УДК 531.38

©2013. **С. Н. Судаков**

# УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОГО ЭЛЛИПСОИДА И СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Рассмотрена задача о движении гравитирующей эллипсоидальной массы идеальной несжимаемой жидкости и сферически симметричного твердого тела. Предполагается, что центр масс жидкого эллипсоида и твердого тела совершают плоское движение. Движение жидкости предполагается однородным вихревым. Вектор вихря скорости жидкости все время направлен ортогонально плоскости движения центров масс жидкого эллипсоида и твердого тела. Получены уравнения движения в форме Гамильтона.

***Ключові слова:*** *эллипсоид, жидкость, вихрь, гравитация, задача Роша.*

В работах В.Е. Петкевича [3, 4] дана постановка задачи о движении двух жидких тел и получены уравнения их движения. Решение этой задачи достаточно сложно. Поэтому, прежде чем приступить к ее решению, желательно решить ряд более простых задач, подводящих к ней. Первым шагом на этом пути можно считать задачу Роша [1, 6, 8].

Целью настоящей работы является вывод уравнений Гамильтона плоского движения системы, состоящей из эллипсоидальной массы гравитирующей идеальной несжимаемой жидкости и притягивающегося к ней по закону Ньютона сферически симметричного твердого тела (ССТТ).

Плоским движением жидкого эллипсоида и ССТТ будем называть движение, при котором центры масс обоих тел движутся в одной и той же плоскости, а вектор вихря скорости жидкости и одна из главных осей жидкого эллипсоида направлены ортогонально к этой плоскости.

**1. Описание рассматриваемой системы.** Пусть $O_c\xi_1\xi_2\xi_3$ – неподвижная декартова система координат. Плоскость $O_c\xi_1\xi_2$ является плоскостью, в которой движется центр масс $O_1$ жидкого гравитирующего эллипсоида и центр масс ССТТ $O_2$.

Обозначим через $O_1x_1x_2x_3$ – прямоугольную декартову систему координат, оси которой совпадают с главными осями границы эллипсоидальной массы жидкости. Плоскость $O_1x_1x_2$ лежит в плоскости движения центров массс. Жидкость считается идеальной несжимаемой с плотностью $\rho$. Граница жидкости в осях $O_1x_1x_2x_3$ задается уравнением

$$x_1^2/c_1^2 + x_2^2/c_2^2 + x_3^2/c_3^2 = 1, \tag{1.1}$$

где $c_1, c_2, c_3$ – непрерывные достаточно гладкие функции времени $t$, удовлетворяющие условию $c_1c_2c_3 = R^3 = \text{const}$. Масса жидкости определяется выражением $m_1 = \frac{4}{3}\pi\rho c_1c_2c_3$ . Массу ССТТ обозначим через $m_2$. Будем считать, что центр масс всей системы неподвижен и совпадает с точкой $O_c$.

Вращение свободной поверхности (1.1) происходит вокруг оси $O_1x_3$. Вектор вихря скорости жидкости направлен по оси $O_1x_3$.

Введем еще декартову систему координат $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$, оси которой направим параллельно соответствующим осям $O_c\xi_1\xi_2\xi_3$.

Точки $O_c$, $O_1$, $O_2$ будут все время находиться на одной прямой. Обозначим расстояние $O_cO_1$ через $r_1R$, а расстояние $O_cO_2$ через $r_2R$, где $r_1$ и $r_2$ – безразмерные величины. Тогда

$$m_1r_1 = m_2r_2. \tag{1.2}$$

Расстояние между точками $O_1$ и $O_2$ обозначим $rR$, где $r = r_1 + r_2$. Используя соотношения (1.2), выразим $r$ через $r_1$

$$r = \frac{r_1}{m}, \quad m = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \tag{1.3}$$

**2. Кинетическая энергия.** Кинетическая энергия слагается из кинетической энергии поступательного движения центра масс жидкости $O_1$, кинетической энергии центра масс ССТТ $O_2$ и кинетической энергии движения жидкости относительно осей $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$.

Точка $O_1$ в осях $O_c\xi_1\xi_2\xi_3$ имеет координаты

$$Rr_1\cos\varphi, \quad Rr_1\sin\varphi, \quad 0, \tag{2.1}$$

где $\varphi$ – угол между полуосью $O_c\xi_1$ и радиусом-вектором $O_cO_1$. Дифференцируя (2.1) по $t$, находим проекции скорости точки $O_1$ на оси $O_c\xi_1\xi_2\xi_3$

$$v_{11} = R(\dot r_1\cos\varphi - \dot\varphi r_1\sin\varphi), \quad v_{12} = R(\dot r_1\sin\varphi + \dot\varphi r_1\cos\varphi), \quad v_{13} = 0.$$

Тогда кинетическая энергия движения центра масс жидкости будет равна

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1(v_{11}^2 + v_{12}^2 + v_{13}^3)$$

или

$$T_1 = \frac{R^2}{2}m_1(\dot r_1^2 + \dot\varphi^2 r_1^2). \tag{2.2}$$

Точка $O_2$ в осях $O_c\xi_1\xi_2\xi_3$ имеет координаты

$$-Rr_2\cos\varphi, \quad -Rr_2\sin\varphi, \quad 0. \tag{2.3}$$

Дифференцируя (2.3) по $t$, находим проекции скорости точки $O_2$ на оси $O_c\xi_1\xi_2\xi_3$

$$v_{21} = -R(\dot r_2\cos\varphi - \dot\varphi r_2\sin\varphi), \quad v_{22} = -R(\dot r_2\sin\varphi + \dot\varphi r_2\cos\varphi), \quad v_{23} = 0.$$

Тогда кинетическая энергия материальной точки $O_2$ запишется в виде

$$T_2 = \frac{R^2}{2}m_2(\dot r_2^2 + \dot\varphi^2 r_2^2).$$

Используя равенство (1.2), перепишем $T_2$ в виде

$$T_2 = \frac{m_1^2 R^2}{2m_2}(\dot{r}_1^2 + \dot{\varphi}^2 r_1^2). \tag{2.4}$$

Запишем выражение для кинетической энергии движения жидкости относительно осей $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$. Для этого введем обобщенные координаты, описывающие движение частиц жидкости относительно $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$. За первые три из них примем введенные ранее величины $c_1, c_2$ и угол $\psi$ между продолжением радиуса-вектора $O_cO_1$ и полуосью $O_1x_1$. Еще одна обобщенная координата $\alpha$, описывающая поворот всей массы жидкости относительно осей $O_1x_1x_2x_3$, вводится следующим образом [7].

Пусть $x_{10}, x_{20}, x_{30}$ – координаты частицы жидкости в начальный момент движения, а $c_{10}, c_{20}, c_{30}$ – начальные значения величин $c_1, c_2, c_3$. Выясним, куда перейдет эта частица после трех линейных преобразований их координат:

1) линейное преобразование эллипсоидальной массы жидкости в шар

$$x_i' = Rx_{i0}/c_{i0}, \quad R = \sqrt[3]{c_{10}c_{20}c_{30}}\,;$$

2) Поворот шара вокруг оси $O_1x_3$ на угол $\alpha$

$$x_1'' = x_1'\cos\alpha - x_2'\sin\alpha, \quad x_2'' = x_1'\sin\alpha + x_2'\cos\alpha, \quad x_3'' = x_3',$$

3) линейное преобразование шара в объем, ограниченный эллипсоидом

$$x_i = x_i'' c_i/R.$$

Матрица трех последовательных линейных преобразований имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} c_1/R & 0 & 0 \\ 0 & c_2/R & 0 \\ 0 & 0 & c_3/R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R/c_{10} & 0 & 0 \\ 0 & R/c_{20} & 0 \\ 0 & 0 & R/c_{30} \end{pmatrix}$$

или

$$A = \begin{pmatrix} (c_1/c_{10})\cos\alpha & (c_1/c_{20})\sin\alpha & 0 \\ (c_2/c_{10})\sin\alpha & (c_2/c_{20})\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & c_3/c_{30} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\zeta_1/\zeta_{10})\cos\alpha & (\zeta_1/\zeta_{20})\sin\alpha & 0 \\ (\zeta_2/\zeta_{10})\sin\alpha & (\zeta_2/\zeta_{20})\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_{10}\zeta_{20}/\zeta_1\zeta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где $\zeta_i = c_i/R, \quad \zeta_{i0} = c_{i0}/R.$

Дифференцируя (2.5) по $t$, находим компоненты скорости частицы жидкости относительно осей $O_1x_1x_2x_3$

$$v_1' = (\dot{\zeta}_1\cos\alpha - \zeta_1\dot{\alpha}\sin\alpha)\frac{x_{10}}{\zeta_{10}} - (\dot{\zeta}_1\sin\alpha + \zeta_1\dot{\alpha}\cos\alpha)\frac{x_{20}}{\zeta_{20}}\,,$$

$$v_2' = (\dot\zeta_2 \sin\alpha + \zeta_2\dot\alpha\cos\alpha)\frac{x_{10}}{\zeta_{10}} + (\dot\zeta_2\cos\alpha - \zeta_2\dot\alpha\sin\alpha)\frac{x_{20}}{\zeta_{20}}\,, \tag{2.6}$$

$$v_3' = -\left(\frac{\dot\zeta_1}{\zeta_1} + \frac{\dot\zeta_2}{\zeta_2}\right)\frac{\zeta_{10}\zeta_{20}}{\zeta_1\zeta_2}\,x_{30}\,.$$

Переносная скорость, обусловленная вращением осей $O_1x_1x_2x_3$ относительно $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$, определена выражением

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}, \tag{2.7}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \dot\varphi + \dot\psi)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. В проекциях на оси $O_1x_1x_2x_3$ выражение (2.7) принимает вид

$$u_1 = -(\dot\varphi + \dot\psi)x_2, \quad u_2 = (\dot\varphi+\dot\psi)x_1, \quad u_3 = 0.$$

Используя формулы (2.5), выразим $u_1, u_2, u_3$ через $x_{10}, x_{20}, x_{30}$

$$u_1 = -(\dot\varphi+\dot\psi)\zeta_2\left(\frac{x_{10}}{\zeta_{10}}\sin\alpha + \frac{x_{20}}{\zeta_{20}}\cos\alpha\right),$$

$$u_2 = (\dot\varphi+\dot\psi)\zeta_1\left(\frac{x_{10}}{\zeta_{10}}\cos\alpha - \frac{x_{20}}{\zeta_{20}}\sin\alpha\right), \quad u_3 = 0. \tag{2.8}$$

Складывая (2.6) и (2.8), находим проекции на оси $O_1x_1x_2x_3$ скорости частицы жидкости относительно осей $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$

$$\begin{gathered}
v_1 = [\dot\zeta_1\cos\alpha - \zeta_1\dot\alpha\sin\alpha - (\dot\varphi+\dot\psi)\zeta_2\sin\alpha]x_{10}/\zeta_{10} - \\
-[\dot\zeta_1\sin\alpha + \zeta_1\dot\alpha\cos\alpha + (\dot\varphi+\dot\psi)\zeta_2\cos\alpha]x_{10}/\zeta_{20}\,, \\
v_2 = [\dot\zeta_2\sin\alpha + \zeta_2\dot\alpha\cos\alpha + (\dot\varphi+\dot\psi)\zeta_1\cos\alpha]x_{10}/\zeta_{10} + \\
+[\dot\zeta_2\cos\alpha - \zeta_2\dot\alpha\sin\alpha - (\dot\varphi+\dot\psi)\zeta_1\sin\alpha]x_{20}/\zeta_{20}\,, \\
v_3 = -(\dot\zeta_1/\zeta_1 + \dot\zeta_2/\zeta_2)\frac{\zeta_{10}\zeta_{20}}{\zeta_1\zeta_2}\,x_{30}\,.
\end{gathered} \tag{2.9}$$

Кинетическая энергия движения жидкости относительно осей $O_1\eta_1\eta_2\eta_3$ имеет вид

$$T_3 = \frac{\rho}{2}\int\int\limits_{Q_0}\int(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)dx_{10}dx_{20}dx_{30}\,,$$

где $Q_0$ область в осях $O_1x_1x_2x_3$, занимаемая жидкостью в начальный момент движения. Используя формулы (2.9) и

$$\frac{\rho}{2}\int\int\limits_{Q_0}\int {x_{i0}}^2 dx_{10}dx_{20}dx_{30} = \frac{m_1{c_{i0}}^2}{10}\,,$$

представим $T_3$ в виде

$$T_3 = \frac{m_1R^2}{10}\{[\dot\zeta_1\cos\alpha - \zeta_1\dot\alpha\sin\alpha - (\dot\varphi+\dot\psi)\zeta_2\sin\alpha]^2 +$$

$$+[\dot\zeta_1\sin\alpha+\zeta_1\dot\alpha\cos\alpha+(\dot\varphi+\dot\psi)\zeta_2\cos\alpha]^2+$$
$$+[\dot\zeta_2\sin\alpha+\zeta_2\dot\alpha\cos\alpha+(\dot\varphi+\dot\psi)\zeta_1\cos\alpha]^2+$$
$$+[\dot\zeta_2\cos\alpha-\zeta_2\dot\alpha\sin\alpha-(\dot\varphi+\dot\psi)\zeta_1\sin\alpha]^2+$$
$$+[(\dot\zeta_1/\zeta_1+\dot\zeta_2/\zeta_2)/(\zeta_1\zeta_2)]^2\},$$

где $m_1=\frac{4}{3}\pi\rho c_1c_2c_3$ – масса жидкого эллипсоида.

Кинетическая энергия всей системы равна $T=T_1+T_2+T_3$. Окончательно $T$ принимает вид

$$T=\frac{m_1R^2}{2}\left\{\frac{1}{5}\left[\dot\zeta_1^2+\dot\zeta_2^2+\dot\alpha^2(\zeta_1^2+\zeta_2^2)+(\dot\varphi+\dot\psi)^2(\zeta_1^2+\zeta_2^2)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+4\dot\alpha(\dot\varphi+\dot\psi)\zeta_1\zeta_2+\frac{\dot\zeta_1^2}{\zeta_1^4\zeta_2^2}+\frac{\dot\zeta_2^2}{\zeta_1^2\zeta_2^4}+\frac{2\dot\zeta_1\dot\zeta_2}{\zeta_1^3\zeta_2^3}\right]+\frac{1}{m}(\dot r_1^2+\dot\varphi^2r_1^2)\right\}. \qquad (2.10)$$

**3. Потенциальная энергия.** Потенциальная энергия всей системы имеет вид

$$\Pi(\zeta_1,\zeta_2,r_1,\psi)=\Pi_1(\zeta_1,\zeta_2)+\Pi_2(\zeta_1,\zeta_2,r_1,\psi),$$

где

$$\Pi_1=-\frac{3m_1^2\gamma}{5R}\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty\frac{d\lambda}{\sqrt{(\zeta_1^2+\lambda)(\zeta_2^2+\lambda)(\zeta_1^{-2}\zeta_2^{-2}+\lambda)}}-1\right),$$

$\gamma$ – гравитационная постоянная [2, с. 884 - 885]. Следуя [5], выражение для $\Pi_2$ запишем так:

$$\Pi_2=-\gamma m_2\left[\frac{m_1}{r_*}+\frac{A_2+A_3-2A_1}{2r_*^3}+\frac{3(A_1-A_2)X_2^2-3(A_3-A_1)X_3^2}{2r_*^5}\right],$$

где

$$r_*=Rr_1\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right),\quad A_1=\rho\int\limits_Q(x_2^2+x_3^2)dQ=\frac{m_1R^2}{5}\left(\zeta_2^2+\frac{1}{\zeta_1^2\zeta_2^2}\right),$$

$$A_2=\rho\int\limits_Q(x_3^2+x_1^2)dQ=\frac{m_1R^2}{5}\left(\zeta_1^2+\frac{1}{\zeta_1^2\zeta_2^2}\right),\quad A_3=\rho\int\limits_Q(x_1^2+x_2^2)dQ=\frac{m_1R^2}{5}(\zeta_1^2+\zeta_2^2),$$

$Q$ – объем, занятый жидкостью, $X_1,X_2,X_3$ – координаты материальной точки $O_2$ в осях $O_1x_1x_2x_3$. Они определяются формулами $X_1=-r_*\sin\psi,\quad X_2=-r_*\cos\psi,\quad X_3=0$. Тогда

$$\Pi_2=-\gamma m_2\left[\frac{m_1}{r_*}+\frac{A_2+A_3-2A_1}{2r_*^3}+\frac{3(A_1-A_2)\cos^2\psi}{2r_*^3}\right].$$

После несложных преобразований получаем

$$\Pi_2=-\gamma m_1m_2\left\{\frac{1}{r_*}+\frac{R^2}{10r_*^3}\left[(2\zeta_1^2-\zeta_2^2)\sin^2\psi+(2\zeta_2^2-\zeta_1^2)\cos^2\psi-\frac{1}{\zeta_1^2\zeta_2^2}\right]\right\}.$$

Используя (1.3), представим $\Pi_2$ в виде

$$\Pi_2 = -\frac{\gamma m_1 m_2 m}{R}\left\{\frac{1}{r_1} + \frac{m^2}{10r_1^3}\left[(2\zeta_1^2 - \zeta_2^2)\sin^2\psi + (2\zeta_2^2 - \zeta_1^2)\cos^2\psi - \frac{1}{\zeta_1^2\zeta_2^2}\right]\right\}.$$

**4. Уравнения Гамильтона.** За обобщенные координаты принимаем $\zeta_1$, $\zeta_2$, $\alpha$, $\varphi, \psi, r_1$. Соответствующие им обобщенные импульсы обозначим $p_1$, $p_2$, $p_\alpha$, $p_\varphi$, $p_\psi$, $p_{r_1}$. Дифференцируя $T$ по обобщенным скоростям, находим выражения для обобщенных импульсов

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial\dot\zeta_1} = \frac{m_1R^2}{5}\left[\left(1+\frac{1}{\zeta_1^4\zeta_2^2}\right)\dot\zeta_1 + \frac{\dot\zeta_2}{\zeta_1^3\zeta_2^3}\right], \quad p_2 = \frac{\partial T}{\dot\zeta_2} = \frac{m_1R^2}{5}\left[\frac{\dot\zeta_1}{\zeta_1^3\zeta_2^3} + \left(1+\frac{1}{\zeta_1^2\zeta_2^4}\right)\dot\zeta_2\right],$$

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial\dot\alpha} = \frac{m_1R^2}{5}\left[\dot\alpha(\zeta_1^2+\zeta_2^2) + 2(\dot\varphi+\dot\psi)\zeta_1\zeta_2\right],$$

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = \frac{m_1R^2}{5}\left[(\dot\varphi+\dot\psi)(\zeta_1^2+\zeta_2^2) + 2\dot\alpha\zeta_1\zeta_2 + \frac{5}{m}\dot\varphi r_1^2\right],$$

$$p_\psi = \frac{\partial T}{\partial\dot\psi} = \frac{m_1R^2}{5}\left[(\dot\varphi+\dot\psi)(\zeta_1^2+\zeta_2^2) + 2\dot\alpha\zeta_1\zeta_2\right], \quad p_{r_1} = \frac{\partial T}{\partial\dot r_1} = \frac{m_1R^2}{m}\,\dot r_1.$$

Выразим обобщенные скорости через обобщенные импульсы и координаты

$$\dot\zeta_1 = \frac{5}{m_1R^2}\,\frac{(\zeta_1^4\zeta_2^4+\zeta_1^2)p_1 - \zeta_1\zeta_2p_2}{\zeta_1^4\zeta_2^4+\zeta_1^2+\zeta_2^2}, \quad \dot\zeta_2 = \frac{5}{m_1R^2}\,\frac{(\zeta_1^4\zeta_2^4+\zeta_2^2)p_2 - \zeta_1\zeta_2p_1}{\zeta_1^4\zeta_2^4+\zeta_1^2+\zeta_2^2},$$

$$\dot\alpha = \frac{5}{m_1R^2}\,\frac{(\zeta_1^2+\zeta_2^2)p_\alpha - 2\zeta_1\zeta_2p_\psi}{(\zeta_1^2-\zeta_2^2)^2}, \quad \dot\varphi = \frac{m}{m_1R^2r_1^2}\,(p_\varphi - p_\psi), \tag{4.1}$$

$$\dot\varphi+\dot\psi = \frac{5}{m_1R^2}\,\frac{(\zeta_1^2+\zeta_2^2)p_\psi - 2\zeta_1\zeta_2p_\alpha}{(\zeta_1^2-\zeta_2^2)^2}, \quad \dot r_1 = \frac{m}{m_1R^2}\,p_{r_1}.$$

Подставляя (4.1) в выражение для кинетической энергии (2.10), запишем функцию Гамильтона $H = T + \Pi$ в виде

$$H = \frac{5}{2m_1R^2}\left[\frac{(\zeta_1^4\zeta_2^4+\zeta_1^2)p_1^2 + (\zeta_1^4\zeta_2^4+\zeta_2^2)p_2^2 - 2\zeta_1\zeta_2p_1p_2}{\zeta_1^4\zeta_2^4+\zeta_1^2+\zeta_2^2} + \right. \tag{4.2}$$

$$\left. + \frac{(\zeta_1^2+\zeta_2^2)(p_\alpha^2+p_\psi^2) - 4\zeta_1\zeta_2p_\alpha p_\psi}{(\zeta_1^2-\zeta_2^2)^2}\right] + \frac{m}{2m_1R^2}\left[{p_{r_1}}^2 + \frac{(p_\varphi-p_\psi)^2}{{r_1}^2}\right] + \Pi(\zeta_1,\zeta_2,\psi,r_1).$$

Уравнения Гамильтона

$$\dot\zeta_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial\zeta_i}, \quad i=1,2, \quad \dot\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot p_i = -\frac{\partial H}{\partial\alpha} \quad (\alpha\,\varphi\,\psi\,r_1)$$

в развернутом виде выглядят так

$$\dot\zeta_1 = \frac{5}{m_1R^2}\,\frac{(\zeta_1^4\zeta_2^4+\zeta_1^2)p_1 - \zeta_1\zeta_2p_2}{\zeta_1^4\zeta_2^4+\zeta_1^2+\zeta_2^2}, \quad \dot\zeta_2 = \frac{5}{m_1R^2}\,\frac{(\zeta_1^4\zeta_2^4+\zeta_2^2)p_2 - \zeta_1\zeta_2p_1}{\zeta_1^4\zeta_2^4+\zeta_1^2+\zeta_2^2},$$

$$\dot{\alpha} = \frac{5}{m_1R^2}\,\frac{(\zeta_1^2+\zeta_2^2)p_\alpha - 2\zeta_1\zeta_2 p_\psi}{(\zeta_1^2-\zeta_2^2)^2}\,, \quad \dot{\psi} = \frac{5}{m_1R^2}\,\frac{(\zeta_1^2+\zeta_2^2)p_\psi - 2\zeta_1\zeta_2 p_\alpha}{(\zeta_1^2-\zeta_2^2)^2} -$$

$$-\frac{m}{m_1R^2}\,\frac{p_\varphi - p_\psi}{r_1^2}\,, \quad \dot{\varphi} = \frac{m}{m_1R^2}\,\frac{(p_\varphi - p_\psi)}{r_1^2}\,, \quad \dot{r}_1 = \frac{m}{m_1R^2}\,p_{r_1}\,, \tag{4.3}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{5}{m_1R^2}\Bigg[\frac{\zeta_1\zeta_2^2(2\zeta_1^2\zeta_2^4+1)p_1^2 + \zeta_1\zeta_2^2(\zeta_1^4\zeta_2^2-1)p_2^2 + \zeta_2(3\zeta_1^4\zeta_2^4+\zeta_1^2-\zeta_2^2)p_1p_2}{(\zeta_1^4\zeta_2^4+{\zeta_1}^2+{\zeta_2}^2)^2} -$$

$$-\frac{\zeta_1(\zeta_1^2+3\zeta_2^2)(p_\alpha^2+p_\psi^2) - 2\zeta_2(3\zeta_1^2+\zeta_2^2)p_\alpha p_\psi}{(\zeta_1^2-\zeta_2^2)^3}\Bigg] - \frac{\partial\Pi}{\partial\zeta_1}\,,$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{5}{m_1R^2}\Bigg[\frac{\zeta_1^2\zeta_2(\zeta_1^2\zeta_2^4-1)p_1^2 + \zeta_1^2\zeta_2(2\zeta_1^4\zeta_2^2+1)p_2^2 + \zeta_1(3\zeta_1^4\zeta_2^4-\zeta_1^2+\zeta_2^2)p_1p_2}{(\zeta_1^4\zeta_2^4+{\zeta_1}^2+{\zeta_2}^2)^2} +$$

$$+\frac{\zeta_2(3\zeta_1^2+\zeta_2^2)(p_\alpha^2+p_\psi^2) - 2\zeta_1(\zeta_1^2+3\zeta_2^2)p_\alpha p_\psi}{(\zeta_1^2-\zeta_2^2)^3}\Bigg] - \frac{\partial\Pi}{\partial\zeta_2}\,,$$

$$\dot{p}_\alpha = 0, \quad \dot{p}_\psi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\psi}\,, \quad \dot{p}_\varphi = 0, \quad \dot{p}_{r_1} = \frac{m}{m_1R^2}\,\frac{(p_\varphi-p_\psi)^2}{r_1^3} - \frac{\partial\Pi}{\partial r_1}\,,$$

где

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\zeta_1} = \frac{3\gamma m_1^2}{10R}\left(\zeta_1 - \frac{1}{\zeta_1^3\zeta_2^2}\right)\int\limits_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(\zeta_1^2+\lambda)F(\zeta_1,\zeta_2,\lambda)} -$$

$$-\frac{\gamma m_1m_2}{5R}\,\frac{m^3}{r_1^3}\left(2\zeta_1\sin^2\psi - \zeta_1\cos^2\psi + \frac{1}{\zeta_1^3\zeta_2^2}\right),$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\zeta_2} = \frac{3\gamma m_1^2}{10R}\left(\zeta_2 - \frac{1}{\zeta_1^2\zeta_2^3}\right)\int\limits_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(\zeta_2^2+\lambda)F(\zeta_1,\zeta_2,\lambda)} -$$

$$-\frac{\gamma m_1m_2}{5R}\,\frac{m^3}{r_1^3}\left(-\zeta_2\sin^2\psi + 2\zeta_2\cos^2\psi + \frac{1}{\zeta_1^2\zeta_2^3}\right),$$

$$F(\zeta_1,\zeta_2,\lambda) = \left(\frac{1}{\zeta_1^2\zeta_2^2}+\lambda\right)\sqrt{(\zeta_1^2+\lambda)(\zeta_2^2+\lambda)\left(\frac{1}{\zeta_1^2\zeta_2^2}+\lambda\right)}\,,$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\psi} = -\frac{3\gamma m_1m_2}{5R}\,\frac{m^3}{r_1^2}\,(\zeta_1^2-\zeta_2^2)\sin\psi\cos\psi\,,$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial r_1} = \frac{\gamma m_1m_2m}{R}\left\{\frac{1}{r_1^2} + \frac{3m^2}{10r_1^4}\left[(2\zeta_1^2-\zeta_2^2)\sin^2\psi + (2\zeta_2^2-\zeta_1^2)\cos^2\psi - \frac{1}{\zeta_1^2\zeta_2^2}\right]\right\}.$$

**5. Уравнения движения в безразмерных переменных.** Введем характерный размер времени $T$ и безразмерное время $\tau = T^{-1}t$. Безразмерные обобщенные импульсы запишем в виде

$$\hat{p}_1 = \frac{T}{m_1R^2}\,p_1,\ \ldots,\ \hat{p}_{r_1} = \frac{T}{m_1R^2}\,p_{r_1}\,.$$

Тогда, отбрасывая для упрощения записи шляпки над безразмерными обобщенными импульсами, запишем уравнения движения в безразмерной форме

$$\frac{d\zeta_1}{d\tau} = 5\,\frac{(\zeta_1^4\zeta_2^4+\zeta_1^2)p_1-\zeta_1\zeta_2 p_2}{\zeta_1^4\zeta_2^4+\zeta_1^2+\zeta_2^2}\,, \quad \frac{d\zeta_2}{d\tau} = 5\,\frac{(\zeta_1^4\zeta_2^4+\zeta_2^2)p_2-\zeta_1\zeta_2 p_1}{\zeta_1^4\zeta_2^4+\zeta_1^2+\zeta_2^2}\,,$$

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = 5\,\frac{(\zeta_1^2+\zeta_2^2)p_\alpha-2\zeta_1\zeta_2 p_\psi}{(\zeta_1^2-\zeta_2^2)^2}\,, \quad \frac{d\psi}{d\tau} = 5\,\frac{(\zeta_1^2+\zeta_2^2)p_\psi-2\zeta_1\zeta_2 p_\alpha}{(\zeta_1^2-\zeta_2^2)^2} - m\,\frac{p_\varphi-p_\psi}{r_1^2}\,,$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{m}{r_1^2}\,(p_\varphi-p_\psi)\,, \quad \frac{dr_1}{d\tau} = m\,p_{r_1}\,, \tag{5.1}$$

$$\frac{dp_1}{d\tau} = -5\Bigg[\frac{\zeta_1\zeta_2^2(2\zeta_1^2\zeta_2^4+1)p_1^2+\zeta_1\zeta_2^2(\zeta_1^4\zeta_2^2-1)p_2^2+\zeta_2(3\zeta_1^4\zeta_2^4+\zeta_1^2-\zeta_2^2)p_1p_2}{(\zeta_1^4\zeta_2^4+{\zeta_1}^2+{\zeta_2}^2)^2} -$$

$$-\frac{\zeta_1(\zeta_1^2+3\zeta_2^2)(p_\alpha^2+p_\psi^2)-2\zeta_2(3\zeta_1^2+\zeta_2^2)p_\alpha p_\psi}{(\zeta_1^2-\zeta_2^2)^3}\Bigg] -$$

$$-\frac{3}{10}K_1\left(\zeta_1-\frac{1}{\zeta_1^3\zeta_2^2}\right)\int\limits_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(\zeta_1^2+\lambda)F(\zeta_1,\zeta_2,\lambda)} + \frac{K_2m^3}{5r_1^3}\left(2\zeta_1\sin^2\psi-\zeta_1\cos^2\psi+\frac{1}{\zeta_1^3\zeta_2^2}\right),$$

$$\frac{dp_2}{d\tau} = -5\Bigg[\frac{\zeta_1^2\zeta_2(\zeta_1^2\zeta_2^4-1)p_1^2+\zeta_1^2\zeta_2(2\zeta_1^4\zeta_2^2+1)p_2^2+\zeta_1(3\zeta_1^4\zeta_2^4-\zeta_1^2+\zeta_2^2)p_1p_2}{(\zeta_1^4\zeta_2^4+{\zeta_1}^2+{\zeta_2}^2)^2} +$$

$$+\frac{\zeta_2(3\zeta_1^2+\zeta_2^2)(p_\alpha^2+p_\psi^2)-2\zeta_1(\zeta_1^2+3\zeta_2^2)p_\alpha p_\psi}{(\zeta_1^2-\zeta_2^2)^3}\Bigg] -$$

$$-\frac{3}{10}K_1\left(\zeta_2-\frac{1}{\zeta_1^2\zeta_2^3}\right)\int\limits_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(\zeta_2^2+\lambda)F(\zeta_1,\zeta_2,\lambda)} + \frac{K_2m^3}{5r_1^3}\left(-\zeta_2\sin^2\psi+2\zeta_2\cos^2\psi+\frac{1}{\zeta_1^2\zeta_2^3}\right),$$

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = 0, \quad \frac{dp_\psi}{d\tau} = \frac{3K_2m^3}{5r_1^2}\,(\zeta_1^2-\zeta_2^2)\sin\psi\cos\psi\,, \quad \frac{dp_\varphi}{d\tau} = 0,$$

$$\frac{dp_{r_1}}{d\tau} = m\,\frac{(p_\varphi-p_\psi)^2}{r_1^3} - K_2m\left\{\frac{1}{r_1^2}+\frac{3m^2}{10r_1^4}\left[(2\zeta_1^2-\zeta_2^2)\sin^2\psi+(2\zeta_2^2-\zeta_1^2)\cos^2\psi-\frac{1}{\zeta_1^2\zeta_2^2}\right]\right\},$$

где

$$F(\zeta_1,\zeta_2,\lambda) = \left(\frac{1}{\zeta_1^2\zeta_2^2}+\lambda\right)\sqrt{(\zeta_1^2+\lambda)(\zeta_2^2+\lambda)\left(\frac{1}{\zeta_1^2\zeta_2^2}+\lambda\right)}, \quad K_i = \frac{\gamma m_i T^2}{R^3}, \quad i=1,2.$$

**6. Приведение эллиптических интегралов к виду, удобному для вычислений на компьютере.** Эллиптические интегралы, входящие в уравнения (5.1), в развернутом виде записываются так:

$$\alpha_i = \int\limits_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(\zeta_i^2+\lambda)(\zeta_3^2+\lambda)\sqrt{(\zeta_1^2+\lambda)(\zeta_2^2+\lambda)(\zeta_3^2+\lambda)}}\,, \quad i=1,2,$$

где $\zeta_3^2 = 1/(\zeta_1^2\zeta_2^2)$. Заменой переменной $t^2 = \zeta_3^2 + \lambda, \quad \lambda = t^2 - \zeta_3^2, \quad d\lambda = 2tdt$ приводим интегралы к виду

$$\alpha_i = \frac{2\zeta_i^2}{\zeta_i^2 - \zeta_3^2}\int\limits_{\zeta_3}^{\infty} \frac{dt}{(\zeta_i^2 - \zeta_3^2 + t^2)\sqrt{(\zeta_1^2 - \zeta_3^2 + t^2)(\zeta_2^2 - \zeta_3^2 + t^2)}} -$$

$$- \frac{2\zeta_3^2}{\zeta_i^2 - \zeta_3^2}\int\limits_{\zeta_3}^{\infty} \frac{dt}{t^2\sqrt{(\zeta_1^2 - \zeta_3^2 + t^2)(\zeta_2^2 - \zeta_3^2 + t^2)}}\,, \quad i = 1, 2.$$

Вводя параметры

$$h_i^2 = \frac{1}{\zeta_i^2 - \zeta_3^2}, \quad i = 1, 2, \tag{6.1}$$

представим $\alpha_i, \quad i = 1, 2$ в виде $\alpha_i = 2\zeta_i^2 h_i^3 h_1 h_2 \beta_i - 2\zeta_3^2 h_i^2 h_1 \beta_3, \quad i = 1, 2$, где

$$\begin{gathered}\beta_i = \int\limits_{\zeta_3}^{\infty} \frac{h_i dt}{(1 + h_i^2 t^2)\sqrt{(1 + h_1^2 t^2)(1 + h_2^2 t^2)}}\,, \quad i = 1, 2, \\ \beta_3 = \int\limits_{\zeta_3}^{\infty} \frac{h_1 dt}{h_1^2 t^2\sqrt{(1 + h_1^2 t^2)(1 + h_2^2 t^2)}}\,.\end{gathered} \tag{6.2}$$

В интегралах (6.2) введем новую переменную $z$ по формулам

$$h_1 t = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}\,, \quad h_2 t = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}\,. \tag{6.3}$$

Первую формулу (6.3) будем использовать для $\beta_1$ и $\beta_3$, а вторую для $\beta_2$. В результате интегралы (6.2) примут вид $\beta_1 = I_0 - I_1, \quad \beta_2 = I_0^* - I_1^*, \quad \beta_3 = I_{-1} - I_0$, где

$$I_i = \int\limits_{\zeta_3/\zeta_1}^{1} \frac{z^{2i} dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k_1^2 z^2)}}\,, \quad i = -1,\ 0,\ 1,$$

$$I_i^* = \int\limits_{\zeta_3/\zeta_2}^{1} \frac{z^{2i} dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k_2^2 z^2)}}\,, \quad i = 0,\ 1,$$

$$k_1^2 = \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1^2}\,, \quad k_2^2 = \frac{h_2^2 - h_1^2}{h_2^2}\,.$$

Используя (6.1), выразим $k_1^2$ и $k_2^2$ через $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ :

$$k_1^2 = \frac{\zeta_2^2 - \zeta_1^2}{\zeta_2^2 - \zeta_3^2}\,, \quad k_2^2 = \frac{\zeta_1^2 - \zeta_2^2}{\zeta_1^2 - \zeta_3^2}\,.$$

1. *Борисов А.В., Мамаев И.С., Килин А.А.* Гамильтонова динамика жидких и газовых самогравитирующих эллипсоидов // Динамика жидких и газовых эллипсоидов. – М.-Ижевск.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, 2010. – С. 304-363.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. – М.-Л.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
3. *Петкевич Е.В.* Задача двух жидких тел // Письма в Астрономический журнал. – 1977. – **3**. – № 9. – С. 424-428.
4. *Петкевич Е.В.* Уравнения внешней задачи двух тел // Там же. – 1977. – **3**. – № 11. – С. 522-525.
5. *Смарт У.М.* Небесная механика.– М.: Мир, 1965. – 504 с.
6. *Субботин М.Ф.* Курс небесной механики.– Т. 3.– М.: Гостехиздат, 1949. – 280 с.
7. *Судаков С.Н.* Канонические уравнения движения твердого тела с вихревым заполнением // Механика твердого тела. – 1979. – Вып. 11. – С. 67-71.
8. *Чандрасекхар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. – М.: Мир, 1973. – 288 с.

**S. N. Sudakov**

**The Hamilton equations of the plane motion of the liquid ellipsoid and the spherically symmetric rigid body.**

The problem of motion of the ellipsoidal mass of liquid and spherically symmetric rigid body was investigated at this paper. The center of mass of liquid and center of mass of the rigid body perform the plane motion. The motion of liquid is homogeneous rotational. The direction of vector of vortex is orthogonal to the plane of motion of the center mass of liquid and center mass of the rigid body. The equations of motion was derived in the form of Hamilton.

***Keywords:*** *ellipsoid, liquid, vortex, rotation, gravitation, the problem of Roshe .*

**С. М. Судаков**

**Рівняння Гамільну плоского руху рідинного еліпсоїду і сферично симетричного твердого тіла.**

Розглянуто задачу про рух гравитуючої еліпсоїдальної маси ідеальної нестислої рідини і сферично сіметричного твердого тіла. Вважається, що центри мас рідинного еліпсоїда і твердого тіла здійснюють рух у однієї площині. Рух рідини вважається однорідним вихровим. Вектор вихру швидкості рідини направлено ортогонально площині руху центрів мас рідини та твердого тіла. Отримано рівняня руху у гамільтоновій формі.

***Ключові слова:*** *еліпсоїд, рідина, вихор, гравітація, проблема Роша.*

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк*
*sudakov@iamm.ac.donetsk.ua*

*Получено 19.05.13*