджених рівнянь Бельтрамі в одиничному колі доведено існування псевдорегулярних розв'язків із загальною кількістю полюсів, що не перевищує модуль індекса, задачі Рімана–Гільберта із коефіцієнтами обмеженої варіації, і майже неперервними граничними даними.

Ключові слова: *рівняння Бельтрамі, задача Рімана-Гільберта, функції обмеженої варіації, майже неперервні функції, індекс, псевдорегулярні розв'язки, ізольовані полюси, логарифмічна ємність.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`yefimushkin@yandex.ru, vl.ryazanov1@gmail.com`

Получено 28.07.13