ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2013. Том 26

УДК 517.51+519.21

©2013. **М. В. Працьовитий, Н. А. Василенко**

РОЗПОДІЛИ ЙМОВІРНОСТЕЙ НА ГРАФІКАХ ОДНОГО КЛАСУ НІДЕ НЕ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Будується нескінченно-параметрична сім'я неперервних ніде не монотонних і, в загалі кажучи, недиференційовних функцій, які є узагальненням класичної ніде не диференційовної функції Серпінського. Вивчається лебегівська структура (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент) та тополого-метричні властивості розподілу значень функції з побудованої сім'ї, а також двовимірних випадкових величин з носіями на їх графіках.

Ключові слова: *неперервна ніде не диференційовна функція, ніде не монотонна функція, множина рівнів функції, Q^*-представлення (зображення) дійсних чисел, лебегівська структура розподілу, дискретність розподілу, сингулярність розподілу.*

Вступ. Неперервні ніде не диференційовні функції в останній час все частіше зустрічаються у різних теоретичних та прикладних дослідженнях, різноманітних застосуваннях як в математиці, так і за її межами. Їх графіки природним чином виникають в теорії динамічних систем в якості аттракторів, а в теорії ймовірнісних мір – в якості носіїв міри. Взагалі кажучи, графіки, володіючи фрактальними властивостями вцілому, цікаві для теорії фракталів як однозв'язні самоафінні або "квазісамоафінні" множини простору R_2. Іншим аспектом їх нетривіальних локальних метричних властивостей є нуль-мірність або додатність міри Лебега множин рівнів. Розподіли ймовірностей, зосереджені на графіках недиференційовних функцій, мають ряд своїх непростих тополого-метричних властивостей, для дослідження яких можуть бути використані засоби теорії міри і розмірностей дробових порядків (типу Хаусдорфа та Хаусдорфа-Безиковича тощо). У даній роботі ми, використовуючи Q^*-зображення дійсних чисел [3], будуємо нескінченнопараметричну сім'ю функцій, що є узагальненням відомої недиференційовної функції Серпінського [1], [9] і моделюємо випадкові елементи простору R_2 з носіями на графіках цих функцій. Для останніх ми вивчаємо лебегівську структуру (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярної компонент) відносно двовимірної міри Лебега, а також тополого-метричні і фрактальні властивості спектра розподілу (мінімального замкненого носія).

1. Q^*-зображення (представлення) дійсних чисел. Нехай $1 < s$ – фіксоване натуральне число, $A_s = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ – алфавіт s-кової системи числення, $Q^* = ||q_{ij}||$ – матриця з властивостями

$$q_{ij} > 0, \;\; q_{0j} + q_{1j} + \ldots + q_{[s-1]j} = 1, \;\; \prod_{j=1}^{\infty} \max\{q_{0j}, \ldots, q_{[s-1]j}\} = 0,$$

$$\beta_{0j} = 0, \;\; \beta_{ij} = \sum_{k=0}^{i-1} q_{kj}, \; i \in A_s \setminus \{0\}, \; j \in \mathbb{N}.$$

Теорема 1. *[3] Для довільного $x \in [0,1]$ існує послідовність (α_k) така, що:*

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty}(\beta_{\alpha_k k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j}) \equiv \Delta^{Q^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \ \ \alpha_k \in A_s. \tag{1}$$

Подання числа x у вигляді (1) називають його Q^**-представленням*, а його символічний запис $\Delta^{Q^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ називають Q^**-зображенням.* При цьому α_j називається j-им Q^**-символом (знаком)* зображення (1) даного числа x. Якщо Q^*-зображення є періодичним, то його період записуватимемо у круглих дужках.

Взагалі кажучи, поняття j-го Q^*-символом числа x не є коректно означеним, оскільки деякі числа мають два Q^*-зображення. Це числа виду

$$\Delta^{Q^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(0)} = \Delta^{Q^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](s-1)}.$$

Їх називають Q^**-раціональними.* Всі інші числа, що не містять період (0) або $(s-1)$, мають єдине Q^*-зображення і їх називають Q^**-ірраціональними.* Для подальших міркувань важливим є поняття циліндра. Нагадаємо його означення.

Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ – фіксований набір символів з алфавіту A_s. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$* називають множину чисел $x \in [0,1]$, які мають Q^*-зображення $\Delta^{Q^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots}$ таке, що $\alpha_j(x) = c_j$, $j = \overline{1,m}$.

Лема 1.[3] *Циліндр $\Delta^{Q^*}_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком з кінцями*

$$a = \beta_{c_1 1} + \sum_{k=2}^{m}(\beta_{c_k k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{c_j j}), \ \ b = a + \prod_{i=1}^{m} q_{c_i i}.$$

Лема 2.[3] *Циліндри мають наступні властивості: 1) $\Delta^{Q^*}_{c_1\ldots c_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{s-1} \Delta^{Q^*}_{c_1\ldots c_m i}$;*
2) $|\Delta^{Q^*}_{c_1\ldots c_m}| = \prod\limits_{i=1}^{m} q_{c_i i}$; 3) $\max \Delta^{Q^*}_{c_1c_2\ldots c_m i} = \min \Delta^{Q^*}_{c_1c_2\ldots c_m[i+1]}$, $i = \overline{0, s-2}$;
4) $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^{Q^*}_{c_1\ldots c_m} = x \equiv \Delta^{Q^*}_{c_1\ldots c_m\ldots}$ – точка (число).

Якщо для всіх $i \in A_s$ і $j \in \mathbb{N}$ виконується $q_{ij} = q_i$, тобто всі стовпці матриці $||q_{ij}||$ однакові, то Q^*-зображення називається Q*-зображенням*, якщо ж при цьому $q_i = \frac{1}{s}$, то Q-зображення є звичайним *s-ковим* зображенням.

Q^*-зображення дійсних чисел допомагає формально просто задавати широкі класи множин, функцій, ймовірнісних мір зі складними локальними властивостями. Воно є зручним апаратом для задання та дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями.

2. Функція $y = f(x)$ та її неперервність. Нехай $A_5 = \{0,1,2,3,4\}$, Q^*_5 і Q^*_3 – задані два Q^*-зображення, причому матрицю, яка визначає останнє зображення позначимо через $G^*_3 = ||g_{ij}||$.

Визначимо на A_5 дискретну функцію

$$\gamma(\alpha) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \alpha = 0, \\ 1, \text{ якщо } \alpha \in A_5 \setminus \{0, 4\}, \\ 2, \text{ якщо } \alpha = 4. \end{cases} \tag{2}$$

Для кожної послідовності $(\alpha_k) \in L \equiv A_5^\infty = A_5 \times A_5 \times \ldots$ визначимо послідовність (c_k) наступним чином

$$c_1 = 0, c_k = \begin{cases} c_{k-1}, \text{ якщо } \alpha_{k-1} \in A_5 \setminus \{2\}, \\ 1 - c_{k-1}, \text{ якщо } \alpha_{k-1} = 2. \end{cases} \tag{3}$$

Розглянемо на $[0,1]$ функцію, аргумент якої подається у формі Q_5^*-розкладу

$$x = \varphi_{\alpha_1 1} + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\varphi_{\alpha_i i} \cdot \prod_{j=1}^{i-1} q_{\alpha_j j} \right) \equiv \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}, \tag{4}$$

де $\alpha_k \in A_5$, $Q_5^* = ||q_{ij}||$, $\varphi_{0j} = 0$, $\varphi_{ij} = \sum\limits_{k=0}^{i-1} q_{kj}$, $i \in A_5$, $j \in \mathbb{N}$, а значення функції має форму G_3^*-розкладу

$$f(x) = \psi_{\beta_1 1} + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\psi_{\beta_i i} \cdot \prod_{j=1}^{i-1} g_{\beta_j j} \right) \equiv \Delta^{G_3^*}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k \ldots}, \tag{5}$$

де $\beta_k \in A_3 \equiv \{0, 1, 2\}$, $G_3^* = ||g_{ik}||$, $\psi_{0j} = 0$, $\psi_{ij} = \sum\limits_{k=0}^{i-1} g_{kj}$, $i \in A_3$, $j \in \mathbb{N}$, причому

$$\beta_1 = \gamma(\alpha_1), \ \beta_k = \begin{cases} \gamma(\alpha_k), \text{ якщо } c_k = 0, \\ 2 - \gamma(\alpha_k), \text{ якщо } c_k \neq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Формулам (6), можна надати інший (еквівалентний) вигляд

$$\beta_k = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \left[\begin{array}{l} \alpha_k = 0 \text{ і } c_k = 0, \\ \alpha_k = 4 \text{ і } c_k = 1, \end{array} \right. \\ 1, \text{ якщо } \alpha_k \in \{1, 2, 3\}, \\ 2, \text{ якщо } \left[\begin{array}{l} \alpha_k = 0 \text{ і } c_k = 1, \\ \alpha_k = 4 \text{ і } c_k = 0. \end{array} \right. \end{cases} \tag{7}$$

Зауваження 1. Легко бачити, що β_k, взагалі кажучи, залежить від цифр $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_k)$, але може залежити лише від α_k, якщо всі $\alpha_i \in \{1, 2, 3\}$, $i = \overline{1, k-1}$.

Очевидно, що функція f означена коректно в Q_5^*-ірраціональній точці. Покажемо, що вона означена коректно і в Q_5^*-раціональній точці. Для цього розглянемо два різних Q_5^*-зображення Q_5^*-раціонального значення аргумента x

$$x \equiv \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\,\alpha_k\,(0)} = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\,[\alpha_k-1]\,(4)} \equiv x^*.$$

Тоді $f(x) = \Delta^{G_3^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}\beta_k\beta_{k+1}\ldots\beta_{k+n}\ldots}$, $f(x^*) = \Delta^{G_3^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{k-1}\beta^*_k\beta^*_{k+1}\ldots\beta^*_{k+n}\ldots}$. Таким чином,

$$f(x) - f(x^*) = \prod_{i=1}^{k-1} g_{\beta_i i}(\psi_{\beta_k k} - \psi_{\beta^*_k k} + \sum_{n=k+1}^{\infty}(\psi_{\beta_n n}\prod_{j=k}^{n-1} g_{\beta_j j}) - \sum_{n=k+1}^{\infty}(\psi_{\beta^*_n n}\prod_{j=k}^{n-1} g_{\beta^*_j j})).$$

Очевидно, що $c_i(x) \equiv c_i(x^*)$ для $i \le k$. Для $i > k$ розглянемо можливі випадки

1) якщо $c_{k+1}(x) = c_k = c_{k+1}(x^*)$, тоді $\alpha_k(x) \in A_5 \setminus \{2\}$, і при $c_k = 0$, маємо

$$f(x) - f(x^*) = \prod_{i=1}^{k-1} g_{\beta_i i}(\psi_{\beta_k k} - \psi_{\beta^*_k k} - g_{\beta_k k}\sum_{n=k+1}^{\infty}(\psi_{2n}\prod_{j=k+1}^{n-1} g_{2j})) = 0,$$

Аналогічно можна показати, що $f(x) - f(x^*) = 0$ при $c_k = 1$.

2) якщо $c_{k+1}(x) \neq c_k = c_{k+1}(x^*)$, тоді $\alpha_k(x) = 2$ або $\alpha_k(x^*) = 2$. Звідки, використовуючи формулу (7), маємо $\beta_n = \beta^*_n$ для всіх $n = k, k+1, k+2\ldots$. Тому $f(x) - f(x^*) = 0$. Аналогічні міркування можна провести для випадка, коли $c_{k+1}(x) = c_k \neq c_{k+1}(x^*)$.

Отже, коректність означення функції в Q_5^*-раціональній точці обгрунтовано.

Лема 3. *Функція f є неперервною в кожній точці відрізка* $[0, 1]$.

Доведення. Для доведення неперервності функції f в довільній точці x_0 відрізка $[0, 1]$, досить показати, що $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$. Спочатку розглянемо випадок, коли x_0 – Q_5^*-ірраціональна точка. Тоді для довільного $x \in [0, 1]$ існує $m = m(x)$ таке, що $\alpha_j(x) = \alpha_j(x_0)$, $j = \overline{1, m-1}$ і $\alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0)$, причому умова $x \to x_0$ рівносильна умові $m \to \infty$. Тоді,

$$f(x) = \Delta^{G_3^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{m-1}\beta_m\ldots\beta_{m+k}\ldots}, \quad f(x_0) = \Delta^{G_3^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_{m-1}\beta'_m\ldots\beta'_{m+k}\ldots}.$$

Таким чином,

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\sum_{i=m}^{\infty}(\psi_{\beta_i i}\prod_{j=1}^{i-1} g_{\beta_j j}) - \sum_{i=m}^{\infty}(\psi_{\beta'_i i}\prod_{j=1}^{i-1} g_{\beta'_j j})\right| \le \prod_{i=1}^{m-1} g_{\beta_i i}\cdot\sum_{i=m}^{\infty}(\psi_{2i}\prod_{j=m}^{i-1} g_{2j}) =$$

$$= \prod_{i=1}^{m-1} g_{\beta_i i} \le \prod_{i=1}^{m-1}\max\{g_{0i}, g_{1i}, g_{2i}\} \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Отже, функція f є неперервною в кожній Q_5^*-ірраціональній точці.

Для доведення неперервності функції f в Q_5^*-раціональній точці $x_0=\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(0)}=\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_k-1](4)}$, досить довести окремо неперервність її зліва і справа у цій точці. Для цього, достатньо повторити попередні міркування, але для доведення першого використати Q_5^*-зображення точки x_0 з періодом (4), а другого – з періодом (0). □

3. Ніде не монотонність функції f та її диференціальні властивості.

Означення 1. Приростом функції f на циліндрі $\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$, який будемо позначати $\mu_f(\cdot)$, називається різниця $f(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(4)})-f(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m(0)})\equiv\mu_f(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m})$.

Означення 2. Неперервна функція називається *ніде не монотонною*, якщо вона не має жодного, як завгодно малого, проміжку монотонності.

Лема 4. *Функція f є ніде не монотонною на* $[0,1]$.

Доведення. Для доведення ніде не монотонності функції f достатньо показати, що для довільного циліндра $\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$ знайдеться циліндр $\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\,j}$ такий, що прирости $\mu_f(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m})$ і $\mu_f(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\,j})$ набувають різних знаків.

Можливі випадки: 1) $c_m=0$, 2) $c_m=1$.

1) Якщо $c_m=0$, то

$\mu_f(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_m})=\Delta^{G_3^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m(2)}-\Delta^{G_3^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m(0)}=\prod\limits_{i=1}^{m}g_{\beta_i i}$,

$\mu_f(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_m 2})=\Delta^{G_3^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m 1(0)}-\Delta^{G_3^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m 1(2)}=-\prod\limits_{i=1}^{m+1}g_{\beta_i i}$.

2) Якщо $c_m=1$, то

$\mu_f(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_m})=\Delta^{G_3^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m(0)}-\Delta^{G_3^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m(2)}=-\prod\limits_{i=1}^{m}g_{\beta_i i}$,

$\mu_f(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_m 2})=\Delta^{G_3^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m 1(2)}-\Delta^{G_3^*}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_m 1(0)}=\prod\limits_{i=1}^{m+1}g_{\beta_i i}$.□

Множиною рівня y_0 функції f називається множина $f^{-1}(y_0)=\{x: f(x)=y_0\}$.

Лема 5. *Якщо $y_0=\Delta^{G_3^*}_{d_1d_2\ldots d_m(1)}$ ($m\in\mathbb{N}_0$), то для множини рівня y_0 має місце рівність: $f^{-1}(y_0)=C[Q_5^*,V]\equiv\{x:\alpha_i(x)\in V=A_5\setminus\{0,4\},\ i\in\mathbb{N}\}$, отже, вона має властивості [5]: 1) є континуальною; 2) ніде не щільною множиною; 3) міра Лебега якої обчислюється за формулою: $\lambda\left(C[Q^*,V]\right)=\prod\limits_{j=1}^{\infty}(1-W_j)$, де $W_j=q_{0j}+q_{4j}$.*

Доведення. Спочатку доведемо твердження для $m=0$, тобто для $y_0=\Delta^{Q_5^*}_{(1)}$.

Очевидно, що для довільної точки $x\in C[Q_5^*,V]$ має місце рівність $f(x)=y_0$, тобто $f^{-1}(y_0)\supset C[Q_5^*,V]$. Більше того, $\beta_n(y_0)=1$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_n\left(f^{-1}(y_0)\right)\in V$, незалежно від n. Отже, $f^{-1}(y_0)=C[Q_5^*,V]$.

Нехай тепер $m\neq 0$, тобто $y_0=\Delta^{G_3^*}_{d_1d_2\ldots d_m(1)}$. Тоді

$$H=\cup_{i_1=0}^{4}\cup_{i_2=0}^{4}\ldots\cup_{i_m=0}^{4}\left[\Delta^{Q_5^*}_{i_1i_2\ldots i_m}\cap f^{-1}(y_0)\right]. \tag{8}$$

Довільне x, яке належить множині $\Delta^{Q_5^*}_{i_1i_2\ldots i_m}\cap f^{-1}(y_0)$, у випадку, коли вона непорожня, має вигляд $x = \Delta^{Q_5^*}_{i_1 i_2 \ldots i_m \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \ldots}$, $\alpha_{m+j} \in V$ $(j \in \mathbb{N})$.

Множина $\Delta^{Q_5^*}_{i_1 i_2 \ldots i_m} \cap f^{-1}(y_0)$ може бути порожньою або непорожньою, причому непорожньою, якщо існує впорядкований набір $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ такий, що

$$\beta_1 = \beta_1(i_1) = d_1,\ \ \beta_2 = \beta_2(i_1, i_2) = d_2, \ldots, \beta_m = \beta_m(i_1, i_2, \ldots, i_m) = d_m.$$

В цьому випадку множина $\Delta^{Q_5^*}_{d_1 d_2 \ldots d_m} \cap f^{-1}(y_0)$ є в $\prod\limits_{j=1}^{m} q_{i_j j}$ разів зменшеною "копією" множини $f^{-1}\left(\Delta^{Q_5^*}_{(1)}\right)$, оскільки має місце $f^{-1}\left(\Delta^{Q_5^*}_{(1)}\right) \overset{\prod_{j=1}^{m} q_{i_j j}}{\sim} \Delta^{Q_5^*}_{i_1 i_2 \ldots i_m} \cap f^{-1}(y_0)$.

Тоді $f^{-1}(y_0) = C[Q_5^*, V_k]$, де $V_k = \{i_k\}$ $(k = \overline{1, m})$, $V_{m+j} = V$.

Оскільки мінімальні відрізки, які містять множини, що входять до об'єднання (8), попарно не перекриваються, то $f^{-1}(y_0)$ має вказані в лемі властивості.

А, як відомо [5], $C[Q_5^*, V]$ має зазначені в лемі властивості. $\square$

Лема 6. *Якщо в G_3^*-зображенні точки $y_0 = \Delta^{G_3^*}_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots}$*

1) всі цифри $i_k \in A_3 \setminus \{1\}$ $(k = \overline{1, \infty})$, то множина $f^{-1}(y_0)$ містить єдину точку;

2) міститься рівно n цифр "1", то множина $f^{-1}(y_0)$ складається з 3^n точок.

3) міститься нескінченна кількість цифр "1", тобто для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\beta_{i_n}(y_0) = 1 \ \ i \ \beta_j(y_0) \neq 1 \ \ \text{при}\, j \notin \{i_n\}, \tag{9}$$

то множина $f^{-1}(y_0)$ є континуальною, причому в ній не існує пари точок x_1 і x_2 таких, що

$$\alpha_{i_n}(x_1) = \alpha'_{i_n}(x_2) \ \ i \ \alpha_j(x_1) \neq \alpha'_j(x_2) \ \ \text{при}\, j \notin \{i_n\}. \tag{10}$$

Доведення. Для доведення першого твердження скористаємося методом від супротивного. Припустимо, що множина $f^{-1}(y_0)$ містить принаймні дві різні точки $x = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots} \neq \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1^* \alpha_2^* \ldots \alpha_k^* \ldots} = x^*$. Тоді, існує таке m, що $\alpha_m \neq \alpha_m^*$, але $\alpha_i = \alpha_i^*$ (для $i < m$).

З того, що $\alpha_i = \alpha_i^*$ (для $i < m$) випливає, що $\beta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}) = \beta(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_{m-1}^*)$. Оскільки $\beta_m(f(x)) = i_m(y_0) = \beta_m(f(x^*))$ і при цьому $\alpha_m(x) \neq \alpha_m^*(x^*)$, то з (7) випливає $N_2(x, m-1) \neq N_2(x^*, m-1)$ або $i_m(y_0) = 1$.

З умови $N_2(x, m-1) \neq N_2(x^*, m-1)$ слідує, що $\exists \alpha_j$ $(j < m)$: $\alpha_j \neq \alpha_j^*$, а це суперечить припущенню. А умова $i_m(y_0) = 1$ суперечить умові леми. Отримали протиріччя, що і доводить твердження.

Твердження 2) є очевидним, оскільки з формул (7) випливає, що на кожному з місць, де $\beta_j(y_0) = 1$ можливі 3 альтернативи, а всі решта цифр залишаються фіксованими.

Для доведення твердження 3 припустимо, що для точки $y_0 = \Delta^{G_3^*}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k \ldots}$ мають місце формули (9)-(10) і при цьому $f^{-1}(y_0) = \{x_1, x_2\}$, де $x_1 = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}$, $x_2 =$

$\Delta^{Q_5^*}_{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_k\ldots}$, для яких $f(x_1) = y_0$ і $f(x_2) = y_0$. Тоді $\exists k \in \mathbb{N} : \alpha_i(x_1) = \alpha'_i(x_2)$ для $i = \overline{1, k-1}$, а для $i = k$ виконується $\alpha_k(x_1) \neq \alpha'_k(x_2)$. Тоді з формул (7) і (9) випливає, що $\alpha_k, \alpha'_k \in \{0, 4\}$, а отже $\beta_k\left(f(x)\right) \neq \beta_k\left(f(x')\right)$, тобто $f(x_1) - f(x_2) \neq 0$. А це суперечить умові леми. Отримали протиріччя, що і доводить твердження. $\square$

Теорема 2. *Функція f, за умов коли для елементів стохастичних матриць $||q_{ji}||$ і $||g_{ki}||$ попарно виконується: а) $g_{0i} \geq q_{0i}$, $g_{0i} \geq q_{4i}$ і б) $g_{2i} \geq q_{4i}$, $g_{2i} \geq q_{0i}$ $(i = k+1, k+2\ldots)$, не має ні скінченної ні нескінченної похідної в жодній Q_5^*-раціональній точці.*

Доведення. Нехай $x_0 = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k(0)} = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1](4)} = x'_0$ – довільна Q_5^*-раціональна точка. Розглянемо дві послідовності

$$x_m = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\alpha_k\underbrace{0\ldots0}_{m}(4)},\ \ x'_m = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}[\alpha_k-1]\underbrace{4\ldots4}_{m}(0)},$$

тобто $x_m \to x_0 + 0$, $x'_m \to x'_0 - 0$. Тоді

$$x_m - x_0 = (\prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i i}) \cdot q_{\alpha_k k} \cdot (\prod_{i=k+1}^{k+m} q_{0i}),\ \ x'_m - x'_0 = -(\prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i i}) \cdot q_{[\alpha_k-1]k} \cdot (\prod_{i=k+1}^{k+m} q_{4i}).$$

Якщо похідна функції f в точці x_0 існує, то

$$f'(x_0) = \lim_{x_m \to x_0+0} \frac{f(x_m) - f(x_0)}{x_m - x_0} = \lim_{x'_m \to x'_0-0} \frac{f(x'_m) - f(x'_0)}{x'_m - x'_0},\ \text{ де}$$

$$f(x_m) - f(x_0) = \mu_f(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\underbrace{0\ldots0}_{m}}),\ \ f(x'_m) - f(x'_0) = -\mu_f(\Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots[\alpha_k-1]\underbrace{4\ldots4}_{m}}).$$

Тому

$$\lim_{x_m \to x_0+0} \frac{f(x_m) - f(x_0)}{x_m - x_0} = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{g_{\beta_i i}}{q_{\alpha_i i}} \cdot \dfrac{g_{\beta_k k}}{q_{\alpha_k k}} \cdot \prod\limits_{j=k+1}^{k+m} \dfrac{g_{0j}}{q_{0j}} \text{ при } N_2(x_0, k) = 2n, \\ -\prod\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{g_{\beta_i i}}{q_{\alpha_i i}} \cdot \dfrac{g_{\beta_k k}}{q_{\alpha_k k}} \cdot \prod\limits_{j=k+1}^{k+m} \dfrac{g_{2j}}{q_{0j}} \text{ при } N_2(x_0, k) = 2n-1, \end{cases}$$

$$\lim_{x_m \to x_0-0} \frac{f(x'_m) - f(x'_0)}{x'_m - x'_0} = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{g_{\beta_i i}}{q_{\alpha_i i}} \cdot \dfrac{g_{\beta'_k k}}{q_{[\alpha_k-1]k}} \cdot \prod\limits_{j=k+1}^{k+m} \dfrac{g_{2j}}{q_{4j}} \text{ при } N_2(x'_0, k) = 2n, \\ -\prod\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{g_{\beta_i i}}{q_{\alpha_i i}} \cdot \dfrac{g_{\beta'_k k}}{q_{[\alpha_k-1]k}} \cdot \prod\limits_{j=k+1}^{k+m} \dfrac{g_{0j}}{q_{4j}} \text{ при } N_2(x'_0, k) = 2n-1, \end{cases}$$

де $\beta'_k = \beta_k$, якщо $\alpha_k \in \{2, 3\}$, $\beta'_k = |1 - \beta_k|$, якщо $\alpha_k \in A_5 \setminus \{2, 3\}$. Тому за умов коли для всіх номерів $i = k+1, k+2, \ldots$ елементів стохастичних матриць $||g_{ji}||$ і $||q_{ki}||$

попарно виконується а) $g_{0i} \geq q_{0i}$, $g_{0i} \geq q_{4i}$ і б)$g_{2i} \geq q_{4i}$, $g_{2i} \geq q_{0i}$, похідна функції f в точці x_0 не існує. $\square$

Теорема 3. *Якщо Q_5^*-зображення є Q_5-зображенням, а G_3^*-зображення є G_3-зображенням, то функція f, за умов коли $\max\limits_i\{q_i\} \leq \max\limits_j\{g_j\}$, де $i \in A_5$, $j \in A_3$, є ніде не диференційовною.*

Доведення. Недиференційовність функції f в Q_5-раціональній точці x_0 випливає з теореми 2. Нехай тепер x_0 - довільне Q_5-ірраціональне число. Тоді існує нескінченна послідовність (m_k) місць цифр числа x_0, для яких $\alpha_{m_k}(x_0) \neq 2$. Розглянемо послідовність (x_k) таку, що $\alpha_i(x_k) = \alpha_i(x_0)$ при $i < m_k$, а при $i = m_k$,

$\alpha_{m_k}(x_k) = \left|\alpha_{m_k}(x_0) - (-1)^{\left[\frac{\alpha_{m_k}(x_0)}{2}\right]}\right|$, де $\left[\frac{\alpha_{m_k}(x_0)}{2}\right]$ – ціла частина від $\frac{\alpha_{m_k}(x_0)}{2}$.

Очевидно, що $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$. Тоді

$$x_0 - x_k = \prod_{i=1}^{m_k-1} q_{\alpha_i}\left(\varphi_{\alpha_{m_k}(x_0)} - \varphi_{\alpha_{m_k}(x_k)}\right) = \pm\prod_{i=1}^{m_k} q_{\alpha_i},$$

$$f(x_0) - f(x_k) = \prod_{i=1}^{m_k-1} g_{\beta_i}\left(\psi_{\beta_{m_k}(f(x_0))} - \psi_{\beta_{m_k}(f(x_k))}\right) = \pm\prod_{i=1}^{m_k} g_{\beta_i}.$$

А отже, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{f(x_0)-f(x_k)}{x_0-x_k}$, коли $\max\limits_i\{q_i\} \leq \max\limits_j\{g_j\}$ $(i \in A_5,\ j \in A_3)$ або не існує, або дорівнює $\pm\infty$. $\square$

4. Розподіл ймовірностей на графіку функції. Нагадаємо, що *точковим спектром* розподілу випадкового елемента $\xi \in R_n$ називається множина $D_\xi = \{u : \mu_\xi(\{u\}) > 0, u \in R_n\}$, де μ_ξ – ймовірнісна міра, що відповідає розподілу ξ, а *спектром* розподілу ξ називається мінімальний замкнений носій міри μ_ξ, тобто множина $S_\xi = \{u : \mu_\xi(O_\epsilon(u)) > 0 \forall\epsilon > 0\}$, де $O_\epsilon(u)$ – відкрита куля в R_n радіуса ϵ з центром в точці u.

Якщо існує скінченна або зліченна множина E така, що $\mu_\xi(E) = 1$, то розподіл ξ називається *чисто дискретним*, якщо ж $\mu_\xi(\{u\}) = 0$ для довільного $u \in R_n$, то – *неперервним.* Якщо $0 < \mu_\xi(D_\xi) < 1$, то розподіл ξ називається *сумішшю* дискретного і неперервного. Міра μ називається *абсолютно неперервною* відносно міри ν (позначається $\mu << \nu$), якщо $\mu(E) = 0$ для всіх E, для яких $\nu(E) = 0$. Міри ν і μ називаються *взаємно ортогональними* (позначається: $\mu \perp \nu$), якщо існує борелівська множина $A \in R_n$ така, що $\mu(A) = 0$ і $\nu(X \setminus A) = 0$. Міра μ називається *сингулярною* відносно ν, якщо вона ортогональна мірі Лебега.

Розглядається випадкова величина $X = \Delta^{Q_5^*}_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots}$ з незалежними символами η_k свого Q_5^*-зображення, де $P\{\eta_k = i\} = p_{ik}$, $i \in A_5$, $k \in \mathbb{N}$.

Властивості розподілу випадкової величини X вивчались в роботах [5] та ін., де було доведено, що розподіл X має чистий лебегівський тип, а саме: є чисто дискретним, чисто абсолютно неперервним або чисто сингулярно неперервним.

Далі нас цікавитимуть розподіли:

1) двовимірної випадкової величини $Z = (X, Y)$,

2) випадкової величини $Y = f(X)$, де f – функція з попередніх пунктів.

Лема 7. *Двовимірна випадкова величина $Z = (X, Y)$ матиме чисто дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли $d = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_{i}\{p_{ik}\} > 0$, причому у випадку дискретності її точковий спектр D_Z складається з точки $M_0(x_0, f(x_0))$, де $x_0 = \Delta^{Q_5^*}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$, $p_{c_i i} = \max\{p_{0i}, p_{1i}, p_{2i}, p_{3i}, p_{4i}\}$, $i = \overline{1,n}$, і всіх точок x таких, що $x = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n c_{n+1}c_{n+2}\ldots}$, де $p_{\alpha_j j} > 0$, $j \in \mathbb{N}$, а у випадку, коли серед елементів матриці $||p_{ik}||$ нулів немає, спектр S_Z співпадає з графіком Γ_f функції f.*

Доведення. Зрозуміло, що розподіл Z буде чисто дискретним тоді і тільки тоді, коли чисто дискретним буде розподіл X.

Розглядаючи відрізок $[0, 1]$ як модифікований [6], а саме з роздвоєними Q_5^*-раціональними точками, зауважимо, що $P\{X = \Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m[i-1](4)}\} = 0$ або $P\{X = \Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m i(0)}\} = 0$ для довільного $x = \Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m[i-1](4)} = \Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m i(0)}$, $i \in A_5 \setminus \{0\}$.

Якщо розподіл X є дискретним, то існує $x' \in [0, 1]$ таке, що $P\{X = x'\} > 0$ і тоді $d \equiv P\{X = x_0\} \geq P\{X = x'\} > 0$.

Нехай тепер $d > 0$, тобто $P\{X = x_0\} > 0$. Означимо множини рівностями:

$$H_n = \left\{x : \; x = \Delta^{Q_5^*}_{\alpha_1\ldots\alpha_n c_{n+1}c_{n+2}\ldots}, \;\; \text{де}\, p_{\alpha_i i} > 0\right\}, \;\; H = \lim_{n\to\infty} H_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} H_n.$$

Тоді $\{x_0\} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n \ldots$ і

$$P\{X \in H_n\} = \sum_{\alpha_1=0}^{4} \ldots \sum_{\alpha_n=0}^{4} \left(\prod_{j=1}^{n} p_{\alpha_j j}\right)\left(\prod_{j=n+1}^{\infty} p_{c_j j}\right) =$$

$$= \prod_{j=n+1}^{\infty} p_{c_j j} \sum_{\alpha_1=0}^{4} \ldots \sum_{\alpha_n=0}^{4} \left(\prod_{j=1}^{n} p_{\alpha_j j}\right) = \prod_{j=n+1}^{\infty} p_{c_j j} = \frac{d}{\prod\limits_{j=1}^{n} p_{c_j j}}.$$

Оскільки ж $P\{X \in H_n\} = d \cdot \left(\prod\limits_{j=1}^{n} p_{c_j j}\right)^{-1} \to 1 \;\; (n \to \infty)$, то $P\{X \in H\} = 1$. Отже, $D_X = H$ і розподіл X, а отже, і Z є чисто дискретним. $\Box$

Теорема 4. *1) Двовимірна випадкова величина Z має чистий розподіл, причому Z має дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли розподіл X є дискретним, причому його точковий спектр D_Z співпадає з множиною $\{M(x, f(x)) : x \in D_X\}$;*

2) якщо Z має неперервний розподіл, то йому відповідна ймовірнісна міра є ортогональною двовимірній мірі Лебега, тобто існує множина E така, що $\lambda_2(E) = 0$ і $\mu_Z(E) = 1$;

3) спектр розподілу випадкової величини Z є:

– зв'язною множиною (співпадає з графіком функції f), якщо матриця $||p_{ij}||$ не містить нулів;

– кусково-зв'язною, якщо в матриці $||p_{ij}||$ *елементи* $p_{ik} > 0$ *для* $k > k_0$, $j \in \mathbb{N}$;

– зовсім незв'язною, якщо в матриці $||p_{ij}||$ *міститься нескінченна кількість нулів.*

Доведення. Твердження 1) є очевидним.

2) Оскільки спектр розподілу Z належить графіку Γ_f функції f, а $\lambda_2(\Gamma_f) = 0$ і $\mu_Z(\Gamma_f) = 1$, то розподіл Z є сингулярним відносно λ_2 (ортогональним λ_2).

3) Топологічні властивості спектра S_Z визначаються властивостями спектра S_X і випливають з леми 7. □

Лема 8. *Спектр розподілу випадкової величини* Z*:*

1) співпадає з графіком Γ_f *функції* f*, якщо матриця* $||p_{ik}||$ *не містить нулів;*

2) є об'єднанням скінченної кількості зв'язних частин графіка, якщо матриця $||p_{ij}||$ *містить скінченну кількість нулів;*

3) є ніде не щільною множиною на графіку, якщо матриця $||p_{ij}||$ *містить нескінченну кількість нулів.*

Доведення. Якщо матриця $||p_{ij}||$ не містить нулів, то спектр розподілу випадкової величини X співпадає з відрізком $[0,1]$, а отже, спектр S_Z розподілу випадкової величини Z співпадає з графіком Γ_f функції f із-за неперервності функції $y = f(x)$.

Якщо матриця $||p_{ij}||$ містить скінченну кількість нулів, причому m – номер останнього стовпця, в якому міститься нуль, то циліндр $\Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m} \subset S_X$ при $p_{c_i i} > 0$ і більше того, $S_X = \bigcup_{c_i : p_{c_i i} > 0} \Delta^{Q_5^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$. Тоді $S_Z = \bigcup_{X \in \Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m},\, Y = f(X)} (X, Y)$. □

Теорема 5. *У випадку неперервності випадкової величини* $\zeta = f(\xi)$ *її розподіл*
1) є сингулярним розподілом канторівського типу, причому спектр співпадатиме з графіком функції, якщо матриця p_{ij} *не міститеме нулів;*
2) буде об'єднанням скінченної кількості зв'язних частин, якщо матриця p_{ij} *міститиме скінченну кількість нулів;*
3) ніде не щільною множиною на графіку.

Доведення. Оскільки спектр є підмножиною графіка функції, двовимірна міра Лебега рівна нулю, то розподіл є сингулярним розподілом канторівського типу.

Якщо матриця не містить нулів, то спектр розподілу випадкової величини ξ співпадає з відрізком $[0,1]$, а отже спектр S_ζ співпадає з Γ_f із-за неперервності $y = f(x)$. Якщо матриця p_{ij} містить скінченну кількість нулів, причому m – номер останнього стовпця, в якому міститься нуль, то на циліндрі $\Delta^{Q_5^*}_{c_1\ldots c_m}$ такі, що $P_{c_i i} > 0$ повністю належить випадковій величині ζ, тобто $S_\zeta = \bigcup_{c_i : p_{c_i i} > 0} \Delta^{Q_5^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ Тоді $S_\zeta = \bigcup_{c_i : p_{c_i i} > 0} f(\Delta^{Q_5^*}_{c_1 c_2 \ldots c_m})$. □

5. Розподіли значення функції $Y = f(X)$. У цьому пункті ми лише фрагментарно зупинимося на розподілі випадкової величини Y, детальному вивченню властивостей якої буде присвячена інша робота.

Дослідимо структуру розподілу випадкової величини $Y = f(X)$, де f – функція з попередніх пунктів.

Лема 9. *Якщо* $p_{2k} = 0$ *для всіх* $k \in \mathbb{N}$, *то* G_3^**-символи* τ_k *випадкової величини*

$Y = f(X) = \Delta^{G_3^*}_{\tau_1 \ldots \tau_k \ldots}$ *є незалежними, причому*
$P\{\tau_k = 0\} = p_{0k},\ P\{\tau_k = 2\} = p_{4k},\ P\{\tau_k = 1\} = p_{1k} + p_{3k}$.

Доведення. Оскільки $p_{2k} = 0$, то носієм розподілу випадкової величини X є множина $C[Q_5^*, V]$, де $V = \{0, 1, 3, 4\}$. G_3^*-символ β_k числа $y = f(x)$, коли $\alpha_k \in V$ залежить лише від Q_5^*-символа α_k числа x, і тому $\beta_k = \gamma(\alpha_k)$. Оскільки,

$$P\{\tau_1 = 0\} = P\{\eta_1 = 0\} = p_{01},\ P\{\tau_1 = 2\} = P\{\eta_1 = 4\} = p_{41},$$
$$P\{\tau_1 = 1\} = P\{\eta_1 = 1 \vee \eta_1 = 3\} = P\{\eta_1 = 1\} + P\{\eta_1 = 3\} = p_{11} + p_{31}.$$

Нехай $i \in \{0, 2\}$, $j \in \{0, 1\}$, тоді

$$P\{\tau_1 = 0 \wedge \tau_2 = 2j\} = P\{\eta_1 = 0 \wedge \eta_2 = 2i\} = P\{\eta_1 = 0\} \cdot P\{\eta_2 = 2i\} = p_{01}p_{[2i]2},$$

$$P\{\tau_1 = 2 \wedge \tau_2 = 2j\} = P\{\eta_1 = 4 \wedge \eta_2 = 2i\} = P\{\eta_1 = 4\} \cdot P\{\eta_2 = 2i\} = p_{41}p_{[2i]2},$$

$$P\{\tau_1 = 2j \wedge \tau_2 = 1\} = P\{\eta_1 = 2i \wedge \eta_2 \in \{1, 3\}\} = P\{\eta_1 = 2i\} \cdot (P\{\eta_2 = 1\} + P\{\eta_2 = 3\}) = p_{[2i]1} \cdot (p_{12} + p_{32}),$$

$$P\{\tau_1 = 1 \wedge \tau_2 = 2j\} = P\{\eta_1 \in \{1, 3\} \wedge \eta_2 = 2i\} = (P\{\eta_1 = 1\} + P\{\eta_1 = 3\}) \cdot P\{\eta_2 = 2i\} = (p_{11} + p_{13})p_{[2i]2},$$

$$P\{\tau_1 = 1 \wedge \tau_2 = 1\} = P\{\eta_1 \in \{1, 3\} \wedge \eta_2 \in \{1, 3\}\} = (P\{\eta_1 = 1\} + P\{\eta_1 = 3\}) \cdot (P\{\eta_2 = 1\} + P\{\eta_2 = 3\}) = (p_{11} + p_{31}) \cdot (p_{12} + p_{32}),$$

$$P\{\tau_2 = 2j/\tau_1 = 0\} = \frac{p_{01}p_{[2i]2}}{p_{01}} = p_{[2i]2},\ P\{\tau_2 = 2j/\tau_1 = 2\} = \frac{p_{[2i]2}p_{41}}{p_{41}} = p_{[2i]2},$$

$$P\{\tau_2 = 2j/\tau_1 = 1\} = \frac{p_{[2i]2}(p_{11} + p_{31})}{p_{11} + p_{31}} = p_{[2i]2},$$
$$P\{\tau_2 = 1/\tau_1 = 1\} = \frac{(p_{12} + p_{32})(p_{11} + p_{31})}{p_{11} + p_{31}} = p_{12} + p_{32},$$

$$P\{\tau_2 = 0/\tau_1 = 2j\} = \frac{p_{02}p_{[2i]1}}{p_{[2i]1}} = p_{02},\ P\{\tau_2 = 2/\tau_1 = 2j\} = \frac{p_{22}p_{[2i]1}}{p_{[2i]1}} = p_{22}.$$

Аналогічно можна показати, що для довільного $k \in \mathbb{N}$, мають місце
$P\{\tau_k = 0\} = p_{0k}$, $P\{\tau_k = 1\} = p_{1k} + p_{3k}$, $P\{\tau_k = 2\} = p_{4k}$. $\square$

Наслідок 1. *Якщо* $p_{2k} = 0 = p_{jk}$, *де* $j \in \{1, 3\}$ *для довільного* $k \in \mathbb{N}$, *то випадкова величина* Y *є випадковою величиною з незалежними* G_3^**-символами, причому* $P\{\tau_k = 0\} = P\{\eta_k = 0\}$ *і* $P\{\tau_k = 4\} = P\{\eta_k = 2\}$.

Теорема 6. *Якщо* $p_{2k} = 0$, *то розподіл випадкової величини* $Y = f(X) = \Delta^{G_3^*}_{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_k \ldots}$ *є чистим, тобто є або чисто дискретним, або чисто абсолютно неперервним, або чисто сингулярним.*

Доведення. Нехай $\delta = (\delta_1 \ldots \delta_m)$, де $m \in \mathbb{N}$, $(\delta_1 \ldots \delta_m)$ – певна комбінація символів (знаків) з множини A_3. Нагадаємо, що T_δ^m*-перетворенням точки* $y = \Delta^{G_3^*}_{\tau_1 \ldots \tau_k \ldots}$

називається точка $T^m_\delta(y) = \Delta^{G^*_3}_{\delta_1\ldots\delta_m\tau_1\ldots\tau_k\ldots}$; T^m_δ*-перетворенням множини* E називається множина T^m_δ-образів всіх $y \in E$, тобто

$$T^m_\delta(E) = \left\{y : \Delta^{G^*_3}_{\delta_1\ldots\delta_m\tau_1\ldots\tau_k\ldots}, \text{ де } \Delta^{G^*_3}_{\beta_1\ldots\beta_k\ldots} \in E\right\}.$$

Розглянемо довільний оператор $T^m(y)$, який даній точці y ставить у відповідність множину всіх образів y під дією T^δ_m-перетворення.

Нехай $E \subset S_y$ – деяка борелівська множина з $[0,1]$, $T^0(y) \equiv y$, T – множина всеможливих перетворень T^m для всіх скінченних значень m. Розглянемо подію $A = \{y \in T(E)\}$. Подія A не залежить від довільної кількості перших символів G^*_3-представлення точки y, а тому є залишковою відносно кожної з σ-алгебр $\mathcal{B}_k$, породжених першими $\eta_1 \ldots \eta_k$ символами. В наслідок цього, за законом 0 та 1 Колмогорова випливає, що $P(A) = 0$ або $P(A) = 1$.

Якщо знайдеться таке число a, що існує $P\{Y = a\} > 0$, то розглянувши в якості E множину $\{a\}$, матимемо $P(A) = 1$ і $\lambda(A) = 0$, тобто ймовірність P зосереджена на не більш ніж зчисленній множині A і розподіл Y є чисто дискретним.

Якщо ж такого числа a не існує, то можливі випадки: 1) існує множина E міри Лебега нуль така, що $P\{Y \in E\} > 0$; 2) такої множини E не має, тобто для кожної множини E з $\lambda(E) = 0$ випливає $P\{Y \in E\} = 0$. Тоді, згідно з означенням, у випадку 1, $P\{Y \in T(E)\} = 1$ і $\lambda(E) = 0$, тобто Y має чисто сингулярний розподіл, а у випадку 2 – чисто абсолютно неперервний.

Таким чином, розподіл випадкової величини Y є чистим. □

Наслідок 2. *Якщо Q^*_5-зображення є Q_5-зображенням, а G^*_3-зображення є G_3-зображенням і $||p_{ik}||$ має властивості: $p_{2k} = 0$, $p_{0k}p_{4k} \neq 0$, $p_{1k} = p_{3k}$, для довільного $k \in \mathbb{N}$ причому $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(p_{1k+p_{3k}}) > 0$, то розподіл Y є дискретним і точка $y_0 = \Delta^{G_3}_{(1)}$ є атомом розподілу.*

1. *Sierpiński W.* Arytmetyczny przykład funkcji ciągłej, nieróżniczkowalnej // Wektor. – 1914. – N 8. – P. 337-343.
2. *Лукач Е.* Характеристические функции. – М: Наука, 1979. – 424 с.
3. *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
4. *Працьовитий М.В.* Структура доскональних множин і сингулярних розподілів ймовірностей в R_n // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2009. – P. 179-189.
5. *Працьовитий М. В., Торбин Г.М.* Случайные величины с независимыми Q^*-знаками // Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 95-104.
6. *Голубов В.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: теория и применение. – М: Наука, 1987. – 344 с.
7. *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. К.: Наукова думка, 1992. –208 с.
8. *Albeverio S., Koval V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* On classification of singular measures and fractal properties of quasi-self-affine measures in R^2 // Random Operators and Stochastic Equations, 2008. – 16, N 2. – P. 181-211.

9. *Василенко Н.А.* Функція Серпінського. Самоафінні властивості // Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2009. – № 10. – С. 121-131.

M. Pratsiovytyi, N. Vasylenko

Probability distributions on graphs one class nowhere differentiable functions.

We construct an infinite-parameter family of continuous nowhere monotonic and, in general, non-differentiable functions which are generalizations of classical nowhere differentiable Sierpiński function. We study Lebesgue structure (content of discrete, absolutely continuous and singular components), topological and metric properties of the distribution of values of functions belonging to constructed family and two-dimensional random variables with supports on their graphs.

Keywords: *continuous nowhere differentiable function, nowhere monotonic function, levels sets of function, Q-representation of real numbers, Lebesgue structure of distribution, discrete distribution, singular distribution.*

Н. В. Працевитый, Н. А. Василенко

Распределения вероятностей на графиках одного класса нигде не дифференцируемых функций.

Строится бесконечно параметрическое семейство непрерывных нигде не монотонных и, вообще говоря, недифференцируемых функций, которые являются обобщением классической нигде не дифференцируемой функции Серпинского. Изучается лебеговская структура (содержание дискретной, абсолютно непрерывной и сингулярной компонент) и тополого-метрические свойства распределения значений функций построенной семьи и двумерных случайных величин с носителями на их графиках.

Ключевые слова: *непрерывная нигде не дифференцируемая функция, нигде не монотонная функция, множество уровней функции, Q^*-представление (изображение) действительных чисел, лебеговская структура распределения, дискретность распределения, сингулярность распределения.*

Національний педагогічний ун-т ім. М.П. Драгоманова, Київ
`prats4@yandex.ru`
`nata_va@inbox.ru`

Получено 01.04.13