УДК 531.38

©2013. **А. А. Возняк**

О РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЯХ ГИРОСТАТА, НЕСУЩЕГО ДВА ВРАЩАЮЩИХСЯ РОТОРА, ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Исследованы условия существования равномерных движений гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил. Предполагается, что гиростатический момент обусловлен вращением двух роторов относительно ортогональных осей, не совпадающих с осью равномерного движения гиростата.

Ключевые слова: *гиростат, равномерные движения, потенциальные и гироскопические силы.*

Введение. При математическом моделировании движений современных конструкций, не имеющих значительных деформаций, широко применяется система связанных твердых тел, называемая гиростатом. Наиболее общее определение гиростата дано в статье [1], оно также используется и при рассмотрении движения твердого тела, которое содержит полости, наполненные однородной капельной жидкостью [2]. Задача о движении гиростата в различных силовых полях изучается в двух постановках. В первой постановке предполагается, что гиростатический момент постоянен. Поскольку в этом случае уравнения движения допускают три первых интеграла, то это позволило применить при ее использовании многие методы динамики твердого тела. В книгах [3–5] подробно изложены результаты, посвященные исследованию задачи о движении твердого тела и гиростата с постоянным гиростатическим моментом. Вторая постановка задачи о движении гиростата состоит в том, что в ней предполагается переменность гиростатического момента. Это свойство приводит к тому, что уравнения движения гиростата и под действием силы тяжести, и под действием потенциальных и гироскопических сил не допускают интеграл энергии. Результатов по построению других первых интегралов уравнений движения в научных публикациях нет. Однако и во второй постановке получены многочисленные результаты по построению новых решений уравнений движения. Отметим некоторые из них [6–10]. При этом в [6] рассмотрены равномерные вращения гиростата под действием силы тяжести, а в [10] – под действием потенциальных и гироскопических сил в случае, когда гиростат несет один вращающийся маховик. Следовательно, представляет интерес и задача об исследовании равномерных движений гиростата в предположении, что гиростат несет два вращающихся ротора. Этой задаче посвящена данная статья.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом [1] под действием потенциальных и гироскопических сил [5, 11]. Уравнения гиростата запишем в виде:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}(t) \times \boldsymbol{\omega} - \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \qquad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, направленный из неподвижной точки гиростата в обобщенный центр масс гиростата; $\boldsymbol{\lambda}(t)$ – гиростатический момент; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка. Точка над переменными обозначает дифференцирование по времени t. Уравнения (1), (2) имеют первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \tag{3}$$

где k – произвольная постоянная.

В статьях [6, 10] предполагается, что гиростатический момент $\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$, где $\boldsymbol{\alpha}$ – постоянный вектор. То есть гиростат несет один вращающийся ротор. Здесь положим

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$, $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$, $|\boldsymbol{\beta}| = 1$.

Задачу (1), (2) в случае (4) будем рассматривать для равномерных вращений гиростата. Без ограничения общности, положим

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \boldsymbol{a}. \tag{5}$$

Здесь ω_0 – постоянная, отличная от нуля; $\boldsymbol{a}$ – единичный вектор, неизменно связанный с телом-носителем. Так как $\dot{\boldsymbol{a}} = 0$, и вектор $\boldsymbol{a}$ коллинеарен вектору угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, то $\dfrac{d\boldsymbol{a}}{dt} = 0$. Это значит, что вектор $\boldsymbol{a}$ неизменен в неподвижном пространстве. Будем считать, что он не совпадает с вектором $\boldsymbol{\nu}$. Тогда из уравнения (2) в силу (5) вытекает

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \omega_0(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}). \tag{6}$$

Если умножим левую и правую части уравнения (6) скалярно на $\boldsymbol{a}$, то получим

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0 \quad (a_0 = (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nu}}) = \mathrm{const}). \tag{7}$$

Как показано в [5], инвариантному соотношению (7), геометрическому интегралу из (3) и уравнению (6) удовлетворяет следующая вектор-функция:

$$\boldsymbol{\nu}(t) = (a_0' \sin \omega_0 t, a_0' \cos \omega_0 t, a_0), \tag{8}$$

где $a_0' = \sin\theta_0$. Функцию (8) можно рассматривать, как общее решение уравнения (6).

Подставим выражения (4), (5) в уравнение (1)

$$\begin{gathered} \dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\beta} = \omega_0 \left[\lambda_1(t)(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}) + \lambda_2(t)(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{a})\right] + \\ +\omega_0^2(A\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) + \omega_0(\boldsymbol{a} \times B\boldsymbol{\nu}) + \mathrm{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}. \end{gathered} \tag{9}$$

Здесь $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(t)$, где $\boldsymbol{\nu}(t)$ определяется равенством (8).

Обозначим через $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, где

$$\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \quad \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \quad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \tag{10}$$

В силу $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = 0$ векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ составляют ортогональный базис. Поэтому рассмотрим уравнения, которые получаются при проектировании левой и правой частей (9) на эти векторы:

$$\dot{\lambda}_1(t) = \omega_0\gamma_3\lambda_2(t) + A_0 + A_1 \sin\omega_0 t + A_2 \cos\omega_0 t + A_3 \sin 2\omega_0 t + A_4 \cos 2\omega_0 t, \tag{11}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\omega_0\gamma_3\lambda_1(t) + B_0 + B_1 \sin\omega_0 t + B_2 \cos\omega_0 t + B_3 \sin 2\omega_0 t + B_4 \cos 2\omega_0 t, \tag{12}$$

$$\omega_0(\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t)) + C_0 + C_1 \sin\omega_0 t + C_2 \cos\omega_0 t + C_3 \sin 2\omega_0 t + C_4 \cos 2\omega_0 t = 0. \tag{13}$$

В уравнениях (11)–(13) введены обозначения:

$$\begin{aligned}
&A_0 = \alpha_1 c_2 - \alpha_2 c_1, \quad B_0 = \beta_1 c_2 - \beta_2 c_1, \quad C_0 = \gamma_1 c_2 - \gamma_2 c_1,\\
&A_1 = a_0'(\alpha_2 b_1 - \alpha_1 b_0 - \alpha_3 b_2), \quad A_2 = a_0'(\alpha_2 b_0 - \alpha_1 b_1' - \alpha_3 b_2'),\\
&A_3 = \frac{1}{2} a_0'^2[\alpha_1 C_{13} - \alpha_2 C_{23} + \alpha_3(C_{22} - C_{11})],\\
&A_4 = \frac{1}{2} a_0'^2[\alpha_1 C_{23} + \alpha_2 C_{13} - 2\alpha_3 C_{12}),\\
&B_1 = a_0'(\beta_2 b_1 - \beta_1 b_0 - \beta_3 b_2), \quad B_2 = a_0'(\beta_2 b_0 - \beta_1 b_1' + \beta_3 b_2'),\\
&B_3 = \frac{1}{2} a_0'^2[\beta_1 C_{13} - \beta_2 C_{23} + \beta_3(C_{22} - C_{11})],\\
&B_4 = \frac{1}{2} a_0'^2(\beta_1 C_{23} + \beta_2 C_{13} - 2\beta_3 C_{12}),\\
&C_1 = a_0'(\gamma_2 b_1 - \gamma_1 b_0 - \gamma_3 b_2), \quad C_2 = a_0'(\gamma_2 b_0 - \gamma_1 b_1' + \gamma_3 b_2'),\\
&C_3 = \frac{1}{2} a_0'^2[\gamma_1 C_{13} - \gamma_2 C_{23} + \gamma_3(C_{22} - C_{11})],\\
&C_4 = \frac{1}{2} a_0'^2(\gamma_1 C_{23} + \gamma_2 C_{13} - 2\gamma_3 C_{12}),\\
&c_1 = \omega_0^2 A_{13} - a_0\omega_0 B_{13} + a_0 s_1 + \frac{C_{13}}{2}(a_0'^2 - 2a_0^2),\\
&c_2 = \omega_0^2 A_{23} - a_0\omega_0 B_{23} + a_0 s_2 + \frac{C_{23}}{2}(a_0'^2 - 2a_0^2),\\
&b_0 = \omega_0 B_{12} + a_0 C_{12}, \quad b_1 = s_3 + \omega_0 B_{11} + a_0(C_{11} - C_{33}), \quad b_2 = s_1 - a_0 C_{23},\\
&b_1' = s_3 + \omega_0 B_{22} + a_0(C_{22} - C_{33}), \quad b_2' = s_2 - a_0 C_{13}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, задача об исследовании условий существования равномерных движений гиростата сведена к анализу решений уравнений (11), (12) при наличии у них инвариантного соотношения (13).

2. Исследование уравнений (11)–(13). Согласно методу инвариантных соотношений [12] вычислим первую и вторую производные от инвариантного соотношения (13) в силу уравнений (11), (12):

$$\begin{aligned}&\gamma_3\omega_0(\beta_3\lambda_2(t)+\alpha_3\lambda_1(t))+(\beta_3A_0-\alpha_3B_0)+(\beta_3A_1-\alpha_3B_1-C_2)\sin\omega_0t+\\&+(\beta_3A_2-\alpha_3B_2+C_1)\cos\omega_0t+(\beta_3A_3-\alpha_3B_3-2C_4)\sin2\omega_0t+\\&+(\beta_3A_4-\alpha_3B_4+2C_3)\cos2\omega_0t=0,\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}&\gamma_3^2\omega_0(\alpha_3\lambda_2(t)-\beta_3\lambda_1(t))+\gamma_3(\alpha_3A_0+\beta_3B_0)+\\&+(\gamma_3\beta_3B_1+\gamma_3\alpha_3A_1-\beta_3A_2+\alpha_3B_2-C_1)\sin\omega_0t+\\&+(\gamma_3\beta_3B_2+\gamma_3\alpha_3A_2-\beta_3A_1-\alpha_3B_1-C_2)\cos\omega_0t+\\&+(\gamma_3\beta_3B_3+\gamma_3\alpha_3A_3-2\beta_3A_4+2\alpha_3B_4-4C_3)\sin2\omega_0t+\\&+(\gamma_3\beta_3B_4+\gamma_3\alpha_3A_4+2\beta_3A_3-2\alpha_3B_3-4C_4)\cos2\omega_0t.\end{aligned}\tag{16}$$

Вид соотношений (13), (15), (16) показывает, что вычисление производных от (13) более высокого порядка нецелесообразно.

Рассмотрение инвариантных соотношений (13), (15), (16) будем производить в следующих трех вариантах:

$$1.\ \alpha_3=0,\quad \beta_3=0;\quad 2.\ \gamma_3=0,\quad \alpha_3^2+\beta_3^2\neq0;\quad 3.\ \gamma_3\neq0,\quad \alpha_3^2+\beta_3^2\neq0.\tag{17}$$

Изучим первый вариант из (17). Положим в уравнениях (11), (12), соотношении (13) и в обозначениях (14): $\alpha_3=0,\beta_3=0$. Равенство (13) должно быть тождеством по t. То есть должны выполняться условия $C_i=0$ ($i=\overline{0,4}$). На основании (14) из них получим (систему координат, без ограничения общности, можно выбрать так, чтобы выполнялись равенства $\alpha_2=0,\beta_1=0$)

$$C_{12}=0,\quad C_{22}=C_{11},\quad s_1=a_0C_{13},\quad s_2=a_0C_{23}.\tag{18}$$

Для интегрирования уравнений (11), (12) исключим в уравнении (11) функцию $\lambda_2(t)$ с помощью уравнения (12). Используя условия (18), получим

$$\ddot\lambda_1(t)+\omega_0^2\lambda_1(t)=\omega_0B_0+D_1\sin\omega_0t+D_3\sin2\omega_0t+D_4\cos2\omega_0t,\tag{19}$$

где

$$\begin{aligned}&D_1=a_0'\omega_0[2s_3+\omega_0(B_{11}+B_{22})+2a_0(C_{11}-C_{33})],\\&D_3=-\frac{3}{2}a_0'^2\omega_0C_{23},\quad D_4=\frac{3}{2}a_0'^2\omega_0C_{13}.\end{aligned}\tag{20}$$

Из структуры уравнения (5) следует, что в общем случае ($D_1\neq0$) общее решение уравнения (19) будет содержать вековой член. Этот вариант не представляет интереса для приложений. Поэтому в (19) положим $D_1=0$, или в силу (20) получим условие на параметры

$$2s_3+\omega_0(B_{11}+B_{22})+2a_0(C_{11}-C_{33})=0.\tag{21}$$

Решение уравнения (19) при наличии ограничения (21) таково:

$$\lambda_1(t) = C_1^* \sin\omega_0 t + C_2^* \cos\omega_0 t + \frac{B_0}{\omega_0} - \frac{D_3}{3\omega_0^2}\sin 2\omega_0 t - \frac{D_4}{3\omega_0^2}\cos 2\omega_0 t. \tag{22}$$

Функцию $\lambda_2(t)$ найдем, подставив выражение (22) в уравнение (11)

$$\begin{gathered}\lambda_2(t) = \frac{1}{\gamma_3\omega_0}\Bigg[- A_0(\omega_0 C_1^* - A_2)\cos\omega_0 t - (\omega_0 C_2^* + A_1)\sin\omega_0 t + \\ + \left(\frac{2D_4}{3\omega_0} - A_3\right)\sin 2\omega_0 t - \left(\frac{2D_3}{3\omega_0} + A_4\right)\cos 2\omega_0 t\Bigg].\end{gathered} \tag{23}$$

Таким образом, в первом случае из (17) вектор $\boldsymbol{\gamma}$ совпадает с вектором $\boldsymbol{a}$, параметры задачи удовлетворяют условиям (18), (21), решение уравнений (11), (12) имеют вид (22), (23).

Изучим случай 2 из (17). В силу (10) параметры $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ удовлетворяют равенству $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$. Очевидно, что тогда $\alpha_3^2 + \beta_3^2 = 1$. Равенство (13) будет содержать функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ (либо одну из них), а первая производная из (15) будет функцией переменной t. Поэтому должны выполняться равенства:

$$\begin{gathered}\beta_3 A_0 - \alpha_3 B_0 = 0, \quad \beta_3 A_1 - \alpha_3 B_1 - C_2 = 0, \quad \beta_3 A_2 - \alpha_3 B_2 + C_1 = 0, \\ \beta_3 A_3 - \alpha_3 B_3 - 2C_4 = 0, \quad \beta_3 A_4 - \alpha_3 B_4 + 2C_3 = 0.\end{gathered} \tag{24}$$

Внесем значения A_i, B_i, C_i $(i = \overline{0,4})$ из (14) в систему (24). Тогда получим:

$$\gamma_1\mu_0 = 0, \quad \gamma_2\mu_0 = 0, \quad C_{13}\gamma_2 + C_{23}\gamma_1 = 0, \quad C_{23}\gamma_2 - C_{13}\gamma_1 = 0, \tag{25}$$

$$\gamma_1(\omega_0^2 A_{13} - \omega_0 a_0 B_{13} + a_0 s_1) + \gamma_2(\omega_0^2 A_{23} - \omega_0 a_0 B_{23} + a_0 s_2) = 0, \tag{26}$$

где

$$\mu_0 = 2s_3 + \omega_0(B_{11} + B_{22}) + a_0(C_{11} + C_{22} - 2C_{33}). \tag{27}$$

Так как $\gamma_3 = 0$, $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1$, то из уравнений (25) следует, что параметр μ_0 равен нулю и величины C_{13}, C_{23} удовлетворяют равенствам

$$C_{13} = 0, \quad C_{23} = 0. \tag{28}$$

Из (27) вытекает

$$2s_3 + \omega_0(B_{11} + B_{22}) + a_0(C_{11} + C_{22} - 2C_{33}) = 0. \tag{29}$$

Следовательно, условиями существования равномерных вращений гиростата в случае $\gamma_3 = 0$ являются равенства (26), (28), (29). При этом равенство (29) может служить условием на значение ω_0–скорости вращения в предположении $B_{11} + B_{22} \neq 0$. Если $B_{11} + B_{22} = 0$, $C_{11} + C_{22} - 2C_{33} \neq 0$, то из (29) можно определить значение угла θ_0. Условие (26) можно трактовать при определенных ограничениях, как условие на параметры ω_0, a_0. При этом ось равномерного вращения может быть и главной, то есть могут выполняться равенства: $A_{23}=0, A_{13}=0$. Она в неподвижном пространстве может занимать и горизонтальное положение.

Функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ определим из уравнений (11), (12):

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t) &= \frac{1}{\omega_0}\left(A_2\sin\omega_0 t - A_1\cos\omega_0 t + \frac{A_4}{2}\sin 2\omega_0 t - \frac{A_3}{2}\cos 2\omega_0 t\right) + \mu_1,\\
\lambda_2(t) &= \frac{1}{\omega_0}\left(B_2\sin\omega_0 t - B_1\cos\omega_0 t + \frac{B_4}{2}\sin 2\omega_0 t - \frac{B_3}{2}\cos 2\omega_0 t\right) + \mu_2.
\end{aligned} \tag{30}$$

В формулах (30) произвольные постоянные μ_1, μ_2 удовлетворяют условию

$$(\mu_1\beta_3 - \mu_2\alpha_3)\omega_0 + C_0 = 0.$$

Рассмотрим третий случай из (17). Подставим выражение $\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t)$ из уравнения (13) в уравнение (16) и потребуем, чтобы полученное уравнение было тождеством по t. Тогда получим:

$$\begin{aligned}
&\gamma_3 C_0 + \alpha_3 A_0 + \beta_3 B_0 = 0,\\
&C_1(\gamma_3^2 - 1) + \gamma_3(\beta_3 B_1 + \alpha_3 A_1) + \alpha_3 B_2 - \beta_3 A_2 = 0,\\
&C_2(\gamma_3^2 - 1) + \gamma_3(\beta_3 B_2 + \alpha_3 A_2) + \beta_3 A_1 - \alpha_3 B_1 = 0,\\
&C_3(\gamma_3^2 - 4) + \gamma_3(\beta_3 B_3 + \alpha_3 A_3) - 2\beta_3 A_4 + 2\alpha_3 B_4 = 0,\\
&C_4(\gamma_3^2 - 4) + \gamma_3(\beta_3 B_4 + \alpha_3 A_4) + 2\beta_3 A_3 - 2\alpha_3 B_3 = 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

На основании равенств $|\boldsymbol{\alpha}|=1$, $|\boldsymbol{\beta}|=1$, $|\boldsymbol{\gamma}|=1$, $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$, $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\gamma}=0$, $\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}=0$ нетрудно доказать справедливость равенств

$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad \gamma_1\gamma_3 + \beta_1\beta_3 + \alpha_1\alpha_3 = 0, \quad \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0.$$

Используя эти равенства, подставим выражения (14) в систему (31). После нескольких преобразований имеем первые два равенства из (25), в которых μ_0 имеет значение (27) и условия

$$\gamma_3 C_{12} - \gamma_2 C_{13} - \gamma_1 C_{23} = 0, \quad \gamma_3(C_{22} - C_{11}) - 2\gamma_2 C_{23} + 2\gamma_1 C_{13} = 0. \tag{32}$$

Если в равенствах $\gamma_1\mu_0 = 0$, $\gamma_2\mu_0 = 0$ положить $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, то $\gamma_3 = 1$, и вектор $\boldsymbol{\gamma}$ будет сонаправлен с вектором a. В этом случае должны выполняться условия $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 0$, которые приводят к уже рассмотренному выше первому варианту из (17). Поэтому необходимо считать, что $\mu_0 = 0$. В параметрах задачи это условие приводит к равенству (29). Таким образом, уравнение (16) является следствием уравнения (13) при выполнении условий (29), (32). Функции $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ найдем из уравнений (13), (15):

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t) = \frac{1}{\omega_0\gamma_3(\alpha_3^2+\beta_3^2)}\big\{&[\alpha_3^2 B_0 - \beta_3(\gamma_3 C_0 + \alpha_3 A_0)] + [\alpha_3^2 B_1 - \beta_3(\gamma_3 C_1 +\\
&+\alpha_3 A_1) - \alpha_3 C_2]\sin\omega_0 t + [\alpha_3^2 B_2 - \beta_3(\gamma_3 C_2 + \alpha_3 A_2) - \alpha_3 C_1]\cos\omega_0 t +\\
&+[\alpha_3^2 B_3 - \beta_3(\gamma_3 C_3 + \alpha_3 A_3) + 2\alpha_3 C_4]\sin 2\omega_0 t +\\
&+[\alpha_3^2 B_4 - \beta_3(\gamma_3 C_4 + \alpha_3 A_4) - 2\alpha_3 C_3]\cos 2\omega_0 t\big\},
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\lambda_2(t) = \frac{1}{\omega_0\gamma_3(\alpha_3^2+\beta_3^2)}\big\{[-\beta_3^2 A_0 + \alpha_3(\gamma_3 C_0 + \beta_3 B_0)] + [-\beta_3^2 A_1 + \alpha_3(\gamma_3 C_1 + \\ +\beta_3 B_1) + \beta_3 C_2]\sin\omega_0 t + [-\beta_3^2 A_2 + \alpha_3(\gamma_3 C_2 + \beta_3 B_2) - \beta_3 C_1]\cos\omega_0 t + \\ +[-\beta_3^2 A_3 + \alpha_3(\gamma_3 C_3 + \beta_3 B_3) + 2\beta_3 C_4]\sin 2\omega_0 t + \\ +[-\beta_3^2 A_4 + \alpha_3(\gamma_3 C_4 + \beta_3 B_4) - 2\beta_3 C_3]\cos 2\omega_0 t\big\}. \tag{34}$$

Из (33), (34) вытекает, что компоненты гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda}(t)$ являются периодическими функциями времени с периодом $\dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

Проведем анализ условий существования (29), (32). Если в исходных уравнениях (1), (2) отсутствует матрица C, т.е. $C = 0$, то равенства (32) становятся тождествами, а условие (29) примет вид

$$2s_3 + \omega_0(B_{11} + B_{22}) = 0. \tag{35}$$

Если $B_{11} + B_{22} \neq 0$, то из (35) имеем $\omega_0 = -\dfrac{2s_3}{B_{11}+B_{22}}$. Полученный результат можно трактовать следующим образом. Так как нет условий на параметры α_i, β_i, то векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ могут занимать произвольное положение в теле-носителе. Скорость равномерного вращения гиростата фиксирована и зависит от параметров s_3 и B_{11}, B_{22}. Угол θ_0 не входит в обсуждаемые условия, поэтому ось равномерного вращения гиростата может занимать произвольное положение в неподвижном пространстве. Если в равенстве (35) $B_{11} + B_{22} = 0$, то $s_3 = 0$. В этом случае скорость равномерного вращения гиростата может быть произвольной, но барицентрическая ось ортогональна оси равномерного вращения. Параметр θ_0, как и в предыдущем случае, остается произвольным.

Пусть матрица $C \neq 0$. Из равенств (32) в силу $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, имеем

$$\gamma_1 = \frac{2C_{12}C_{23} + C_{13}(C_{11} - C_{22})}{2(C_{13}^2 + C_{23}^2)}\gamma_3, \quad \gamma_2 = \frac{2C_{12}C_{13} - C_{23}(C_{11} - C_{22})}{2(C_{13}^2 + C_{23}^2)}\gamma_3, \\ \gamma_3 = 2\sqrt{\frac{C_{13}^2 + C_{23}^2}{4(C_{12}^2 + C_{13}^2 + C_{23}^2) + (C_{11} - C_{22})^2}}. \tag{36}$$

Компоненты вектора γ из (36) определяют в теле-носителе некоторую ось. В силу постановки задачи необходимо потребовать, чтобы вектор гиростатического момента находился в плоскости, ортогональной указанной оси. Это свойство ограничивает общность положения векторов $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$.

Рассмотрим равенство (29). Если в нем положить $B_{11}+B_{22} = 0$, $C_{11}+C_{22}-2C_{33} = 0$, то в решении (33), (34) параметры ω_0 и a_0 могут принимать произвольные значения ($|a_0| < 1$). Так как $s_3 = 0$, то ось, несущая обобщенный центр масс, ортогональна оси равномерного вращения.

При выполнении условия $B_{11} + B_{22} \neq 0$ из равенства (29) следует, что равномерное вращение гиростата может происходить с фиксированным значением ω_0. Условия на положение барицентрической оси в теле-носителе нет.

Когда $B_{11} + B_{22} = 0$, $C_{11} + C_{22} - 2C_{33} \neq 0$, из равенства (29) можно определить значение

$$a_0 = \frac{2s_3}{2C_{33} - C_{11} - C_{22}}. \tag{37}$$

То есть равномерное вращение будет происходить вокруг фиксированной оси в неподвижном пространстве. При этом необходимо потребовать, чтобы правая часть выражения (37) не превосходила по модулю единицы.

В общем случае условие (29) может служить ограничением на скорость равномерного вращения и угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\nu}$.

Заключение. В статье получены условия существования равномерных вращений гиростата, несущего два вращающихся ротора. Исследование этих условий удалось разбить на изучение трех вариантов (17). Первый вариант соответствует случаю, когда гиростатический момент находится в плоскости, ортогональной оси равномерного вращения. Для него должны выполняться условия (18), (21), а решение редуцированных уравнений имеет вид (22), (23). Во втором варианте векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ компланарны, а параметры задачи должны удовлетворять равенствам (28), (29), которые отличаются от условий (18), (21). Третий вариант характеризуется общим расположением векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ только в случае, когда в уравнение (1) не входит матрица C. Если же $C \neq 0$, то векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, определяющие вектор гиростатического момента, лежат в некоторой плоскости, ортогональной оси с направляющим вектором (36). Общее свойство решений: (22), (23); (30); (33), (34) состоит в том, что при выполнении условия $B_{11} + B_{22} = 0$ равномерное вращение гиростата может происходить с произвольной угловой скоростью.

1. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
2. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. М.; Л.: ОГИЗ, 1949. – Т. 2. – С. 152–309.
3. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка. – 1978. – С. 296.
4. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. – К.: Наук. думка, 2012. – 401 с.
5. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ. – 2012. – С. 364.
6. *Ковалев А.М., Позднякова А.Е.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100–105.
7. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Точные решения уравнений движения гиростата с неподвижной точкой // Современные проблемы математики, механики и информатики. – Харьков: Вид-во ФОП. – 2011. – С. 74–84.
8. *Мазнев А.В.* Прецесионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
9. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О движении симметричного гиростата с переменным гиростатическим моментом в двух задачах динамики // Нелинейная динамика. – Ижевск, 2012. – **8**, № 2. – С. 369–376.
10. *Возняк А.А., Миронова Е.В.* О равномерных вращениях относительно наклонной оси гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Вiсник Донецького нацiонального ун-ту. – 2012. – № 2. – С. 15–18.

11. *Jehia H.M.* On the motion a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forges. I: The equations of motion and their transformations // J. Még. Théor. Appl. – 1986. – **5**, No. 5. – P. 747–754.
12. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.

A. A. Voznyak

Uniform motion of gyrostat carrying two rotating rotor under the action of potential and gyroscopic forces.

The conditions for the existence of uniform motions of gyrostat with varying gyrostatic moment under the action of potential and gyroscopic forces has been studied. It is assumed that gyrostatic moment due to the rotation of the rotor relative to the two orthogonal axes which do not coincide with the axis of uniform motion of gyrostat.

Keywords: *gyrostat, uniform motion, potential and gyroscopic forces.*

А. О. Возняк

Про рівномірні рухи гіростата, що несе два обертових ротора, під дією потенціальних і гіроскопічних сил.

Досліджено умови існування рівномірних рухів гіростата зі змінним гіростатичним моментом під дією потенціальних і гіроскопічних сил. Передбачається, що гіростатичний момент обумовлений обертанням двох роторів відносно ортогональних осей, що не збігаються з віссю рівномірного руху гіростата.

Ключові слова: *гіростат, рівномірні рухи, потенціальні і гіроскопічні сили.*

Донецкий национальный ун-т экономики
и торговли им. Туган–Барановского
alina_voznyak@mail.ru

Получено 26.09.13